УДК 517.946

И. П. Слепцова (Донец. нац. ун-т),
А. Е. Шишков (Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

ПРИНЦИП ФРАГМЕНА – ЛИНДЕЛЕФА ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We consider the equation $u_{tt} + A(u_t) + B(u) = 0$, where A and B are quasilinear operators in the variable x of second and forth orders, respectively. In the cylindrical domain unbounded in space variables, we obtain estimates that characterises the minimal grouth of any nonzero solution of the mixed problem at infinity.

Розглянуто рівняння $u_{tt} + A(u_t) + B(u) = 0$, в якому A і B — квазілінійні оператори за змінною x другого і четвертого порядків відповідно. В необмеженій за просторовими змінними циліндричній області отримано оцінки, які характеризують мінімальний ріст будь-якого ненульового розв'язку мішаної задачі на нескінченності.

При изучении качественных свойств решений краевых задач важную роль играют оценки роста решений на бесконечности, определяемые теоремами типа Фрагмена – Линделефа. Для линейных и квазилинейных эллиптических уравнений в бесконечномерных областях различной структуры классическая теорема Фрагмена – Линделефа обобщена в ряде работ (см., например, [1 – 3]). Оценки роста классических решений смешанных задач для параболических уравнений получены в [4, 5]. Асимптотические свойства обобщенных решений смешанных задач для линейных параболических уравнений в неограниченных пространственных областях изучены в [6, 7]. Для нелинейных уравнений второго порядка типа нестационарной фильтрации в [8] доказана единственность решения задачи Коши в классах функций, являющихся нелинейным аналогом классов Тихонова. В [9, 10] указаны классы растущих на бесконечности обобщенных решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений высокого порядка.

В [11] предложенный авторами метод введения параметра использован для изучения эволюционных уравнений вида $\left(\frac{\partial}{\partial t} - M_1\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - M_2\right)u = 0$, где M_1 и M_2 — линейные дифференциальные операторы по пространственным переменным с гладкими коэффициентами. Единственность классического решения задачи Коши в неограниченных пространственных областях установлена в классах растущих функций типа Тихонова – Тэклинда. Доказательство единственности решения в случае линейных уравнений равносильно доказательству альтернативных утверждений типа теорем Фрагмена – Линделефа.

В настоящей работе рассмотрены квазилинейные уравнения вида

$$u_{tt} + A(u_t) + B(u) = F(x, t), \tag{1}$$

являющиеся обобщением уравнений из [11] с операторами M_1 и M_2 второго порядка. Для однородной смешанной задачи в неограниченной по пространственным переменным цилиндрической области установлен минимальный рост на бесконечности произвольного ненулевого решения.

Пусть $G = \Omega \times (0, T)$, $0 < T < \infty$, — неограниченная область в $R_{x,t}^{n+1}$. Граница $\partial\Omega$ предполагается достаточно гладкой; $\Gamma = \partial\Omega \times (0, T)$. В G рассматривается смешанная задача

$$u_{tt} + A(u_t) + B(u) \equiv$$

$$\equiv \sum_{|\alpha|=1} D^\alpha a_\alpha(x, t, u_t, D^\alpha u_t) + \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha\left(\left|D^\alpha u\right|^{p-2} D^\alpha u\right) = 0, \tag{2}$$

$$u\big|_{t=0} = 0, \quad u_t\big|_{t=0} = 0; \tag{3}$$

$$D^\alpha u\Big|_\Gamma = 0, \quad |\alpha| \le 1. \tag{4}$$

Здесь $D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} D_{x_2}^{\alpha_2} \ldots D_{x_n}^{\alpha_n} = \dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $D^m u = \{D^\alpha u\}$, $|\alpha| = m$, $\left|D^m u\right|^2 = \sum_{|\alpha|=m} \left|D^\alpha u\right|^2$, $p > 2$, функции $a_\alpha\left(x, t, \xi, \xi^{(1)}\right)$ определены и непрерывны для всех $(x, t) \in G$, $\xi \in R$, $\xi^{(1)} \in R^n$ и удовлетворяют неравенствам

$$\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha\left(x, t, \xi, \xi^{(1)}\right)\xi_\alpha^{(1)} \ge a_0 \left|\xi^{(1)}\right|^p, \quad a_0 > 0, \tag{5}$$

$$\left|a_\alpha\left(x, t, \xi, \xi^{(1)}\right)\right| \le a_1 \left|\xi^{(1)}\right|^{p-1}, \quad a_1 < \infty. \tag{6}$$

Пусть Ω' — любая ограниченная подобласть Ω, $S \subset \partial\Omega'$, $G_{\rho,\nu} = \Omega \times (\rho, \nu)$, $0 \le \rho < \nu \le T$, $G'_{\rho,\nu} = \Omega' \times (\rho, \nu)$. Через $W_p^m(\Omega', S)$ обозначим замыкание в норме $W_p^m(\Omega')$ множества C^m-гладких в Ω' функций, обращающихся в нуль в окрестностях $\partial\Omega' \setminus S$, $\overset{\circ}{W}{}_p^m \equiv W_p^m\left(\Omega', \partial\Omega' \setminus \partial\Omega\right)$, а через $L_p\left(\rho, \nu;\ W_p^m(\Omega', S)\right)$ — пространство функций $v(x, t)$ таких, что для почти всех $t \in (\rho, \nu)$ $v(x, t) \in W_p^m(\Omega', S)$ и $\int_\rho^\nu \|v(t, \cdot)\|_{W_p^m}^p dt < \infty$.

Для уравнений вида (1) с линейными эллиптическими операторами A и B разных порядков теория разрешимости смешанных задач в ограниченных областях хорошо развита (см. [12, 13]). В случае, когда B — линейный оператор второго порядка, а $Au_t = \left|u_t\right|^{p-2} u_t$, $p > 1$, разрешимость смешанной задачи в классах обобщенных функций доказана в [14]. В неограниченных областях в [15] для неоднородного уравнения с $A = B = \Delta$ доказано существование обобщенных решений смешанной задачи с ограниченным интегралом энергии, в [16] в случае линейных эллиптических операторов A и B порядков $2m$ и $2m+2$ соответственно установлено существование растущих на бесконечности решений. Для уравнений, в которых $A(u_t) = \sum_{|\alpha|=m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha a_\alpha(x, t, u_t, D_x u_t, \ldots$ $\ldots, D_x^m u_t)$, оператор A удовлетворяет условиям (5), (6) с $|\alpha| = m$, а B — линейный равномерно эллиптический оператор порядка $2m + 2$, в ограниченной области G существует решение смешанной задачи из классов типа $V_{m,2}^{1,0}(G)$ [17, с. 528]. Подробное доказательство этого утверждения будет изложено в дальнейших публикациях. Для однородной задачи в неограниченных областях можно получить оценки снизу роста на бесконечности ненулевых решений из таких же классов функций.

В данной работе с целью упрощения технической стороны доказательств будем рассматривать решения в следующем смысле. Под обобщенным решением задачи (2) – (4) будем понимать такую функцию $u(x, t)$, что для любой ограниченной подобласти $\Omega' \subset \Omega$ и любых ρ, ν, $0 \le \rho < \nu \le T$, $u(x, t) \in H = \left\{u(x, t)\colon u(x, t),\ u_t(x, t) \in L_p\left(\rho, \nu;\ W_p^2\left(\Omega', \partial\Omega' \setminus \partial\Omega\right)\right),\ u_{tt} \in L_{p'}\left(\rho, \nu;\ W_p^{-2}(\Omega')\right)\right\}$, выполнены условия (3) и интегральное тождество

$$\int_\rho^\nu \langle u_{tt}, v\rangle dt + \iint_{G'_{\rho,\nu}} \left[\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha\left(x, t, u_t, D^\alpha u_t\right) D^\alpha v + \sum_{|\alpha|=2} \left|D^2 u\right|^{p-2} D^\alpha u D^\alpha v\right] dx\, dt = 0 \tag{7}$$

с произвольной функцией $v(x,t) \in L_p\Big(\rho, \nu; \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega')\Big)$. Здесь u_{tt} — производная u_t в смысле распределений на $(0, T)$ со значениями в $\Big(W_p^2\big(\Omega', \partial\Omega' \setminus \partial\Omega\big)\Big)^* = W_{p'}^{-2}(\Omega')$, $\langle w, v \rangle$ — значение линейного непрерывного функционала $w \in W_{p'}^{-2}(\Omega')$ на элементе $v \in \overset{\circ}{W}{}_p^2(\Omega')$.

Введем семейство ограниченных областей $\Omega(\tau)$: для любых $\tau > 0$ $\Omega(\tau) = \Omega \cap \{|x| < \tau\}$, $\Omega(\tau_1, \tau_2) = \Omega(\tau_2) \setminus \Omega(\tau_1)$. Для любых ρ, ν, $0 \le \rho < \nu \le T$, $G_{\rho,\nu}(\tau) = \Omega(\tau) \times (\rho, \nu)$, $G_{\rho,\nu}(\tau_1, \tau_2) = \Omega(\tau_1, \tau_2) \times (\rho, \nu)$.

Основным результатом данной работы является следующее утверждение.

Теорема (типа Фрагмена – Линделефа). *Для произвольного обобщенного решения* $u(x,t)$ *задачи* (2) – (4) *имеет место альтернатива: либо* $u \equiv 0$ *в* G, *либо* $u(x,t)$ *растет при* $|x| \to \infty$ *так, что для произвольной последовательности* $\{\tau_i\}$ *вида* $\tau_{i+1} = k\tau_i$, $k \in (1, \infty)$, $\tau_i > \tau_0 > 0$, $i \ge 1$,

$$\iint\limits_{G(\tau_i)} \Big(\tau_i^{p'} |u_t|^p + \tau_i^p \big|D^2 u\big|^p\Big) dx\, dt\, \tau_i^{-\gamma_1} h^{-\gamma_2}(\tau_i) \to \infty \quad \text{при} \quad i \to \infty, \tag{8}$$

где $\gamma_1 = n + p + p' + \dfrac{2p}{p-2}$, $\gamma_2 = \dfrac{2}{p-2}$, $h(\tau)$ — *произвольная положительная монотонно неубывающая функция, удовлетворяющая условиям:*

i) $\displaystyle\int_1^\infty \frac{d\tau}{\tau h(\tau)} = \infty$;

ii) *существует постоянная* $\varphi \in (0, \infty)$ *такая, что* $h(\tau) \le\, \le \tau^\varphi$ *для всех* $\tau > \tau_0$.

***Замечание* 1.** Соотношения (8) содержат, в частности, оценки роста решений параболических уравнений из [8, 10].

Доказательство. Пусть $\zeta(h) \in C^2(R^1)$ — срезающая функция: $\zeta(h) = 1$ при $h \le 0$, $\zeta(h) = 0$ при $h \ge 1$, $0 \le \zeta(h) \le 1$ при $0 < h < 1$. Обозначим $\eta_{\tau,\sigma}(x) = \zeta^p\left(\dfrac{|x| - 3\tau}{\sigma} + 2\right)$. Очевидно, $\eta_{\tau,\sigma}(x) \equiv 0$ при $|x| > 3\tau - \sigma$, $\eta_{\tau,\sigma}(x) = 1$ при $|x| < 3\tau - 2\sigma$, $\left|D^j \eta_{\tau,\sigma}\right| \le d_j \sigma^{-j}$, $j = 1, 2$; $d_j = \text{const} < \infty$ не зависят от σ. Для произвольной измеримой функции $\mu(\tau) > 0$ определим $g_\tau(t) = \exp\big(-\mu^2(\tau) t\big)$.

Лемма 1. *Пусть* $u(x,t)$ — *обобщенное решение задачи* (2) – (4). *Тогда для произвольных* ρ, ν, $0 \le \rho < \nu \le T$, $\tau > 0$, $0 < \sigma < \dfrac{3}{2}\tau$ *и произвольной измеримой функции* $\mu(\tau) > 0$ *выполняется соотношение*

$$g_\tau(\nu) \int\limits_{\Omega_\nu(3\tau - \sigma)} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{p} \left|D^2 u\right|^p\right) \eta_{\tau,\sigma}(x)\, dx \; +$$

$$+ \; \mu^2(\tau) \int\limits_{\Omega_{\rho,\nu}(3\tau - \sigma)} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{p} \left|D^2 u\right|^p\right) \eta_{\tau,\sigma}(x)\, g_\tau(t)\, dx\, dt \; +$$

$$+ \; a_0 \int\limits_{\Omega_{\rho,\nu}(3\tau - \sigma)} \left|D u_t\right|^p \eta_{\tau,\sigma}(x)\, g_\tau(t)\, dx\, dt \; \le$$

$$\le \; c_1 \int\limits_{\Omega_{\rho,\nu}(3\tau - 2\sigma, 3\tau)} \left(\sigma^{-p} |u_t|^p + \sigma^{-p'} \left|D^2 u\right|^p\right) g_\tau(t)\, dx\, dt \; +$$

$$+\ g_\tau(\rho) \int\limits_{\Omega_\rho(3\tau)} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{p} \left| D^2 u \right|^p \right) dx. \tag{9}$$

Здесь и далее c — положительные постоянные, зависящие от известных параметров задачи и не зависящие от τ и σ.

Доказательство. Положим в интегральном тождестве (7), рассматриваемом в области $G'_{\rho,\nu} = G_{\rho,\nu}(3\tau)$, $v(x,t) = u(x,t)\, \eta_{\tau,\sigma}(x)\, g_\tau(t)$:

$$\int\limits_\rho^\nu \left\langle u_{tt}, u_t \eta_{\tau,\sigma}(x) \right\rangle g_\tau(t)\, dt\ +$$

$$+ \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau)} \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha\left(x, t, u_t, D^\alpha u_t\right) D^\alpha u_t\, \eta_{\tau,\sigma}(x)\, g_\tau(t)\, dx\, dt\ +$$

$$+ \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau)} \sum_{|\alpha|=2} \left| D^2 u \right|^{p-2} D^\alpha u\, D^\alpha u_t\, \eta_{\tau,\sigma}(x)\, g_\tau(t)\, dx\, dt\ +$$

$$+ \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-2\sigma,\, 3\tau-\sigma)} \left[\sum_{|\alpha|=1} a_\alpha\left(x, t, u_t, D^\alpha u_t\right) u_t D^\alpha \eta_{\tau,\sigma}\ + \right.$$

$$\left. +\ \sum_{|\alpha|=2} \left| D^2 u \right|^{p-2} D^\alpha u \sum_{i<\alpha} D^i u_t D^{\alpha-i} \eta_{\tau,\sigma} \right] g_\tau(t)\, dx\, dt\ =\ 0. \tag{10}$$

Первое слагаемое в левой части равенства (10), согласно теореме 1.17 гл. IV [18], примененной к функции u_t, можно проинтегрировать с помощью формулы интегрирования по частям. Поскольку $D^\alpha u \in C\left(0, T; L_p(\Omega')\right)$ ([14], лемма 1.2 гл. 1), в третьем слагаемом интегрирование по частям также возможно. Второе слагаемое можно оценить снизу, используя условие (5), а в интеграле по области $G_{\rho,\nu}(3\tau - 2\sigma, 3\tau - \sigma)$ применим неравенства Гельдера и Юнга с ε:

$$g_\tau(\nu) \int\limits_{\Omega_\nu(3\tau-\sigma)} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{p} \left| D^2 u \right|^p \right) \eta_{\tau,\sigma}(x)\, dx\ +$$

$$+\ \mu^2(\tau) \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma)} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{p} \left| D^2 u \right|^p \right) \eta_{\tau,\sigma}(x)\, g_\tau(t)\, dx\, dt\ +$$

$$+\ a_0 \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma)} |D u_t|^p\, \eta_{\tau,\sigma}(x)\, g_\tau(t)\, dx\, dt\ \le$$

$$\le\ \varepsilon \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-2\sigma, 3\tau-\sigma)} |D u_t|^p\, g_\tau(t)\, dx\, dt\ +$$

$$+\ c_1 \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-2\sigma, 3\tau-\sigma)} \left[\sigma^{-p} |u_t|^p + \sigma^{-p'} \left| D^2 u \right|^p \right] g_\tau(t)\, dx\, dt\ +$$

$$+\ g_\tau(\rho) \int\limits_{\Omega_\rho(3\tau-\sigma)} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{p} \left| D^2 u \right|^p \right) \eta_{\tau,\sigma}(x)\, dx. \tag{11}$$

Избавимся от слагаемого с ε в правой части (11). Для этого возьмем срезающую функцию $\eta_{\tau,\frac{\sigma}{2}}(x)$ и получим аналогичное неравенству (11) соотношение, в левой части которого интегрирование ведется по областям $\Omega_\nu\left(3\tau-\frac{\sigma}{2}\right)$ и $G_{\rho,\nu}\left(3\tau-\frac{\sigma}{2}\right)$, а в правой — по слою $G_{\rho,\nu}\left(3\tau-\sigma,\, 3\tau-\frac{\sigma}{2}\right)$ и по области $\Omega_\rho\left(3\tau-\frac{\sigma}{2}\right)$ соответственно. Умножим обе части этого соотношения на $\left(\frac{\sigma}{2}\right)^p$. Обозначим

$$
\begin{gathered}
A_\rho(\sigma) = \sigma^p g_\tau(\rho) \int\limits_{\Omega_\rho(3\tau-\sigma)} \left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{p}\left|D^2u\right|^p\right)dx, \\
I_{\rho,\nu}(\sigma) = \sigma^p a_0 \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma)} |Du_t|^p g_\tau(t)\,dx\,dt, \\
I^{(0)}_{\rho,\nu}(\sigma_0,\sigma) = \sigma^p \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma)\setminus G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma_0)} \left|Du_t\right|^p g_\tau(t)\,dx\,dt, \\
H_0(\sigma_0,\sigma) = \\
= \sigma^p \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma)\setminus G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma_0)} \left[(\sigma_0-\sigma)^{-p}\left|u_t\right|^p + (\sigma_0-\sigma)^{-p'}\left|D^2u\right|^p\right] g_\tau(t)\,dx\,dt.
\end{gathered}
\tag{12}
$$

Тогда можно записать

$$
I_{\rho,\nu}(\sigma) \le \varepsilon 2^p I^{(0)}_{\rho,\nu}\left(\sigma,\frac{\sigma}{2}\right) + c_1 H^{(0)}\left(\sigma,\frac{\sigma}{2}\right) + A_\rho\left(\frac{\sigma}{2}\right).
$$

Пусть $\varepsilon = 2^{-p-1}$. Итерируя последнее неравенство j раз, получаем

$$
I_{\rho,\nu}(\sigma) \le 2^{-j} I^{(0)}_{\rho,\nu}\left(\frac{\sigma}{2^j}\right) + c_1 \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(3\tau-\sigma,3\tau)} \left[\left|u_t\right|^p + \sigma^{p-p'}\left|D^2u\right|^p\right] g_\tau(t)\,dx\,dt +
$$
$$
+ \sigma^p g_\tau(\rho) \int\limits_{\Omega_\rho(3\tau)} \left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{p}\left|D^2u\right|^p\right)dx.
$$

Предельный переход при $j \to \infty$ и неравенство (11) приводят к утверждению леммы.

Далее будет использовано интерполяционное неравенство, являющееся частным случаем неравенства Ниренберга – Гальярдо (см., например, [19, с. 67]). Пусть O — шар из R^n с центром в начале координат радиуса τ, $s \ge 1$, $r > 0$. Тогда $W_s^1(O) \cap L_r(O) \subset L_q(O)$ при любом q, удовлетворяющем соотношению

$$
\frac{1}{q} = \theta\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{n}\right) + (1-\theta)\frac{1}{r} \tag{13}
$$

с каким-либо $\theta \in (0,1)$, а также для любой функции $v(x) \in W_s^1(O) \cap L_r(O)$ имеет место неравенство

$$
\|v\|_{L_q(O)} \le D_1(\tau^n)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}\|v\|_{L_r(O)} + D_2\|Dv\|^{\theta}_{L_s(O)}\|v\|^{1-\theta}_{L_r(O)}, \tag{14}
$$

где постоянные $0 < D_1,\ D_2 < \infty$ не зависят от $v(x)$ и от радиуса шара τ.

В частности, если $u(x,t)$ — решение задачи (2) – (4) и $\Omega(\tau) \subset O$, то для функции $u_t(x,t)$ при $r=2,\ q=s=p$ из неравенства (14) следует оценка

$$\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}|u_t|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \le D_1(\tau^n)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}u_t^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} + D_2\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}|Du_t|^p dx\right)^{\frac{\theta}{p}}\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}u_t^2 dx\right)^{\frac{1-\theta}{2}},$$

θ определяется из соотношения (13): $\theta = \dfrac{n(p-2)}{2p+n(p-2)}$.

Возведем обе части последнего неравенства в степень p, умножим на $g_\tau(t)$ и проинтегрируем по t от ρ до ν. Далее для оценки второго слагаемого применим неравенство Юнга с ε и неравенство (9), выбрав в нем $\sigma=\tau$:

$$\iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau)}|u_t|^p g_\tau(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le \left(D_1^p + c_2\,\varepsilon^{\frac{-n(p-2)}{p}}D_2^p\right)\tau^{\frac{-n(p-2)}{2}}\int\limits_\rho^\nu\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}u_t^2\,dx\right)^{\frac{p}{2}} g_\tau(t)\,dt +$$

$$+\ \varepsilon D_1^p\tau^p\iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau,\,\tau+2\sigma)}\left(\tau^{-p}|u_t|^p + \tau^{-p'}\left|D^2u\right|^p\right)g_\tau(t)\,dx\,dt +$$

$$+\ \varepsilon D_1^p g_\tau(\rho)\tau^p\iint\limits_{\Omega_\rho(\tau+2\sigma)}\left(\frac{1}{2}u_t^2 + \frac{1}{p}\left|D^2u\right|^p\right)dx. \qquad (15)$$

Пусть $\sigma=\tau_2-\tau_1$. Обозначим

$$S_\rho(\tau) = \iint\limits_{\Omega_\rho(\tau)}\left(\frac{1}{2}u_t^2+\frac{1}{p}\left|D^2u\right|^p\right)dx,$$

$$F_{\rho,\nu}(\tau_1,\tau_2,s) = \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau_1,\tau_2)}\left(\sigma^{p'}|u_t|^p+\sigma^p\left|D^2u\right|^p\right)g_s(t)\,dx\,dt,$$

$$\tilde F_{\rho,\nu}(\tau_1,\tau_2) = \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau_1,\tau_2)}\left(\sigma^{p'}|u_t|^p+\sigma^p\left|D^2u\right|^p\right)dx\,dt,$$

$$F_{\rho,\nu}(\tau,s) = \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau)}\left(\tau^{p'}|u_t|^p+\tau^p\left|D^2u\right|^p\right)g_s(t)\,dx\,dt, \qquad F_{\rho,\nu}(\tau,\tau) = F_{\rho,\nu}(\tau),$$

$$\tilde F_{\rho,\nu}(\tau) = \iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau)}\left(\tau^{p'}|u_t|^p+\tau^p\left|D^2u\right|^p\right)dx\,dt.$$

Тогда неравенство (15) можно записать в виде

$$\iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau)}|u_t|^p g_\tau(t)\,dx\,dt \le$$

$$\le\ \varepsilon_1 D_1^p\tau^p\left[\tau^{-p-p'}F_{\rho,\nu}(3\tau,\tau)+\frac{1}{2}g_\tau(\rho)S_\rho(3\tau)\right] +$$

$$+\ c_3\left(D_1^p+\varepsilon_1^{\frac{-n(p-2)}{p}}D_2^p\right)\tau^{\frac{-n(p-2)}{2}}\int\limits_\rho^\nu\left(\int\limits_{\Omega(\tau)}u_t^2\,dx\right)^{\frac{p}{2}} g_\tau(t)\,dt. \qquad (16)$$

В следующей лемме доказаны оценки, характеризующие рост интеграла энергии на бесконечности.

Лемма 2. *Для обобщенного решения* $u(x,t)$ *задачи* (2) – (4), $0 \le \rho < \nu \le T$, $\tau > \tau_0 > 0$ *и* $\mu(\tau) > 0$ *имеет место следующее неравенство:*

$$F_{\rho,\nu}(\tau) \le c_4 \left\{ \varepsilon + \frac{1}{\mu^2(\tau)} \left[c_5 \tau^{-\frac{p-2}{2}(n+p+p')-p} \left(\tilde{F}_{0,T}(6\tau) \right)^{\frac{p}{2}-1} + c_6 \tau^{-p'} \right] \right\} \times$$

$$\times \left[F_{\rho,\nu}(3\tau,\tau) + \frac{1}{2} g_\tau(\rho) \tau^{p+p'} S_\rho(3\tau) \right]. \tag{17}$$

Доказательство. Аналогичная оценка в случае параболических уравнений получена в [10]. Воспользуемся предложенной там схемой доказательства. Обозначим

$$\Phi(t,i) = \int_\rho^t \left(\int_{\Omega_t(2\tau)} \left(\frac{1}{2} u_t^2 + \frac{1}{p} \left| D^2 u \right|^p \right) \eta_{\tau,\tau}(x)\, dx \right)^i g_\tau(z)\, dz,$$

возьмем в интегральном тождестве (7) $v(x,t) = u_t(x,t)\,\Phi(t,i)\,\eta_{\tau,\tau}(x)$. Действуя аналогично доказательству леммы 1, получаем равенство

$$\frac{1}{2}\Phi(\nu,i) \int_{\Omega_\nu(2\tau)} \left(u_t^2 + \frac{2}{p} \left| D^2 u \right|^p \right) \eta_{\tau,\tau}(x)\, dx -$$

$$- \frac{1}{2} \iint_{G_{\rho,\nu}(2\tau)} \left(u_t^2 + \frac{2}{p} \left| D^2 u \right|^p \right) \Phi_t(t,i)\, \eta_{\tau,\tau}(x)\, dx\, dt +$$

$$+ \iint_{G_{\rho,\nu}(\tau,2\tau)} \sum_{|\alpha|=2} \left| D^2 u \right|^{p-2} D^\alpha u \sum_{|i|=0}^{1} D^i u_t D^{\alpha-i}\, \eta_{\tau,\tau}(x)\, \Phi(t,i)\, dx\, dt =$$

$$= - \iint_{G_{\rho,\nu}(2\tau)} \sum_{|\alpha|=1} a_\alpha\left(x,t,u_t,D^\alpha u_t\right) \sum_{|i|=0}^{1} D^i u_t D^{\alpha-i}\, \eta_{\tau,\tau}(x)\, \Phi(t,i)\, dx\, dt.$$

Непосредственное вычисление $\left(\Phi(t,i)\right)_t'$, очевидное неравенство $\Phi(t,i) \le \le \Phi(\nu,i)$ при $\rho \le t \le \nu$, условие (6), неравенство (9) с $\mu \equiv 1$ приводят к соотношению

$$\Phi(\nu, i+1) \le c_7\, \Phi(\nu,i) \left[\tau^{-(p+p')} \tilde{F}_{\rho,\nu}(\tau,3\tau) + S_\rho(3\tau) \right]. \tag{18}$$

Чтобы оценить $\Phi\left(\nu, \frac{p}{2}\right)$ с нецелым $\frac{p}{2}$, представим $\Phi\left(\nu, \frac{p}{2}\right)$ с помощью неравенства Гельдера:

$$\Phi\left(\nu, \frac{p}{2}\right) \le \left[\Phi\left(\nu, \left[\frac{p}{2}\right] + 1\right) \right]^\alpha \left[\Phi\left(\nu, \left[\frac{p}{2}\right]\right) \right]^{1-\alpha},$$

где $\left[\frac{p}{2}\right]$ — целая часть $\frac{p}{2}$, $\alpha = \frac{p}{2} - \left[\frac{p}{2}\right]$. Применив к каждому множителю правой части рекуррентное соотношение (18) $\left[\frac{p}{2}\right]$ и $\left[\frac{p}{2}\right] - 1$ раз соответственно, получим

$$\Phi\left(\nu, \frac{p}{2}\right) \le c_8 \left[\tau^{-(p+p')} \tilde{F}_{\rho,\nu}(\tau,3\tau) + S_\rho(3\tau) \right]^{\frac{p}{2}-1} \Phi(\nu,1). \tag{19}$$

Из неравенства (9) следует, что

$$\Phi(\nu, 1) \leq \frac{c_9}{\mu^2(\tau)}\Big(\tau^{-(p+p')}F_{\rho,\nu}(\tau, 3\tau, \tau) + g_\tau(\rho)S_\rho(3\tau)\Big).$$

Для оценки $S_\rho(3\tau)$ используем неравенство (9) на интервале $(0, \rho)$ с $\sigma = \tau$, $\mu(\tau) \equiv 0$ и учтем условия (2):

$$S_\rho(3\tau) \leq \tau^{-(p+p')}\tilde{F}_{0,T}(3\tau, 6\tau).$$

Оценку (19) можно продолжить следующим образом:

$$\Phi\left(\nu, \frac{p}{2}\right) \leq \frac{c_{10}}{\mu^2(\tau)}\tau^{-\frac{p-2}{2}(p+p')}\Big(\tilde{F}_{0,T}(6\tau)\Big)^{\frac{p}{2}-1}\Big(\tau^{-(p+p')}F_{\rho,\nu}(3\tau, \tau) + g_\tau(\rho)S_\rho(3\tau)\Big). \tag{20}$$

Заметим, что $\int\limits_\rho^\nu\left(\int\limits_{\Omega(\tau)} u_t^2\,dx\right)^{\frac{p}{2}} g_\tau(t)\,dt \leq \Phi\left(\nu, \frac{p}{2}\right)$, и применим оценку (20) к правой части неравенства (16):

$$\iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau)} |u_t|^p g_\tau(t)\,dx\,dt \leq$$

$$\leq \left[\varepsilon D_1^p \tau^p + \frac{c_{10}}{\mu^2(\tau)}\left(D_1^p + c_2\varepsilon^{-\frac{n(p-2)}{p}}D_2^p\right)\tau^{-\frac{(p-2)}{p}(n+p+p')}\Big(\tilde{F}_{0,T}(6\tau)\Big)^{\frac{p}{2}-1}\right]\times$$

$$\times\left[\tau^{-(p+p')}F_{\rho,\nu}(3\tau, \tau) + g_\tau(\rho)S_\rho(3\tau)\right]. \tag{21}$$

Из неравенства (9) при $\sigma = \tau$ следует, что

$$\iint\limits_{G_{\rho,\nu}(\tau)} \left|D^2u\right|^p g_\tau(t)\,dx\,dt \leq c_1\frac{1}{\mu^2(\tau)}\left[\tau^{-(p+p')}F_{\rho,\nu}(3\tau, \tau) + g_\tau(\rho)S_\rho(3\tau)\right]. \tag{22}$$

Умножив обе части неравенств (21) и (22) на $\tau^{p'}$ и τ^p соответственно, а затем сложив полученные неравенства, получим утверждение леммы.

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x, t)$ *отлична от тождественной постоянной и удовлетворяет условиям* (9) *и* (17). *Тогда существует последовательность* $\{\tau_i\}$: $\tau_i \to +\infty$ *такая, что*

$$\tilde{F}_{0,T}(\tau_i)\tau_i^{-\gamma_1}h^{-\gamma_2}(\tau_i) \to +\infty \quad \text{при} \quad i \to +\infty, \tag{23}$$

где постоянные γ_1 *и* γ_2 *и функция* $h(\tau)$ *определены в теореме* 1.

Доказательство проведем от противного. Предположим, что для любой последовательности $\{s_i\}$, $i > 0$, и произвольного числа $c_{11} > 0$

$$\tilde{F}_{0,T}(s_i) \leq c_{11}s_i^{\gamma_1}h^{\gamma_2}(s_i). \tag{24}$$

Укажем такую подпоследовательность этой последовательности, что выполнение условия (24) для нее влечет тождество $u(x, t) \equiv \text{const}$ в G. Выберем $\{s_i\}$ так, чтобы $s_{i+1} = 3s_i$. Из условия (24) и оценки (17) для выбранной последовательности $\{s_i\}$ следует неравенство

$$F_{\rho,\nu}(s_i) \leq c_{12}\left[\varepsilon + \frac{1}{\mu^2(s_i)}\Big(h_1(s_i) + s_i^{-p'}\Big)\right]\left[F_{\rho,\nu}(s_{i+1}, s_i) + g_{s_i}(\rho)s_i^{p+p'}S_\rho(s_{i+1})\right].$$

Здесь и далее $h_1(s) = h(6s)$.

В силу монотонного неубывания последовательности $h_1(s_i)$ для всех i, больших некоторого $i_0 > 0$, $s_i^{-p'} < h_1(s_i)$, поэтому $h_1(s_i) + s_i^{-p'} \le c_{13}\, h_1(s_i)$. Тогда из последнего неравенства следует оценка

$$F_{\rho,\nu}(s_i) \;\le\; c_{12}\left[\varepsilon + \frac{1}{\mu^2(s_i)}\, c_{13}\, h_1(s_i)\right]\left[F_{\rho,\nu}(s_{i+1}, s_i) + g_{s_i}(\rho) s_i^{p+p'} S_\rho(s_{i+1})\right]. \qquad (25)$$

Из последовательности $\{s_i\}$ выделим подпоследовательность $\{\tau_j\}$, удовлетворяющую условию

$$\frac{1}{3}\,\tau_j^2 \;<\; \tau_{j+1} \;\le\; \tau_j^2, \quad j = 1, 2, \ldots, \qquad (26)$$

и положим

$$\mu_j^2 \;=\; h_1\big(\tau_{j+1}\big) c_{13} \big(c_{12}\varepsilon\big)^{-1}. \qquad (27)$$

На интервале $\big(\tau_{j-1}, \tau_j\big]$ для всех $j > 1$ функцию $\mu(\tau)$ определим равенством $\mu(\tau) \equiv \mu_{j-1}$.

Пусть $0 < t_j < t_{j-1} \le T$, $j = 1, 2, \ldots$. На интервале $\big(t_j, t_{j-1}\big)$ из неравенства (25) и монотонности функции $h_1(s)$ следует, что

$$F_{t_j, t_{j-1}}(s_k) \;\le\; 2c_{12}\varepsilon\left[F_{t_j, t_{j-1}}(s_{k+1}) + g_{s_k}(t_j) s_k^{p+p'} S_{t_j}(s_{k+1})\right]. \qquad (28)$$

Положим $\varepsilon = \big(2c_{12}\alpha\big)^{-1}$, где $\alpha > 3^{p+p'}$. Проитерируем неравенство (28) по k, начиная с $s_{k_0} = 3\tau_{j-1}$, до τ_j $q = \log_3 \dfrac{\tau_j}{3\tau_{j-1}}$ раз. Для последовательности $\{\tau_j\}$ со свойством (26) и для функции $\mu(\tau)$, определенной равенством (27), выполнена оценка

$$F_{t_j, t_{j-1}}\big(s_{k_0}\big) \;=\; F_{t_j, t_{j-1}}(3\tau_{j-1}) \;\le$$

$$\le\; \alpha^2 \tau_{j-1}^{-\log_3\alpha} F_{t_j, t_{j-1}}(\tau_j) \;+\; \frac{1}{2}\,\frac{3^{p+p'}}{\alpha - 3^{p+p'}}\,\tau_{j-1}^{p+p'} g_{\tau_{j-1}}(t_j) S_{t_j}(\tau_j). \qquad (29)$$

В неравенстве (9) при $\tau = \tau_{j-1}$, $\rho = t_j$, $\nu = t_{j-1}$ правую часть оценим с помощью соотношения (29):

$$g_{\tau_{j-1}}(t_{j-1}) S_{\tau_{j-1}}(\tau_{j-1}) \;\le\; c_1 \tau_{j-1}^{-(p+p')} \alpha^2 \tau_{j-1}^{-\gamma_0} F_{t_j, t_{j-1}}(\tau_j) \;+\; K g_{\tau_{j-1}}(t_j) S_{\tau_j}(\tau_j), \qquad (30)$$

где $K = 1 + \dfrac{3^{p+p'}}{\alpha - 3^{p+p'}}$, $\gamma_0 = \log_3\alpha$.

Обозначим $\delta_j = t_{j-1} - t_j$, $j = 1, 2, \ldots$, $H(j) = c_1 \alpha^2 \tau_{j-1}^{-(p+p')} \exp\big(-\gamma_0 \ln\tau_{j-1} + \mu_{j-1}^2 \delta_{j-1}\big)$, $L_j = K \exp\big(\mu_{j-1}^2 \delta_{j-1}\big)$. Выберем последовательность $\{t_j\}$ следующим образом:

$$\delta_j \;=\; \gamma_0 (1 - \beta) \mu_j^{-2} \ln\tau_j, \qquad (31)$$

параметры $\beta < 1$ и $\gamma_0 > 0$ определим далее. Для таких t_j $H(j) = c_1 \alpha^2 \tau_{j-1}^{-(p+p')-\beta\gamma_0}$, $L_j = K \tau_{j-1}^{\gamma_0(1-\beta)}$. Из соотношения (30) следует, что

$$S_{t_{j-1}}(\tau_{j-1}) \;\le\; H(j) \tilde{F}_{t_j, t_{j-1}}(\tau_j) \;+\; L(j) S_{t_j}(\tau_j). \qquad (32)$$

Для значений t_j, τ_j и $\mu(\tau)$, удовлетворяющих условиям (31), (26) и (27) соответственно, выполнено неравенство

$$\delta_{j-1} \geq \frac{(1-\beta)\gamma_0}{c_{14}} \int\limits_{6\tau_j}^{6\tau_{j+1}} \frac{dz}{zh(z)},$$

причем из условий i), ii) следует, что для произвольного $\bar{t}$ из интервала $(0, T)$ существует такое $E = E(\bar{t}, \tau_0)$, что $\sum_{i=1}^{E-1}\delta_i > \bar{t}$, $\sum_{i=1}^{E}\delta_i < \bar{t}$, и $S_{t_E}(\tau_E) = 0$. С учетом этого проитерируем неравенство (32) по j E раз:

$$S_{t_0}(\tau_0) \leq H(1)\tilde{F}_{t_1,t_0}(\tau_1) + \sum_{i=2}^{E} H(i)\prod_{j=1}^{j-1} L(j)\tilde{F}_{t_i,t_{i-1}}(\tau_i). \tag{33}$$

Поскольку согласно (26) $\tau_0\,\tau_1\ldots\tau_{i-1} \leq 3^{i-1}\tau_0^{-1}\tau_{i-1}^2$, то

$$\sum_{i=2}^{E} H(i)\prod_{j=1}^{i-1} L(j) = c_1\alpha^2\tau_{j-1}^{-(p+p')-\beta\gamma_0}\,K^{i-1}\left(\tau_0\,\tau_1\ldots\tau_{i-1}\right)^{\gamma_0(1-\beta)} \leq$$

$$\leq c_1\alpha^2 K^{i-1} 3^{\gamma_0(i-1)(1-\beta)}\,\tau_0^{-\gamma_0(1-\beta)}\,\tau_{i-1}^{-(p+p')+2\gamma_0(1-2\beta)}. \tag{34}$$

Выберем β так, чтобы $2\beta - 1 = \beta_1 > 1$. Обозначим $c_0(i) = c_1\alpha^2 K^{i-1} \times 3^{\gamma_0(i-1)(1-\beta)}\,\tau_{i-1}^{-(p+p')}$. Заметим, что $H(1) = c_1\alpha^2\,\tau_0^{-(p+p')-\beta\gamma_0}$, $c_0(1) = c_1\alpha^2\,\tau_0^{-(p+p')}$. Тогда из неравенств (32), (34) и предположения (24) следует оценка сверху функции $S_{t_0}(\tau_0)$:

$$S_{t_0}(\tau_0) \leq \sum_{i=1}^{E} c_0(i)\tau_0^{-\gamma_0(1-\beta)}\tau_{i-1}^{-2\beta_1\gamma_0}\tilde{F}_{t_i,t_{i-1}}(\tau_i) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{E} c_0(i)\tau_0^{-\gamma_0(1-\beta)}\tau_{i-1}^{-2\beta_1\gamma_0}\tau_i^{\gamma_1}h^{\gamma_2}(\tau_i).$$

Для последовательности τ_i и функции $h(\tau)$, удовлетворяющих условиям (26) и ii) соответственно, из последнего неравенства следует, что

$$S_{t_0}(\tau_0) \leq \sum_{i=1}^{E} c_0(i)\tau_0^{-\gamma_0(1-\beta)}\tau_i^{-\beta_1\gamma_0+\gamma+\frac{2\varphi}{p-2}}. \tag{35}$$

Выберем параметр γ_0 так, чтобы

$$-\beta_1\gamma_0 + \gamma + \frac{2\varphi}{p-2} < \beta_2 < 0. \tag{36}$$

Коэффициенты $c_0(i)$ равномерно ограничены относительно i и τ_0 некоторой константой $d_0 > 0$, поэтому в силу условия (36) неравенство (35) выполнено, если $S_{t_0}(\tau_0) \leq d_0\tau_0^{-\gamma_0(1-\beta)}\sum_{i=1}^{\infty}\tau_i^{\beta_2}$. Ряд $\sum_{i=1}^{\infty}\tau_i^{\beta_2}$ сходится, а значит, при $\tau_0 \to \infty$ $S_{t_0}(\tau_0) \to 0$. В силу произвольности $t_0 > 0$ и возможности выбора сколь угодно большого τ_0 следует, что $u(x, t) \equiv \mathrm{const}$ в G.

Лемма доказана.

Для завершения доказательства теоремы заметим, что если выбирать подходящим образом срезающую функцию $\eta_{\tau,\sigma}(x)$ в определении пробной функции $\nu(x, t)$, то все утверждения лемм 1 – 3 будут справедливы для произвольной последовательности $\{s_i\}$: $s_{i+1} = ks_i$, $k \in (1, \infty)$. Это замечание и условия (3) и доказывают теорему.

Замечание 2. Утверждение теоремы и доказательство с соответствующими изменениями остаются справедливыми для уравнения (2) с оператором $B = \sum_{|\alpha|=2} D^\alpha \left(\left| D^\alpha \right|^{p-2} D^\alpha \right)$.

Замечание 3. Схема, предложенная выше, позволяет определить классы растущих на бесконечности решений смешанной задачи для уравнения (1) с операторами A и B порядков $2m$ и $2l \le 2m+2$ соответственно, имеющих структуру, аналогичную рассмотренной в теореме.

1. *Lax P. D.* Phragman – Lindelef theorem in harmonic analysis and its application in the theory of elliptic equations // Communs Pure and Appl. Math. – 1957. – **10**, № 3. – P. 361 – 389.
2. *Ландис Е. М.* О поведении решений эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1974. – **31**. – С. 35 – 58.
3. *Kalantarov V. K., Tahamtani F.* Phragmen – Lindelöf principle for a class of fourth order nonlinear elliptic equations // Bull. Iran. Math. Soc. – 1994. – **20**, № 2. – P. 41 – 52.
4. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А.* Аналог принципа Сен-Венана и единственность решений краевых задач в неограниченных областях для параболических уравнений // Успехи мат. наук. – 1976. – **31**, № 6. – С. 142 – 166.
5. *Калантаров В. К.* Об оценках решений квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 8. – С. 1200 – 1210.
6. *Шишков А. Е.* Принцип Фрагмена – Линделефа для дивергентных параболических уравнений // Сиб. мат. журн. – 1989. – **30**, № 2. – С. 203 – 212.
7. *Глаголева Р. Я.* Теоремы Фрагмена – Линделефа и лиувиллевы теоремы для линейного параболического уравнения // Мат. заметки. – 1985. – № 1. – С. 119 – 124.
8. *Калашников А. С.* О задаче Коши в классах растущих функций для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1973. – **9**, № 4. – С. 682 – 691.
9. *Lin C., Payne L. E.* Phragmen – Lindelöf type results for second order quasilinear parabolic equations in $\mathbb{R}^2$ // Z. angew. Math. und Phys. – 1994. – **45**. – P. 294 – 311.
10. *Акулов В. Ф., Шишков А. Е.* Об асимптотических свойствах решений смешанных задач для квазилинейных параболических уравнений в неограниченных областях // Мат. сб. – 1991. – **182**, № 8. – С. 1200 – 1210.
11. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. – 1987. – **33**, № 5. – С. 7 – 76.
12. *Вишик М. И.* Задача Коши для уравнений с операторными коэффициентами, смешанная краевая задача для систем дифференциальных уравнений и приближенный метод их решения // Мат. сб. – 1956. – **39**, № 1. – С. 51 – 148.
13. *Ладыженская О. А.* О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Мат. сб. – 1958. – **46**, № 2. – С. 123 – 158.
14. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972. – 587 с.
15. *Сувейка И. В.* Смешанные задачи для уравнения распространения возмущений в вязких средах // Дифференц. уравнения. – 1983. – **19**, № 2. – С. 337 – 347.
16. *Шишков А. Е., Слепцова И. П.* Классы единственности и разрешимости смешанных задач для некоторых эволюционных уравнений в неограниченных областях // Сиб. мат. журн. – 1991. – **32**, № 5. – С. 166 – 178.
17. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 736 с.
18. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
19. *Мазья В. Г.* Пространства Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 415 с.

Получено 03.11.2003,
после доработки — 09.08.2004