УДК 517.5

А. В. Примак (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка)

ЗГЛАДЖУВАННЯ ЗІ ЗБЕРЕЖЕННЯМ ФОРМИ 3-ОПУКЛИХ СПЛАЙНІВ 4-ГО СТЕПЕНЯ

For each 3-convex piecewise polynomial function s of degree ≤ 4 with n equidistant knots on $[0, 1]$, we construct a 3-convex spline s_1 $\left(s_1 \in C^{(3)}\right)$ of degree ≤ 4 with the same knots, which satisfies the inequality

$$\| s - s_1 \|_{C_{[0,1]}} \leq c\omega_5(s; 1/n),$$

where c is some absolute constant and ω_5 is fifth order modulus of smoothness.

Для кожної 3-опуклої кусково-поліноміальної функції s степеня ≤ 4 з n рівновіддаленими вузлами на $[0, 1]$ побудовано 3-опуклий сплайн s_1 $\left(s_1 \in C^{(3)}\right)$ степеня ≤ 4 з тими ж вузлами, що задовольняє нерівність

$$\| s - s_1 \|_{C_{[0,1]}} \leq c\omega_5(s; 1/n),$$

де c — абсолютна стала, а ω_5 — модуль гладкості п'ятого порядку.

1. Вступ. При наближенні дійснозначної функції, визначеної, наприклад, на відрізку $[0, 1]$, іноді необхідно зберегти деякі її властивості, такі як знак, монотонність, опуклість та інші. Формозберігаюче наближення алгебраїчними многочленами та кусково-поліноміальними функціями (сплайнами) розвивається вже майже 30 років.

Неперервна функція $f\colon [0, 1] \to \mathbb{R}$ називається q-опуклою, якщо

$$\sum_{k=0}^{q} (-1)^{q-k} \binom{q}{k} f(x + kh) \geq 0, \qquad x \in [0, 1], \qquad h \in \left[0, \frac{1-x}{q}\right].$$

Позначатимемо це $f \in \Delta^q$. Зрозуміло, що 1- та 2-опуклі функції — відповідно неспадні та опуклі донизу функції. Різні властивості q-опуклих функцій можна знайти в [1].

Задачі монотонного та опуклого наближення кусково-поліноміальними функціями з фіксованими вузлами на скінченному інтервалі розглядались, наприклад, у роботах [2–6]. Формозберігаюче наближення вищих порядків, тобто q-опукле наближення при $q \geq 3$, інтенсивно досліджується в останні роки з дещо несподіваними результатами. А саме, аналоги встановлених для $q = 1, 2$ позитивних результатів не мають місця для $q \geq 4$ (див. [7]), точніше, при $q \geq 4$ не можна отримати жодної оцінки типу Джексона з порядком наближення навіть n^{-3} як для наближення многочленами, так і для наближення кусково-поліноміальними функціями. Тому залишався випадок $q = 3$, для якого нещодавно доведено позитивні результати, аналогічні встановленим для $q = 1, 2$ (див. [8–10]).

Сформулюємо ці результати для випадку рівновіддалених вузлів. Нехай $\omega_k(f; h)$ — модуль гладкості k-го порядку неперервної на $[0, 1]$ функції f з кроком h. Тоді якщо невід'ємні $k, r,$ $(k, r) \neq (4, 0)$, такі, що $k + r \geq 3$ і або $k + r \leq 4$ або $r \geq 3$, то для довільної $f \in \Delta^3 \cap C^{(r)}[0, 1]$ існує кусково-поліноміальна функція $s \in \Delta^3$ степеня $\leq k + r - 1$ з n рівновіддаленими вузлами така, що

$$\| f - s \|_{C[0,1]} \leq c(k, r) n^{-r} \omega_k\left(f^{(r)}; \frac{1}{n}\right). \tag{1}$$

Але щодо гладкості таких кусково-поліноміальних функцій у статті [10] доведено лише можливість згладжування 3-опуклих кусково-поліноміальних функцій до кусково-поліноміальних функцій з $C^{(2)}$ зі збереженням порядку наближення. Це дає можливість побудувати кубічні 3-опуклі сплайни найменшого дефекту, що дають порядок наближення n^{-4} (n — кількість вузлів). У цій роботі ми наводимо конструкцію 3-опуклого сплайну четвертого степеня і найменшого дефекту, що дає оцінку для наближення порядку n^{-5}, поширюючи оцінку (1) для $k + r = 5$, $r \geq 3$ і на сплайни найменшого дефекту (див. наслідок 1). Точніше, ми доводимо наступну теорему, що дозволяє згладити довільну 3-опуклу кусково-поліноміальну функцію степеня ≤ 4 з рівновіддаленими вузлами до сплайну найменшого дефекту з тими ж вузлами, зберігаючи оцінку на наближення.

Теорема 1. *Для кожної* 3*-опуклої кусково-поліноміальної функції* s *степеня* ≤ 4 *з* n *рівновіддаленими вузлами на* $[0, 1]$ *існує* 3*-опуклий сплайн* s_1 $(s_1 \in C^{(3)})$ *степеня* ≤ 4 *з тими самими вузлами, що задовольняє нерівність*

$$\| s - s_1 \|_{C[0,1]} \leq c\,\omega_5\left(s; \frac{1}{n}\right), \tag{2}$$

де c *— абсолютна стала.*

Враховуючи результати статей [10, 6], отримуємо наступні наслідки.

***Наслідок* 1.** *Для довільної* $f \in \Delta^3 \cap C^{(3)}[0, 1]$ *існує сплайн* $s \in \Delta^3$ *четвертого степеня мінімального дефекту з* n *рівновіддаленими вузлами, що задовольняє нерівність*

$$\| f - s \|_{C[0,1]} \leq cn^{-3}\omega_2\left(f^{(3)}; \frac{1}{n}\right),$$

де c *— абсолютна стала.*

***Наслідок* 2.** *Для довільної* $f \in \Delta^3 \cap C^{(1)}[0, 1]$ *існує число* $N(f)$ *таке, що для будь-якого* $n \geq N(f)$ *існує сплайн* $s \in \Delta^3$ *четвертого степеня мінімального дефекту з* n *рівновіддаленими вузлами, що задовольняє нерівність*

$$\| f - s \|_{C[0,1]} \leq cn^{-1}\omega_4\left(f'; \frac{1}{n}\right), \tag{3}$$

де c *— абсолютна стала.*

Зауважимо, що оцінка (3), взагалі кажучи, не виконується для всіх n.

У п. 2 ми доведемо деякі допоміжні леми, а в п. 3 — теорему 1.

2. Допоміжні леми. Позначимо $(a)_+^k := (\max\{0; a\})^k$, $k = 1, 2, \ldots$, та $(a)_+^0 := 1$, якщо $a \geq 0$, і $(a)_+^0 := 0$, якщо $a < 0$.

Наступна лема є модифікацією леми 3 з [11] (див. також [10], лема 11) для рівновіддалених вузлів і $B = 3$. Вона доводиться аналогічно, тому ми не наводимо її доведення.

Лема 1. *Нехай* $x_j = jl$, $j = 0, \ldots, n$, $l = n^{-1}$. *Для довільної функції*

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i (x - x_i)_+^0, \qquad x \in [0, 1],$$

де $\alpha_i \geq 0$, *існує ламана*

$$p(x) = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i l^{-1} (x - x_i)_+$$

така, що

$$|\beta_i| < \frac{\alpha_i}{3}, \qquad i = 1, \ldots, n-1,$$

і

$$\left| g(x) - p(x) \right| < 24 \max_{i = 1, \ldots, n-1} \alpha_i, \qquad x \in [0, 1].$$

Лема 2. *Нехай* s — *кусково-поліноміальна функція степеня* $\leq k-1$ *на* $[a, b]$ *з єдиним вузлом розбиття* $c := \frac{a+b}{2}$. *Тоді*

$$\left| s^{(r)}(c+) - s^{(r)}(c-) \right| \leq \frac{c(k, r)}{(b-a)^r} \omega_k(s; b-a), \qquad r = 0, 1, \ldots .$$

Доведення. За нерівністю Уітні (див., наприклад, [12]) існує многочлен p степеня $\leq k-1$ такий, що

$$\| s - p \|_{C[a, b]} \leq 3\omega_k(s; b-a).$$

За нерівністю Маркова

$$\left| s^{(r)}(c+) - p^{(r)}(c) \right| \leq \left(\frac{4(k-1)^2}{b-a} \right)^r \| s - p \|_{C[a, b]} \leq$$

$$\leq 3\left(\frac{4(k-1)^2}{b-a} \right)^r \omega_k(s; b-a)$$

і аналогічно

$$\left| s^{(r)}(c-) - p^{(r)}(c) \right| \leq 3\left(\frac{4(k-1)^2}{b-a} \right)^r \omega_k(s; b-a).$$

Отже,

$$\left| s^{(r)}(c+) - s^{(r)}(c-) \right| \leq \left| s^{(r)}(c+) - p^{(r)}(c) \right| + \left| p^{(r)}(c) - s^{(r)}(c-) \right| \leq$$

$$\leq 6\left(\frac{4(k-1)^2}{b-a} \right)^r \omega_k(s; b-a) = \frac{c(k, r)}{(b-a)^r} \omega_k(s; b-a).$$

Лема 3. *Нехай* $x_j = jl$, $j = 0, \ldots, n$, $l = n^{-1}$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — *деякі дійсні числа. Існують* $\beta_1^*, \ldots, \beta_{n-1}^*$ *такі, що*

$$\beta_j^* \geq -|\alpha_j|, \qquad j = 1, \ldots, n-1, \tag{4}$$

та для $x \in [0, 1] = [x_0, x_n]$

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{l^2 (x - x_j)_+}{3} - \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j^* \left(\frac{l (x - x_j)_+^2}{2} + \frac{l^3 (x - x_j)_+^0}{12} \right) \right| < c l^3 \max_{j = 1, \ldots, n-1} |\alpha_i|. \tag{5}$$

Доведення. Для зручності покладемо $\alpha_{-1} = \alpha_0 = \alpha_n = \alpha_{n+1} := 0$. Спочатку покажемо, що для кожної послідовності λ_j, $|\lambda_j| \leq \frac{1}{3}$, $j = 1, \ldots, n-1$, існують β_j, $j = 0, \ldots, n$, такі, що

$$\beta_j \;\geq\; -\left|\alpha_j\right|, \qquad j = 0, \ldots, n, \tag{6}$$

і

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \, \frac{l^2 (x - x_j)_+}{3} - \sum_{j=0}^{n} \beta_j \left(\frac{l(x - x_j)_+^2}{2} + \frac{l^3 (x - x_j)_+^0}{12} \right) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left|\alpha_j\right| l^2 (x - x_j)_+ - \sum_{j=1}^{n-1} \left|\alpha_j\right| l^3 (x - x_j)_+^0 + r(x), \qquad x \in [0, 1], \tag{7}$$

де r така, що

$$\left| r(x) \right| \;\leq\; c_0 l^3 \max_{j = 1, \ldots, n-1} \left|\alpha_j\right|, \qquad x \in [0, 1]. \tag{8}$$

Для цього, покладаючи $\lambda_{-1} = \lambda_0 = \lambda_n = \lambda_{n+1} := 0$, визначаємо

$$\beta_j \;:=\; -\left|\alpha_j\right| + \frac{1 + \lambda_{j-1}}{2} \left|\alpha_{j-1}\right| - \frac{\alpha_{j-1}}{6} + \frac{1 - \lambda_{j+1}}{2} \left|\alpha_{j+1}\right| + \frac{\alpha_{j+1}}{6}, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{9}$$

Зрозуміло, що

$$\frac{1 \mp \lambda_{j\pm1}}{2} \left|\alpha_{j\pm1}\right| \;\geq\; \frac{1}{3} \left|\alpha_{j\pm1}\right| \;\geq\; \mp \frac{1}{6} \alpha_{j\pm1}, \qquad j = 0, \ldots, n,$$

тому виконується (6). Безпосередня перевірка показує, що при $j = 1, \ldots, n-1$ функція r_j, задана співвідношенням

$$\alpha_j \, \frac{l^2 (x - x_j)_+}{3} - \left(\frac{1 - \lambda_j}{2} \left|\alpha_j\right| + \frac{\alpha_j}{6} \right) \left(\frac{l(x - x_{j-1})_+^2}{2} + \frac{l^3 (x - x_{j-1})_+^0}{12} \right) +$$

$$+ \left|\alpha_j\right| \left(\frac{l(x - x_j)_+^2}{2} + \frac{l^3 (x - x_j)_+^0}{12} \right) -$$

$$- \left(\frac{1 + \lambda_j}{2} \left|\alpha_j\right| - \frac{\alpha_j}{6} \right) \left(\frac{l(x - x_{j+1})_+^2}{2} + \frac{l^3 (x - x_{j+1})_+^0}{12} \right) =$$

$$= \lambda_j \left|\alpha_j\right| l^2 (x - x_j)_+ - \left|\alpha_j\right| l^3 (x - x_j)_+^0 + r_j(x), \qquad x \in [0, 1], \tag{10}$$

задовольняє

$$r_j(x) \;=\; 0, \qquad x \notin \left[x_{j-1}, x_{j+1} \right], \tag{11}$$

та

$$\left| r_j(x) \right| \;\leq\; c_1 l^3 \left|\alpha_j\right|, \qquad x \in \left[x_{j-1}, x_{j+1} \right]. \tag{12}$$

Тому (9) та (10) забезпечують (7) з

$$r(x) \;=\; \sum_{j=1}^{n-1} r_j(x), \qquad x \in [0, 1].$$

Завдяки (11) та (12) отримуємо (8) з $c_0 = 2c_1$. Отже, (7) доведено. Щоб закінчити доведення леми, застосуємо лему 1, яка забезпечує існування λ_j, $\left|\lambda_j\right| \leq \frac{1}{3}$, $j = 1, \ldots, n$, таких, що

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_j \left|\alpha_j\right| l^2 (x - x_j)_+ - \sum_{j=1}^{n-1} \left|\alpha_j\right| l^3 (x - x_j)_+^0 \right| \;\leq\; c_0 l^3 \max_{j = 1, \ldots, n-1} \left|\alpha_j\right|, \qquad x \in [0, 1].$$

З останньої нерівності та з (7) і (8) для $x \in [0, 1]$ маємо

$$\left| \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j \frac{l^2 (x - x_j)_+}{3} - \sum_{j=0}^{n} \beta_j \left(\frac{l (x - x_j)_+^2}{2} + \frac{l^3 (x - x_j)_+^0}{12} \right) \right| < c_0 l^3 \max_{j=1,\ldots,n-1} |\alpha_j|.$$

Беручи $\beta_1^* := \beta_1 + \beta_0$, $\beta_j^* := \beta_j$, $j = 2, \ldots, n-1$, приходимо до (5).

3. Доведення теореми 1. Зафіксуємо $n \ge 2$, $l := n^{-1}$, $x_j := jl$, $j = -1, \ldots, n + 1$. Введемо функції φ_j, ψ_j, $j = 0, \ldots, n$. Покладемо

$$\varphi_j(x) := \begin{cases} (x - x_{j-1}) l^{-1}, & x \in (x_{j-1}, x_j], \\ -(x - x_{j+1}) l^{-1}, & x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0, & x \in [0,1] \setminus (x_{j-1}, x_{j+1}), \end{cases}$$

і

$$\psi_j(x) := \begin{cases} (x - x_{j-1}) l^{-1}, & x \in (x_{j-1}, x_j], \\ (x - x_{j+1}) l^{-1}, & x \in (x_j, x_{j+1}), \\ 0, & x \in [0,1] \setminus (x_{j-1}, x_{j+1}). \end{cases}$$

Наступні дві леми перевіряються за допомогою безпосереднього обчислення.

Лема 4. *Кожна кусково-лінійна функція* q *з вузлами* x_j, $j = 1, \ldots, n-1$, *на* $[0, 1]$, *має вигляд*

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_i \psi_j(x) + \sum_{j=0}^{n} u_i \varphi_j(x), \quad x \in [0, 1], \quad x \ne x_k, \quad k = 1, \ldots, n-1, \tag{13}$$

де

$$\alpha_j = \frac{q(x_j-) - q(x_j+)}{2}, \quad j = 1, \ldots, n-1, \tag{14}$$

і

$$u_j = \frac{q(x_j-) + q(x_j+)}{2}, \quad j = 0, \ldots, n.$$

Якщо q *невід'ємна, то при цьому*

$$u_j = \frac{q(x_j-) + q(x_j+)}{2} \ge |\alpha_j| \ge 0, \quad j = 0, \ldots, n. \tag{15}$$

Лема 5. *Для функцій* $r_{j,k}^{\varphi}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, 3$, *визначених співвідношеннями*

$$\int_0^x \varphi_j(t_1) dt_1 = l (x - x_j)_+^0 + r_{j,1}^{\varphi}(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$\int_0^x \int_0^{t_1} \varphi_j(t_2) dt_2 dt_1 = l (x - x_j)_+ + r_{j,2}^{\varphi}(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$\int_0^x \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \varphi_j(t_3) dt_3 dt_2 dt_1 = \frac{l}{2} (x - x_j)_+^2 + \frac{l^3}{12} (x - x_j)_+^0 + r_{j,3}^{\varphi}(x), \quad x \in [0, 1],$$

виконується

$$r^{\varphi}_{j,k}(x) = 0, \quad x \notin \left(x_{j-1}, x_{j+1}\right), \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, 2, 3,$$

та

$$\left|r^{\varphi}_{j,k}(x)\right| \le cl^k, \quad x \in \left(x_{j-1}, x_{j+1}\right), \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, 2, 3.$$

Також для функцій $r^{\psi}_{j,k}$, $j = 1, \ldots, n-1$, $k = 1, 2, 3$, *визначених співвідношеннями*

$$\int\limits_0^x \psi_j(t_1)dt_1 = r^{\psi}_{j,1}(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{t_1} \psi_j(t_2)dt_2dt_1 = \frac{l^2}{3}(x - x_j)^0_+ + r^{\psi}_{j,2}(x), \quad x \in [0, 1],$$

$$\int\limits_0^x \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} \psi_j(t_3)dt_3dt_2dt_1 = \frac{l^2}{3}(x - x_j)_+ + r^{\psi}_{j,3}(x), \quad x \in [0, 1],$$

виконується

$$r^{\psi}_{j,k}(x) = 0, \quad x \notin \left(x_{j-1}, x_{j+1}\right), \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, 2, 3,$$

та

$$\left|r^{\psi}_{j,k}(x)\right| \le cl^k, \quad x \in \left(x_{j-1}, x_{j+1}\right), \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad k = 1, 2, 3.$$

***Доведення теореми* 1.** За теоремою 5 [10] існує 3-опукла кусково-поліноміальна функція $\tilde{s} \in C^{(2)}[0,1]$ степеня ≤ 4 з рівновіддаленими вузлами, що задовольняє нерівність

$$\| s - \tilde{s} \|_{C[0,1]} \le c\omega_5\left(s; \frac{1}{n}\right). \tag{16}$$

Тоді $q(x) := \tilde{s}^{(3)}(x)$, $x \in [0, 1]$, є кусково-лінійною невід'ємною функцією, для якої

$$s(x) = p_2(x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} q(t_3)\,dt_3dt_2dt_1, \quad x \in [0, 1], \tag{17}$$

де

$$p_2(x) = \tilde{s}(0) + \tilde{s}'(0)x + \frac{\tilde{s}''(0)}{2}x^2, \quad x \in [0, 1].$$

Тепер, застосовуючи лему 4, отримуємо (13). З (14) і леми 2 випливає, що

$$l^3 \max_{j=1,\ldots,n-1} \left|\alpha_j\right| \le c\omega_5\left(\tilde{s}; \frac{1}{n}\right). \tag{18}$$

Застосуємо лему 3 і покладемо

$$q_1(x) := u_0\varphi_0(x) + u_n\varphi_n(x) + \sum_{j=1}^{n-1}(u_j + \beta^*_j)\varphi_j(x), \quad x \in [0, 1],$$

де

$$s_1(x) := p_2(x) + \int\limits_0^x \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^{t_2} q_1(t_3)\,dt_3dt_2dt_1, \quad x \in [0, 1].$$

З нерівностей (4) і (15) маємо $u_j + \beta_j^* \geq 0$, $j = 1, \ldots, n-1$, тому q_1 є невід'ємною кусково-лінійною неперервною функцією, звідки випливає, що s_1 є 3-опуклим сплайном четвертого степеня з рівновіддаленими вузлами. Беручи до уваги (5), (13), (17), (18) і лему 5, отримуємо

$$\| s_1 - \tilde{s} \|_{C[0,1]} \leq c\omega_5\left(\tilde{s}; \frac{1}{n}\right).$$

Тепер з (16) випливає (2).

1. *Roberts A. W., Varbeg D. E.* Convex functions. – New York: Acad. Press, 1973.
2. *DeVore R. A.* Monotone approximation by splines // SIAM J. Math. Anal. – 1977. – **8**, № 5. – P. 891 – 905.
3. *Beatson R. K.* Convex approximation by splines // Ibid. – 1981. – **12**. – P. 549 – 559.
4. *Hu Y. K.* Convex approximation by quadratic splines // J. Approxim. Theory. – 1993. – **74**. – P. 69 – 82.
5. *Kopotun K. A.* Pointwise and uniform estimates for convex approximation of functions by algebraic polynomials // Constr. Approxim. – 1994. – **10**. – P. 153 – 178.
6. *Shevchuk I. A.* One construction of cubic convex spline // Proc. ICAOR. – 1997. – **1**. – P. 357 – 368.
7. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Shape-preserving widths of Sobolev-type classes of *s*-monotone functions on a finite interval // Isr. J. Math. – 2003. – **133**. – P. 239 – 268.
8. *Konovalov V. N., Leviatan D.* Estimates on the approximation of 3-monotone function by 3-monotone quadratic splines // East J. Approxim. – 2001. – **7**. – P. 333 – 349.
9. *Prymak A. V.* Three-convex approximation by quadratic splines with arbitrary fixed knots // Ibid. – 2002. – **8**, № 2. – P. 185 – 196.
10. *Leviatan D., Prymak A. V.* On 3-monotone approximation by piecewise polynomials // J. Approxim. Theory. – 2005. – **133**. – P. 97 – 121.
11. *Bondarenko A. V.* Jackson type inequality in 3-convex approximation // East J. Approxim. – 2002. – **8**, № 3 – P. 291 – 302.
12. *Gilewicz J., Kryakin Yu. V., Shevchuk J. A.* Boundness by 3 of the Whitney interpolation constant // J. Approxim. Theory. – 2002. – **119**. – P. 271 – 290.

Одержано 12.12.2003