УДК 517.5

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛОВ С КУСОЧНО-НЕПРЕРЫВНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ И ГРАНИЧНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ПРОИЗВОДНЫХ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ

We establish sufficient conditions of the differentiability of the Cauchy singular integral with piecewise continuous density. We obtain formulas for n order derivatives of the Cauchy singular integral and for boundary values of n order derivatives of the Cauchy-type integral.

Встановлено достатні умови для диференційовності сингулярного інтеграла Коші з кусково-неперервною щільністю. Одержано формули для похідних порядку n сингулярного інтеграла Коші та для граничних значень похідних порядку n інтеграла типу Коші.

В монографии [1] установлено существование предельных значений n-й производной интеграла типа Коши на замкнутом гладком контуре интегрирования при условии, что плотность интеграла имеет гельдеровскую контурную производную того же порядка. Обобщения этого результата на более широкие классы контуров и плотностей интеграла приведены в работах [2, 3].

Теорема 1 данной работы содержит достаточные условия дифференцируемости сингулярного интеграла с непрерывной плотностью, контурная производная которой допускает разрывы в двух точках. На основе этого результата в теоремах 2 – 4 устанавливаются формулы для n-й производной сингулярного интеграла Коши с различным числом разрывов у плотности интеграла. Через производные сингулярного интеграла Коши выражаются граничные значения n-й производной интеграла типа Коши, формулы для которых при различном числе разрывов у плотности интеграла устанавливаются в теоремах 5 – 7.

1. Производные сингулярного интеграла Коши с двумя разрывами у плотности интеграла. Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, а b_1 и b_2 — фиксированные точки кривой γ. При $j = 1, 2$ и $0 < \varepsilon < |b_1 - b_2|/2$ обозначим через $\gamma_{\varepsilon,j}$ связную компоненту множества $\left\{t \in \gamma : \left|t - b_j\right| \le \varepsilon\right\}$, содержащую точку b_j. Введем также в рассмотрение связные компоненты γ^1 и γ^2 множества $\gamma \setminus (\gamma_{\varepsilon,1} \cup \gamma_{\varepsilon,2})$, при этом условимся, что при заданной ориентации кривой γ точки множества γ_1 следуют за точкой b_1 и предшествуют точке b_2. При $m = 1, 2$ и $j = 1, 2$ обозначим через $\xi_{m,j}$ общую точку множеств $\overline{\gamma^m}$ и $\gamma_{\varepsilon,j}$.

В следующей теореме приведены условия, достаточные для дифференцируемости на $\gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ сингулярного интеграла Коши

$$(Sf)(\xi) := \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(t)}{t-\xi}\,dt \equiv \frac{1}{\pi i}\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\{t \in \gamma : |t-\xi| \ge \varepsilon\}} \frac{f(t)}{t-\xi}\,dt, \quad \xi \in \gamma, \tag{1}$$

плотность которого f имеет контурную производную f', допускающую разрывы в точках b_1 и b_2.

Теорема 1. *Пусть связные компоненты множества* $\gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ *являются гладкими кривыми, а функция* f *дифференцируема на* $\gamma \setminus \{b_1, b_2\}$, *непрерывна в точках* b_1 *и* b_2 *и, кроме того, ее производная при любом* $\xi_0 \in \gamma \setminus \{b_1, b_2\}$ *удовлетворяет условию*

$$(f'(\xi) - f'(\xi_0)) \ln(\xi - \xi_0) \to 0, \quad \xi \to \xi_0. \tag{2}$$

Тогда справедливо равенство

$$\frac{d}{d\xi}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{t-\xi}dt = \int_{\gamma}\frac{f'(t)}{t-\xi}dt \quad \forall\xi\in\gamma\setminus\{b_1,b_2\} \tag{3}$$

при условии, что сингулярный интеграл в правой части равенства существует.

Доказательство. Пусть ξ — фиксированная точка множества $\gamma\setminus\{b_1,b_2\}$ и ε — фиксированное положительное число, удовлетворяющее неравенству

$$\varepsilon < \frac{1}{2}\min\{|\xi-b_1|,|\xi-b_2|,|b_1-b_2|\}.$$

Используя теорему из [1, с. 32], при любом $\zeta\in\gamma$, удовлетворяющем неравенству $|\zeta-\xi|<\varepsilon$, получаем равенства

$$\int_{\gamma}\frac{f(t)}{t-\zeta}dt = \left(\int_{\gamma_{\varepsilon,1}}+\int_{\gamma^1}+\int_{\gamma_{\varepsilon,2}}+\int_{\gamma^2}\right)\frac{f(t)}{t-\zeta}dt = \left(\int_{\gamma_{\varepsilon,1}}+\int_{\gamma_{\varepsilon,2}}\right)\frac{f(t)}{t-\zeta}dt +$$
$$+\ \pi i f(\zeta) + f(\xi_{1,2})\ln(\xi_{1,2}-\zeta) - f(\xi_{1,1})\ln(\xi_{1,1}-\zeta) +$$
$$+\ f(\xi_{2,1})\ln(\xi_{2,1}-\zeta) - f(\xi_{2,2})\ln(\xi_{2,2}-\zeta) - \left(\int_{\gamma^1}+\int_{\gamma^2}\right)f'(t)\ln(t-\zeta)\,dt.$$

Так же, как и в монографии [1, с. 43], дифференцируя полученное равенство по ζ и учитывая при этом условие (2), а затем полагая $\zeta=\xi$, имеем

$$\left.\left(\frac{d}{d\zeta}\int_{\gamma}\frac{f(t)}{t-\zeta}dt\right)\right|_{\zeta=\xi} = \left(\int_{\gamma_{\varepsilon,1}}+\int_{\gamma_{\varepsilon,2}}\right)\frac{f(t)}{(t-\xi)^2}dt + \pi i f'(\xi) +$$
$$+\ \frac{f(\xi_{1,2})}{\xi-\xi_{1,2}} - \frac{f(\xi_{1,1})}{\xi-\xi_{1,1}} + \frac{f(\xi_{2,1})}{\xi-\xi_{2,1}} - \frac{f(\xi_{2,2})}{\xi-\xi_{2,2}} + \left(\int_{\gamma^1}+\int_{\gamma^2}\right)\frac{f'(t)}{t-\xi}dt - \pi i f'(\xi).$$

Теперь, переходя к пределу при $\varepsilon\to 0$, получаем равенство (3).

Теорема доказана.

Введем в рассмотрение модуль непрерывности функции g, непрерывной на кривой γ:

$$\omega_\gamma(g,\varepsilon) := \sup_{t_1,t_2\in\gamma,\,|t_1-t_2|\le\varepsilon}|g(t_1)-g(t_2)|.$$

Обозначим через $\mathcal{D}_0(b_1,b_2)$ класс непрерывных на γ функций g, для которых выполняются равенства $g(b_1)=g(b_2)=0$ и модули непрерывности удовлетворяют условию Дини

$$\int_0^1\frac{\omega_\gamma(g,\eta)}{\eta}d\eta < \infty. \tag{4}$$

В следующей теореме приведены условия, достаточные для существования на $\gamma\setminus\{b_1,b_2\}$ контурных производных порядка n у сингулярного интеграла Коши в случае, когда его плотность допускает разрывы в точках b_1 и b_2.

Теорема 2. *Пусть связные компоненты множества $\gamma\setminus\{b_1,b_2\}$ являются гладкими кривыми и γ удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\{t\in\gamma:\, \min\{|t-b_1|,\,|t-b_2|\}\le\varepsilon\}} |dt| \;=\; O(\varepsilon), \qquad \varepsilon\to 0, \tag{5}$$

а функция f *имеет на* $\gamma\setminus\{b_1, b_2\}$ *контурные производные до порядка* n *такие, что функции*

$$\hat f_k(t) \;:=\; [(t-b_1)(t-b_2)]^{k+1} f^{(k)}(t), \quad k = 0, 1, \ldots, n,$$

принадлежат классу $\mathcal{D}_0(b_1, b_2)$. *Тогда сингулярный интеграл* (1) *имеет на* $\gamma\setminus\{b_1, b_2\}$ *контурные производные до порядка* n *и справедливы формулы*

$$(Sf)^{(k)}(\xi) \;=\; \frac{1}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^k}\int\limits_\gamma \frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^k f^{(k)}(t)}{t-\xi}\,dt \;+$$

$$+\;\frac{1}{\pi i}\sum_{j=1}^{k} A_{k-j+1}^{(j-1)}(\xi)\int\limits_\gamma [(t-b_1)(t-b_2)]^{k-j} f^{(k-j)}(t)\,dt \qquad \forall\,\xi\in\gamma\setminus\{b_1, b_2\}, \tag{6}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$A_k(\xi) \;:=\; \frac{2k-1}{[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^k}.$$

Доказательство. При $\xi\in\gamma\setminus\{b_1, b_2\}$ представим интеграл (1) в виде

$$(Sf)(\xi) \;=\; \frac{1}{\pi i(\xi-b_1)(\xi-b_2)}\int\limits_\gamma \frac{(t-b_1)(t-b_2)f(t)}{t-\xi}\,dt \;+$$

$$+\;\frac{b_1+b_2-\xi}{\pi i(\xi-b_1)(\xi-b_2)}\int\limits_\gamma f(t)\,dt \;-\; \frac{1}{\pi i(\xi-b_1)(\xi-b_2)}\int\limits_\gamma t\,f(t)\,dt,$$

где существование интегралов обеспечивается условием (5) и тем, что $\hat f_0 \in \mathcal{D}_0(b_1, b_2)$.

Теперь, используя теорему 1, находим производную сингулярного интеграла (1) при $\xi\in\gamma\setminus\{b_1, b_2\}$:

$$(Sf)'(\xi) \;=\; -\,\frac{2\xi-b_1-b_2}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^2}\int\limits_\gamma \frac{(t-b_1)(t-b_2)f(t)}{t-\xi}\,dt \;+$$

$$+\;\frac{1}{\pi i(\xi-b_1)(\xi-b_2)}\int\limits_\gamma \frac{(2t-b_1-b_2)f(t)}{t-\xi}\,dt \;+$$

$$+\;\frac{1}{\pi i(\xi-b_1)(\xi-b_2)}\int\limits_\gamma \frac{(t-b_1)(t-b_2)f'(t)}{t-\xi}\,dt \;+$$

$$+\;\frac{\xi^2-2(b_1+b_2)\xi+b_1^2+b_2^2+b_1b_2}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^2}\int\limits_\gamma f(t)\,dt \;+\; \frac{2\xi-b_1-b_2}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^2}\int\limits_\gamma t\,f(t)\,dt \;=:$$

$$=:\; I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5. \tag{7}$$

При этом, преобразуя сумму интегралов I_1 и I_2 к виду

$$I_1 + I_2 = \frac{(b_1+b_2)\xi - b_1^2 - b_2^2}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^2}\int_\gamma f(t)\,dt - \frac{2\xi - b_1 - b_2}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^2}\int_\gamma t\,f(t)\,dt$$

и подставляя полученное выражение в равенство (7), после приведения подобных слагаемых устанавливаем справедливость формулы (6) в случае $k = 1$.

Далее, предположив справедливость формулы (6) при $k = 1, 2, \ldots, m < n$, докажем ее справедливость при $k = m+1$. С этой целью представим сингулярный интеграл, входящий в равенство (6), в виде суммы интегралов:

$$\frac{1}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^m}\int_\gamma \frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)}{t-\xi}dt =$$

$$= \frac{1}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+1}}\int_\gamma \frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^{m+1} f^{(m)}(t)}{t-\xi}dt +$$

$$+ \frac{b_1+b_2-\xi}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+1}}\int_\gamma [(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)\,dt -$$

$$- \frac{1}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+1}}\int_\gamma t[(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)\,dt,$$

существование которых обеспечивается условием (5) и тем, что $\hat{f}_m \in \mathcal{D}_0(b_1, b_2)$.

Теперь, использовав теорему 1, продифференцируем равенство (6), положив при этом $k = m$:

$$(Sf)^{(m+1)}(\xi) = -\frac{(m+1)(2\xi-b_1-b_2)}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+2}}\int_\gamma \frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^{m+1} f^{(m)}(t)}{t-\xi}dt +$$

$$+ \frac{m+1}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+1}}\int_\gamma \frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^m (2t-b_1-b_2) f^{(m)}(t)}{t-\xi}dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+1}}\int_\gamma \frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^{m+1} f^{(m+1)}(t)}{t-\xi}dt +$$

$$+ \frac{(2m+1)\xi^2 - (3m+2)(b_1+b_2)\xi + (m+1)(b_1^2+b_2^2) + (2m+1)b_1 b_2}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+2}} \times$$

$$\times \int_\gamma [(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)\,dt +$$

$$+ \frac{(m+1)(2\xi-b_1-b_2)}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+2}}\int_\gamma t[(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\sum_{j=1}^{m} A_{m-j+1}^{(j)}(\xi)\int_\gamma [(t-b_1)(t-b_2)]^{m-j} f^{(m-j)}(t)\,dt =:$$

$$=: I_1^* + I_2^* + I_3^* + I_4^* + I_5^* + \Sigma. \tag{8}$$

Наконец, преобразуя сумму интегралов I_1^* и I_2^* к виду

$$I_1^* + I_2^* = \frac{(m+1)((b_1+b_2)\xi - b_1^2 - b_2^2)}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+2}} \int_\gamma [(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)\,dt -$$

$$- \frac{(m+1)(2\xi - b_1 - b_2)}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+2}} \int_\gamma t[(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)\,dt$$

и подставляя полученное выражение в равенство (8), после приведения подобных слагаемых имеем

$$(Sf)^{(m+1)}(\xi) = I_3^* + \frac{1}{\pi i} A_{m+1}(\xi) \int_\gamma [(t-b_1)(t-b_2)]^m f^{(m)}(t)\,dt + \Sigma =$$

$$= \frac{1}{\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^{m+1}} \int_\gamma \frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^{m+1} f^{(m+1)}(t)}{t-\xi}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi i} \sum_{j=1}^{m+1} A_{m-j+2}^{(j-1)}(\xi) \int_\gamma [(t-b_1)(t-b_2)]^{m+1-j} f^{(m+1-j)}(t)\,dt.$$

Таким образом, получена формула (6) при $k = m+1$ и теорема доказана.

2. Производные сингулярного интеграла Коши с конечным числом разрывов у плотности интеграла. Пусть теперь на кривой γ зафиксированы точки $b_1, b_2, \ldots, b_m$ и $m \ge 1$.

Обозначим через $\mathcal{D}_0(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ класс непрерывных на γ функций g, для которых выполняются равенства $g(b_1) = g(b_2) = \ldots = g(b_m) = 0$ и модули непрерывности удовлетворяют условию Дини (4).

В случае, когда плотность f сингулярного интеграла (1) имеет единственную точку разрыва b_1, формулы для его производных устанавливаются в следующей теореме (доказывается аналогично теореме 2).

Теорема 3. *Пусть* $\gamma \setminus \{b_1\}$ *является гладкой кривой и выполняется условие*

$$\int_{\{t\in\gamma:\,|t-b_1|\le\varepsilon\}} |dt| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon \to 0,$$

а функция f *имеет на* $\gamma \setminus \{b_1\}$ *контурные производные до порядка* n *такие, что функции* $(t-b_1)^{k+1} f^{(k)}(t)$ *при* $k = 0, 1, \ldots, n$ *принадлежат классу* $\mathcal{D}_0(b_1)$. *Тогда сингулярный интеграл* (1) *имеет на* $\gamma \setminus \{b_1\}$ *контурные производные до порядка* n *и справедливы формулы*

$$(Sf)^{(k)}(\xi) = \frac{1}{\pi i(\xi-b_1)^k} \int_\gamma \frac{(t-b_1)^k f^{(k)}(t)}{t-\xi}\,dt \quad \forall \xi \in \gamma\setminus\{b_1\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Условимся, что при $m \ge 2$ точки $b_1, b_2, \ldots, b_m$ кривой γ занумерованы в том порядке, в каком они встречаются при положительном обходе γ, начиная от некоторой из них, обозначенной через b_1. При $s = 1, 2, \ldots, m-1$ обозначим через γ_s дугу кривой γ с началом в точке b_s и концом в точке b_{s+1}. Введем также в рассмотрение дугу γ_m кривой γ с началом в точке b_m и концом в точке $b_{m+1} := b_1$.

Обобщением теоремы 2 на случай m точек разрыва у плотности f сингулярного интеграла (1) является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть связные компоненты множества* $\gamma \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ *явля-*

ются гладкими кривыми и γ *удовлетворяет условию*

$$\int\limits_{\{t\in\gamma:\,\min\{|t-b_1|,|t-b_2|,\ldots,|t-b_m|\}\le\varepsilon\}} |dt| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0,$$

а функция f *имеет на* $\gamma\setminus\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ *контурные производные до порядка* n *такие, что функции* $[(t-b_1)(t-b_2)\ldots(t-b_m)]^{k+1}f^{(k)}(t)$ *при* $k=0,1,\ldots,n$ *принадлежат классу* $\mathcal{D}_0(b_1,b_2,\ldots,b_m)$. *Тогда сингулярный интеграл* (1) *имеет на* $\gamma\setminus\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ *контурные производные до порядка* n *и справедливы формулы*

$$(Sf)^{(k)}(\xi) = \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{\pi i[(\xi-b_s)(\xi-b_{s+1})]^k}\int\limits_{\gamma_s}\frac{[(t-b_s)(t-b_{s+1})]^k f^{(k)}(t)}{t-\xi}dt +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\sum_{s=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}A_{s,k-j+1}^{(j-1)}(\xi)\int\limits_{\gamma_s}[(t-b_s)(t-b_{s+1})]^{k-j}f^{(k-j)}(t)\,dt$$

$$\forall\,\xi\in\gamma\setminus\{b_1,b_2,\ldots,b_m\},\quad k=1,2,\ldots,n,$$

где

$$A_{s,k}(\xi) := \frac{2k-1}{[(\xi-b_s)(\xi-b_{s+1})]^k}.$$

Доказательство. Введем в рассмотрение функции

$$f_s(t) := \begin{cases} f(t) & \text{при} \quad t\in\gamma_s\setminus\{b_1,b_2,\ldots,b_m\},\\ 0 & \text{при} \quad t\in\gamma\setminus\gamma_s\end{cases} \tag{9}$$

и представим интеграл (1) в виде суммы сингулярных интегралов, плотности которых имеют только две точки разрыва:

$$(Sf)(\xi) = \sum_{s=1}^{m}\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f_s(t)}{t-\xi}dt.$$

Теперь доказательство завершается применением к каждому из слагаемых суммы теоремы 2.

3. Формулы предельных значений производных интеграла типа Коши с кусочно-непрерывной плотностью. Установим теперь формулы предельных значений на $\gamma\setminus\{b_1,b_2,\ldots,b_m\}$ производной n-го порядка интеграла типа Коши

$$\tilde f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{f(t)}{t-z}dt, \quad z\in\mathbb{C}\setminus\gamma, \tag{10}$$

плотность которого f допускает разрывы в точках $b_1,b_2,\ldots,b_m$, где $m\ge 1$. При этом предельные значения производной $\tilde f^{(n)}$ слева и справа от γ обозначим соответственно через $(\tilde f^{(n)})^+$ и $(\tilde f^{(n)})^-$.

Прежде всего отметим, что если γ — такая кривая, как и в теореме 4, то для любой функции $g\in\mathcal{D}_0(b_1,b_2,\ldots,b_m)$ справедливо равенство

$$\frac{d}{dz}\int\limits_{\gamma}\frac{g(t)}{t-z}dt = \int\limits_{\gamma}\frac{g'(t)}{t-z}dt \quad \forall\,z\in\mathbb{C}\setminus\gamma, \tag{11}$$

которое устанавливается аналогично равенству (3).

Рассмотрим сначала случай двух точек разрыва у плотности f интеграла (10).

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы* 2. *Тогда производная n-го порядка интеграла* (10) *имеет на* $\gamma\setminus\{b_1, b_2\}$ *предельные значения* $(\tilde{f}^{(n)})^+$ *и* $(\tilde{f}^{(n)})^-$, *которые выражаются формулой*

$$(\tilde{f}^{(n)})^{\pm}(\xi) = \pm\frac{1}{2}f^{(n)}(\xi) + \frac{1}{2\pi i[(\xi-b_1)(\xi-b_2)]^n}\int\limits_{\gamma}\frac{[(t-b_1)(\xi-b_2)]^n f^{(n)}(t)}{t-\xi}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}A_{n-j+1}^{(j-1)}(\xi)\int\limits_{\gamma}[(t-b_1)(t-b_2)]^{n-j}f^{(n-j)}(t)\,dt \qquad \forall\xi\in\gamma\setminus\{b_1, b_2\},$$

где функции A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *определены в теореме* 2.

Доказательство. Представим интеграл (10) в виде

$$\tilde{f}(z) = \frac{1}{2\pi i(z-b_1)(z-b_2)}\int\limits_{\gamma}\frac{(t-b_1)(t-b_2)f(t)}{t-z}dt +$$

$$+ \frac{b_1+b_2-z}{2\pi i(z-b_1)(z-b_2)}\int\limits_{\gamma}f(t)\,dt - \frac{1}{2\pi i(z-b_1)(z-b_2)}\int\limits_{\gamma}t\,f(t)\,dt$$

и, используя равенство (11), по схеме доказательства теоремы 2 при любом $z\in$ $\in\mathbb{C}\setminus\gamma$ получим равенство

$$\tilde{f}^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i[(z-b_1)(z-b_2)]^n}\int\limits_{\gamma}\frac{[(t-b_1)(t-b_2)]^n f^{(n)}(t)}{t-z}dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n}A_{n-j+1}^{(j-1)}(z)\int\limits_{\gamma}[(t-b_1)(t-b_2)]^{n-j}f^{(n-j)}(t)\,dt. \tag{12}$$

Предельные значения на $\gamma\setminus\{b_1, b_2\}$ первого интеграла из правой части равенства (12) слева и справа от γ выражаются формулами Сохоцкого. Их справедливость при $\hat{f}_n\in\mathcal{D}_0(b_1, b_2)$ и условии (5) следует из теорем 2 и 3 работы [4]. Теперь утверждение теоремы следует из указанных формул и того, что при $k = 1, 2, \ldots, n$ функции A_k и их производные непрерывны на $\gamma\setminus\{b_1, b_2\}$.

В случае, когда плотность f интеграла (10) имеет единственную точку разрыва b_1, справедлива следующая теорема (доказывается аналогично теореме 5).

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы* 3. *Тогда производная n-го порядка интеграла* (10) *имеет на* $\gamma\setminus\{b_1\}$ *предельные значения* $(\tilde{f}^{(n)})^+$ *и* $(\tilde{f}^{(n)})^-$, *которые выражаются формулой*

$$(\tilde{f}^{(n)})^{\pm}(\xi) = \pm\frac{1}{2}f^{(n)}(\xi) + \frac{1}{2\pi i(\xi-b_1)^n}\int\limits_{\gamma}\frac{(t-b_1)^n f^{(n)}(t)}{t-\xi}dt \qquad \forall\xi\in\gamma\setminus\{b_1\}.$$

Наконец, в случае, когда плотность f интеграла (10) имеет m точек разрыва и $m > 2$, представляя интеграл (10) в виде суммы

$$\tilde{f}(z) = \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_s(t)}{t-z}\, dt,$$

где функции f_s определены равенствами (9), а затем применяя к каждому из слагаемых суммы теорему 5, приходим к следующему утверждению.

Теорема 7. *Пусть выполняются условия теоремы* 4. *Тогда производная n-го порядка интеграла* (10) *имеет на* $\gamma \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ *предельные значения* $(\tilde{f}^{(n)})^+$ *и* $(\tilde{f}^{(n)})^-$, *которые выражаются формулой*

$$(\tilde{f}^{(n)})^{\pm}(\xi) = \pm \frac{1}{2} f^{(n)}(\xi) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{m} \frac{1}{2\pi i [(\xi - b_s)(\xi - b_{s+1})]^n} \int_{\gamma_s} \frac{[(t-b_s)(t-b_{s+1})]^n f^{(n)}(t)}{t-\xi}\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} A_{s,n-j+1}^{(j-1)}(\xi) \int_{\gamma_s} [(t-b_s)(t-b_{s+1})]^{n-j} f^{(n-j)}(t)\, dt$$

$$\forall \xi \in \gamma \setminus \{b_1, b_2, \ldots, b_m\},$$

где функции $A_{s,k}$, $s = 1, 2, \ldots, m$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *определены в теореме* 4.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Тамразов П. М.* Гладкости и полиномиальные приближения. – Киев: Наук. думка, 1975. – 272 с.
3. *Герус О. Ф.* О модуле непрерывности телесных производных интеграла типа Коши // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 4. – С. 476–484.
4. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с осциллирующим свободным членом и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 70–80.

Получено 04.12.2003