УДК 517.983.27

А. Г. Мазко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УСТОЙЧИВОСТЬ И СРАВНЕНИЕ СОСТОЯНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ ОТНОСИТЕЛЬНО ПЕРЕМЕННОГО КОНУСА*

We investigate classes of dynamical systems in a partially ordered space with properties of monotonicity type with respect to specified cones. We suggest new methods of the stability analysis and comparison of solutions of differential systems by means of time-varying cones. To illustrate the results obtained, we present examples using typical cones in the vector and matrix spaces.

Досліджуються класи динамічних систем у напівупорядкованому просторі, що мають властивості типу монотонності відносно заданих конусів. Пропонуються нові методи аналізу стійкості і порівняння розв'язків диференціальних систем за допомогою змінних конусів. Для ілюстрації результатів наводяться приклади з використанням типових конусів у просторах векторів та матриць.

0. Введение. Динамическая система, в фазовом пространстве которой существует инвариантный конус, позитивна относительно данного конуса. Например, множество неотрицательно определенных матриц является инвариантным конусом дифференциальных уравнений Ляпунова и Риккати. Свойство позитивности (монотонности) динамической системы равносильно положительности (монотонности) некоторого оператора, описывающего ее движение, по отношению к заданным конусам в фазовом пространстве [1 – 4].

Позитивные и монотонные системы используются в различных задачах анализа и синтеза (см., например, [5 – 10]). В частности, такие системы возникают в результате применения методов векторных, матричных и конусозначных функций Ляпунова к исследованию устойчивости движения. Методы сравнения систем относительно конусов являются развитием метода функций Ляпунова и успешно применяются при исследовании устойчивости решений широких классов дифференциальных и разностных систем. В результате изучение сложных (крупномасштабных) моделей сводится к анализу более простых классов систем, имеющих свойства типа позитивности или монотонности. Исследование устойчивости класса линейных позитивных систем сводится к решению алгебраических уравнений и неравенств, определяемых операторными коэффициентами данных систем [10 – 14].

В настоящей работе изучаются свойства позитивных и монотонных динамических систем относительно постоянных и переменных конусов. Приводится обобщенный принцип сравнения систем и условия робастной устойчивости семейства систем. Полученные утверждения развивают и обобщают основные результаты работы [4] с использованием переменного конуса.

Приведем некоторые определения и факты из теории конусов и операторов в полуупорядоченном пространстве. Выпуклое замкнутое множество $\mathcal{K}$ вещественного нормированного пространства $\mathcal{E}$ называется клином, если $\alpha\mathcal{K}+\beta\mathcal{K}\subset\subset\mathcal{K}$ $\forall\,\alpha,\beta\geq 0$. Клин $\mathcal{K}$ с лезвием $\mathcal{K}\bigcap -\mathcal{K}=\{0\}$ является конусом. Сопряженный конус $\mathcal{K}^*$ состоит из линейных функционалов $\varphi\in\mathcal{E}^*$, принимающих неотрицательные значения на элементах $\mathcal{K}$, причем $\mathcal{K}=\{X\in\mathcal{E}:\varphi(X)\geq 0$ $\forall\,\varphi\in\mathcal{K}^*\}$. Пространство с конусом полуупорядочено: $X\leq Y\Leftrightarrow Y-X\in\mathcal{K}$. Конус $\mathcal{K}$ с непустым множеством внутренних точек $\mathcal{K}^0=\{X: X>0\}$ является телесным. Конус $\mathcal{K}$ называется нормальным, если $0\leq X\leq Y$ влечет $\|X\|\leq\leq\nu\|Y\|$, где ν — универсальная константа. Свойство нормальности конуса эк-

* Выполнена при частичной поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (проект № 01.07/096).

вивалентно следующему условию: $U \le X \le V \Rightarrow \|X\| \le \nu_1 \|U\| + \nu_2 \|V\|$, где $\nu_1, \nu_2 > 0$. В данном условии можно положить $\nu_1 = \nu + 1$, $\nu_2 = \nu$, где ν — константа нормальности конуса $\mathcal{K}$ [4]. Если $\mathcal{E} = \mathcal{K} - \mathcal{K}$, то конус $\mathcal{K}$ является воспроизводящим. Типичными примерами нормальных воспроизводящих конусов в конечномерных пространствах являются множество векторов с неотрицательными элементами и множество симметричных неотрицательно определенных матриц равных размеров.

Пусть в банаховом пространстве $\mathcal{E}_1\,(\mathcal{E}_2)$ выделен конус $\mathcal{K}_1\,(\mathcal{K}_2)$. Оператор $M: \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2$ называется монотонным (монотонным в конусе $\mathcal{K}_1$), если из $X \ge Y$ $(X \ge Y \ge 0)$ следует $MX \ge MY$. Монотонность линейного оператора равносильна его положительности: $X \ge 0 \Rightarrow MX \ge 0$. Неравенство между операторами $M \le L$ означает, что оператор $L - M$ положительный. Если $M\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{K}_2$, то оператор M всюду положительный. Линейный оператор M называется положительно обратимым, если для любого $Y \in \mathcal{K}_2$ уравнение $MX = Y$ имеет решение $X \in \mathcal{K}_1$. Если $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус и $M_1 \le M \le$ $\le M_2$, то из положительной обратимости операторов M_1 и M_2 следует положительная обратимость оператора M, причем $M_2^{-1} \le M^{-1} \le M_1^{-1}$ [2].

Выделим класс линейных операторов $M = L - P$, $P\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2 \subset L\mathcal{K}_1$, где $\mathcal{K}_2$ — нормальный воспроизводящий конус. Критерием положительной обратимости таких операторов является неравенство $\rho(T) < 1$, где $\rho(T)$ — спектральный радиус пучка операторов $T(\lambda) = P - \lambda L$. Если конус $\mathcal{K}_2$ телесный, то данное неравенство эквивалентно существованию элементов $X \ge 0$ и $Y > 0$, связанных уравнением $MX = Y$.

Приведем примеры положительных операторов.

Линейный оператор $M: R^{n\times m} \to R^{p\times q}$ представим в виде

$$MX = \sum_{i,j=1}^{n,m} x_{ij} A_{ij}, \qquad A_{ij} \in \mathcal{K}_{pq},$$

где $\mathcal{K}_{pq}$ — конус неотрицательных матриц размера $p \times q$, в том и только в том случае, когда $M\mathcal{K}_{nm} \subset \mathcal{K}_{pq}$. В частности, любой линейный оператор, сохраняющий конус неотрицательных векторов $\mathcal{K}_n$, имеет вид $MX = AX$, где $A \in \mathcal{K}_{nn}$.

Произвольный линейный оператор, сохраняющий конус эрмитовых неотрицательно определенных матриц, представим в виде [10]

$$MX = \sum_k A_k X A_k^* + \sum_s B_s X^T B_s^*, \qquad A_k, B_s \in C^{n\times n}.$$

Линейный интегральный оператор

$$MX(t) = \int_\Delta H(t,\tau) X(\tau)\, d\tau$$

положителен относительно конуса неотрицательных функций $X(t)$ в некотором пространстве $\mathcal{E}$, если ядро $H(t,\tau)$ неотрицательно $(t, \tau \in \Delta)$.

1. Инвариантные множества и монотонность динамических систем. Рассмотрим в банаховом пространстве $\mathcal{E}$ динамическую систему с непрерывным временем $t \ge \theta$, состояния которой определяются соотношениями

$$X(t) = \Omega(t, t_0) X_0, \qquad \Omega(t_0, t_0) = E, \qquad t \ge t_0 \ge \theta. \tag{1.1}$$

Здесь $\Omega(t, t_0): \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ — оператор, определяющий переход из начального состояния $X(t_0) = X_0$ в состояние $X(t)$ при $t > t_0$, E — тождественный оператор. В дальнейшем будем предполагать, что состояния $X(t)$ являются непрерывно дифференцируемыми функциями и система имеет состояние равновесия $X(t) \equiv \equiv 0$.

Пусть в пространстве $\mathcal{E}$ определено постоянное или изменяющееся по заданному закону множество $\mathcal{K}_t$, $t \ge \theta$. В начальный момент времени $t = t_0$ полагаем $\mathcal{K}_{t_0} = \mathcal{K}_0$. Если $\mathcal{K}_t$ — конус, то им порождаемые неравенства между элементами пространства и операторами в каждый момент времени t обозначаем символами типа $\overset{\mathcal{K}_t}{\le}$ или $\overset{\mathcal{K}_t}{\ge}$.

$\mathcal{K}_t$ является инвариантным множеством системы (1.1), если для любого $t_0 \ge \ge \theta$ при $t > t_0$ выполняется включение $\Omega(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_t$. Если система (1.1) имеет инвариантный конус $\mathcal{K}_t$, то она позитивна относительно $\mathcal{K}_t$. Свойство позитивности системы означает, что $X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} 0$ при $t > t_0$, лишь только $X_0 \overset{\mathcal{K}_0}{\ge} \overset{\mathcal{K}_0}{\ge} 0$ и $t_0 \ge \theta$. Система (1.1) называется монотонной относительно конуса $\mathcal{K}_t$, если для любого $t_0 \ge \theta$

$$X_{10} \overset{\mathcal{K}_0}{\le} X_{20} \;\Rightarrow\; X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X_2(t), \qquad t > t_0, \tag{1.2}$$

где $X_k(t) = \Omega(t, t_0)X_{k0}$, $k = 1, 2$. Для классов позитивных и монотонных систем, а также систем, имеющих свойство (1.2) при дополнительных требованиях $X_{20} \in \mathcal{K}_0$, $X_{10} \in \mathcal{K}_0$, $X_{10} \in -\mathcal{K}_0$ и $X_{20} \in -\mathcal{K}_0$, используем соответствующие обозначения $\mathcal{M}_0$, $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}_1^+$, $\mathcal{M}_2^+$, $\mathcal{M}_1^-$ и $\mathcal{M}_2^-$. Система класса $\mathcal{M}_2^+$ $\left(\mathcal{M}_2^-\right)$ монотонна в конусе $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$.

Аналогично определяются инвариантные множества и свойства позитивности и монотонности относительно конуса для динамических систем вида (1.1) с дискретным временем $t \ge \theta$.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{X} = F(X, t), \qquad t \ge t_0 \ge \theta, \tag{1.3}$$

где F — оператор, обеспечивающий существование и единственность непрерывно дифференцируемого решения $X(t)$ со значениями в пространстве $\mathcal{E}$ с конусом $\mathcal{K}_t$. Если $\Omega(t, t_0)$ — оператор сдвига по траекториям системы (1.3), то каждое ее решение имеет вид (1.1). Поэтому свойство позитивности (монотонности) системы (1.3) относительно $\mathcal{K}_t$ равносильно условиям положительности (монотонности) оператора $\Omega(t, t_0)$. Достаточным условием позитивности системы (1.3) относительно $\mathcal{K}_t$ является включение $F(\mathcal{K}_t, t) \subset \mathcal{K}_t$ при любом $t \ge \theta$.

Для класса линейных систем

$$\dot{X} + M(t)X = 0 \tag{1.4}$$

оператор $\Omega(t, t_0)$ в (1.1) совпадает с эволюционным оператором

$$W_M(t, t_0) = E - \int_{t_0}^{t} M(t_1)dt_1 + \int_{t_0}^{t} M(t_2)\int_{t_0}^{t_2} M(t_1)dt_1\,dt_2 - \dots .$$

Здесь ряд сходится равномерно по операторной норме. Положительность оператора $W_M(t, t_0)$ при $t \geq t_0$ равносильна положительности экспоненциального оператора $e^{-M(t)h}$ при $t \geq 0$, $h \geq 0$. Если $M(t) = M_1(t) + M_2(t)$, то из положительности операторов $W_{M_1}(t, t_0)$ и $W_{M_2}(t, t_0)$ следует положительность оператора $W_M(t, t_0)$ и, значит, позитивность системы (1.4) относительно $\mathcal{K}_t$ [12].

Для дифференциальной системы (1.3) определим следующие условия:

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi\big(F(X, t)\big) \geq 0, \tag{1.5}$$

$$X \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} Y,\ \varphi \in \mathcal{K}_t^*,\ \varphi(X - Y) = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi\big(F(X, t) - F(Y, t)\big) \geq 0, \tag{1.6}$$

где $\mathcal{K}_t^*$ — сопряженный конус, $t \geq \theta$. Классы непрерывных оператор-функций $F(X, t)$, удовлетворяющих условиям (1.5) и (1.6), обозначим соответственно через $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}$. Определим также семейства оператор-функций $\mathcal{F}_1^+$, $\mathcal{F}_2^+$, $\mathcal{F}_1^-$ и $\mathcal{F}_2^-$, имеющих свойство (1.6) при дополнительных требованиях $X \in \mathcal{K}_t$, $Y \in \mathcal{K}_t$, $Y \in -\mathcal{K}_t$ и $X \in -\mathcal{K}_t$ соответственно. Очевидно, что $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1^{\pm}$ и $\mathcal{F}_2^{\pm}$ являются клиньями, причем $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_1^{\pm} \subset \mathcal{F}_2^{\pm}$.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathcal{K}_t$ — телесный конус, имеющий свойство*

$$\mathcal{K}_t \supset \mathcal{K}_\tau, \qquad t > \tau \geq \theta. \tag{1.7}$$

Тогда система (1.3) *позитивна* (*монотонна*) *относительно $\mathcal{K}_t$, если $F \in \mathcal{F}_0$* ($F \in \mathcal{F}$).

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную систему

$$\dot{Z} = F(Z, t) + \varepsilon Q,$$

где $\varepsilon > 0$, $Q \in \mathcal{K}_0^0$ — любой внутренний элемент конуса $\mathcal{K}_0$. Пусть $Z(t)$ — такое ее решение, что $Z(t_0) = Z_0 \in \mathcal{K}_0$, причем $Z(\tau) = Z_\tau \in \partial\mathcal{K}_\tau$ — точка границы конуса $\mathcal{K}_\tau$ при некотором $\tau \geq t_0$. Тогда $\varphi(Z_\tau) = 0$ для некоторого $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$ и $\varphi \neq 0$. Кроме того, $\varphi(Q) > 0$, так как согласно (1.7) $Q \in \mathcal{K}_t^0$ при $t \geq t_0$. Если $F \in \mathcal{F}_0$, то при условиях непрерывности для некоторого $\delta > 0$ имеем соотношения

$$\varphi\big(\dot{Z}(\tau)\big) = \varphi\big(F(Z_\tau, \tau)\big) + \varepsilon\varphi(Q) > 0,$$

$$\int_\tau^{\tau+\delta} \varphi\big(\dot{Z}(t)\big)dt = \varphi\big(Z(\tau + \delta)\big) > 0.$$

Следовательно, траектория $Z(t)$ не выходит за пределы конуса $\mathcal{K}_\tau$ в момент τ, т. е. $Z(t) \in \mathcal{K}_\tau$ при $\tau \leq t \leq \tau + \delta$. В противном случае для некоторых $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$ и $\delta > 0$ должны выполняться соотношения $\varphi(Z(\tau)) = 0$, $\varphi\big(Z(\tau + \delta)\big) < 0$. Учитывая (1.7), имеем $Z(t) \in \mathcal{K}_t$ при $\tau \leq t \leq \tau + \delta$.

В силу замкнутости конуса при $\varepsilon \to 0$ получаем $Z(t) \to X(t) \in \mathcal{K}_t$ для любых $Z_0 = X_0 \in \mathcal{K}_0$ и $t \geq t_0$, т. е. система (1.3) позитивна относительно $\mathcal{K}_t$.

Аналогично устанавливается свойство монотонности системы (1.3) относительно $\mathcal{K}_t$ при $X \in \mathcal{F}$.

Лемма доказана.

***Следствие* 1.1.** *Если оператор системы* (1.3) *представим в виде*

$$F(X,t) = \alpha F_1(X,t) + \beta F_2(X,t), \qquad \alpha \geq 0, \qquad \beta \geq 0,$$

причем $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_0$ $(F_1, F_2 \in \mathcal{F})$, *то при условиях леммы* 1.1 *данная система позитивна* (*монотонна*) *относительно* $\mathcal{K}_t$.

Отметим, что в случае постоянного телесного конуса $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$ условие $F \in \mathcal{F}_0$ $(F \in \mathcal{F})$ равносильно позитивности (монотонности) системы (1.3) относительно $\mathcal{K}$ [4]. Можно установить, что позитивная относительно телесного конуса $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$ система (1.3) принадлежит классу $\mathcal{M}_k^+$ $(\mathcal{M}_k^-)$, если $F \in \mathcal{F}_k^+$ $(F \in \mathcal{F}_k^-)$ при $k = 1, 2$.

***Пример* 1.1.** Пусть $\mathcal{K}$ — конус неотрицательных векторов в R^n. Нелинейная дифференциальная система

$$\dot{x} + A(t)x = g(x,t), \qquad x \in R^n, \qquad t \geq \theta,$$

где $A(t)$ — матрица с неположительными внедиагональными элементами, является позитивной относительно $\pm\mathcal{K}$, если [1]

$$x \in \pm\mathcal{K},\ x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \pm g_i(x,t) \geq 0, \qquad i = \overline{1,n}.$$

Данная система имеет свойство монотонности, если вектор-функция $g(x,t)$ квазимонотонно неубывающая по x (условие Важевского):

$$x \geq y,\ x_i = y_i \quad \Rightarrow \quad g_i(x,t) \geq g_i(y,t), \qquad i = \overline{1,n}.$$

Если последнее условие выполняется при $x \in \mathcal{K}$ или $y \in \mathcal{K}$ $(y \in -\mathcal{K}$ или $x \in -\mathcal{K})$, то позитивная относительно $\mathcal{K}$ $(-\mathcal{K})$ система принадлежит классам $\mathcal{M}_1^+$ или $\mathcal{M}_2^+$ $(\mathcal{M}_1^-$ или $\mathcal{M}_2^-)$ соответственно.

***Пример* 1.2.** Рассмотрим нелинейную систему управления с динамической обратной связью

$$\dot{x} = f(x,u,t), \qquad \dot{u} = g(x,u,t), \qquad x \in R^n, \qquad u \in R^1,$$

и выделим в фазовом пространстве R^{n+1} круговой конус Минковского

$$\mathcal{K} = \left\{ z \in R^{n+1} : z^T = \left[x^T, u\right],\ \|x\| \leq u \right\}. \tag{1.8}$$

Данный конус является нормальным, телесным и самосопряженным. Последнее свойство означает, что $l^T z \geq 0 \quad \forall\, z \in \mathcal{K} \Leftrightarrow l \in \mathcal{K}$. Критерий позитивности системы относительно $\mathcal{K}$ приводится к виду

$$x^T f(x,u,t) \leq u g(x,u,t), \qquad x \in R^n, \qquad t \geq \theta,$$

где $u = \|x\|$. В случае линейной системы полагаем $f(x,u,t) = A(t)x + b(t)u$ и $g(x,u,t) = c^T(t)x + d(t)u$. При этом каждое из условий

$$\frac{\lambda_{\max}\left(A(t) + A^T(t)\right)}{2} + \left\| b(t) - c(t) \right\| \leq d(t),$$

$$\begin{bmatrix} \gamma(t)I - A(t) - A^T(t) & c(t) - b(t) \\ c^T(t) - b^T(t) & 2d(t) - \gamma(t) \end{bmatrix} \geq 0,$$

где $\lambda_{\max}(\cdot)$ — максимальное собственное число симметричной матрицы, $\gamma(t)$ — некоторая функция, I — единичная матрица, обеспечивает системе свойства позитивности и монотонности относительно $\mathcal{K}$.

***Пример* 1.3.** Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение

$$\dot{X} + \mathcal{A}(X,t)X + X\mathcal{A}^T(X,t) = \mathcal{P}(X,t), \qquad X = X^T \in R^{n\times n}, \tag{1.9}$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{P}$ — заданные операторы. Пусть оператор $\mathcal{P}$ сохраняет конус симметричных неотрицательно определенных матриц $\mathcal{K} \subset R^{n\times n}$ и уравнение (1.9) имеет непрерывное решение $X(t)$ при $t \geq t_0$, $X(t_0) = X_0 \geq 0$. Тогда $\mathcal{K}$ является инвариантным множеством данного уравнения. Действительно, для любого функционала $\varphi \in \mathcal{K}^*$, представленного в виде $\varphi(X) = \mathrm{tr}(SX)$, где $S = HH^T \geq 0$, равенство $\varphi(X) = 0$ при $X \geq 0$ означает, что $XH = 0$, и с учетом перестановки матриц под знаком операции tr получаем соотношения

$$\varphi\big(\mathcal{A}(X,t)X + X\mathcal{A}^T(X,t)\big) = 0, \qquad \varphi(\mathcal{P}(X,t)) \geq 0.$$

Согласно лемме 1.1, уравнение (1.9) позитивно относительно $\mathcal{K}$.

Приведем частные случаи матричного уравнения (1.9):

$$\dot{X} + A(t)X + XA^T(t) = X\mathcal{R}(X,t)X, \tag{1.10}$$

$$\dot{X} + A(t)X + XA^T(t) = \sum_k B_k(t)XB_k^T(t). \tag{1.11}$$

Оператору Ляпунова $L(t)X = A(t)X + XA^T(t)$ соответствует положительный эволюционный оператор $W_L(t,t_0)X = \Delta(t,t_0)X\Delta^T(t,t_0)$, где $\Delta(t,t_0)$ — матрицант системы $\dot{x} = A(t)x$, $t \geq t_0$. Уравнение (1.10) типа Риккати при указанных предположениях и условии монотонности оператора $\mathcal{R}(X,t)$ относительно $\mathcal{K}$ имеет свойство монотонности. Позитивное и монотонное относительно $\mathcal{K}$ линейное уравнение (1.11) описывает динамику вторых моментов для стохастической системы Ито

$$dx(t) + A(t)x(t)dt = \sum_k B_k(t)x(t)dw_k(t),$$

где w_k — компоненты стандартного винеровского процесса. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратичном решения $x \equiv 0$ данной системы равносильна асимптотической устойчивости по Ляпунову решения $X \equiv 0$ уравнения (1.11).

Отметим, что если система (1.4) с положительным оператором M позитивна относительно конуса неотрицательно определенных матриц, то данный оператор представим в виде $MX = \alpha X$, где $\alpha \geq 0$. Для доказательства последнего утверждения достаточно рассмотреть случай $MX = AXA^T$ и установить, что все собственные значения матрицы A вещественны и совпадают.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}$ множество

$$\mathcal{K}_t = \{X \colon R(t)X \in \mathcal{K}\}, \qquad t \geq \theta, \tag{1.12}$$

где $R(t)$ — линейный оператор, $\mathcal{K}$ — заданный конус. Данное множество является клином с лезвием $\ker R(t) = \{X \colon R(t)X = 0\}$. Предположим, что $\ker R(t) \equiv \{0\}$ и конус $\mathcal{K}$ нормальный. Тогда $\mathcal{K}_t$ является нормальным конусом, если выполняются неравенства

$$r_-(t)\|X\| \le \|R(t)X\| \le r_+(t)\|X\| \quad \forall X\in\mathcal{K}_t, \tag{1.13}$$

где $r_\pm(t)>0$ — некоторые функции, не зависящие от X.

Пусть существуют производная $\dot R(t)$ по t и обратный оператор $R^{-1}(t)$ при $t\ge\theta$. Тогда условия позитивности системы (1.3) относительно $\mathcal{K}_t$ равносильны условиям позитивности относительно постоянного конуса $\mathcal{K}$ преобразованной системы

$$\dot Y + S(t)Y = G(Y,t), \qquad t\ge\theta, \tag{1.14}$$

где $Y(t)=R(t)X(t)$, $S(t)=-\dot R(t)R^{-1}(t)$, $G(Y,t)=R(t)F\big(R^{-1}(t)Y,t\big)$. Система (1.14) позитивна относительно $\mathcal{K}$, если таковой является линейная система $\dot Z + S(t)Z=0$ и выполняется включение $R(t)F\big(R^{-1}(t)\mathcal{K},\ t\big)\subset\mathcal{K}$. При этом $\mathcal{K}_0\subset\mathcal{K}_t \Leftrightarrow W_S(t,t_0)\mathcal{K}\subset\mathcal{K}$, где $W_S(t,t_0)=R(t)R^{-1}(t_0)$, $t\ge t_0$.

***Пример* 1.4.** Рассмотрим систему (1.4) и преобразованный конус Минковского $\mathcal{K}_t$, определяемый соотношениями (1.8) и (1.12), положив

$$M(t)=\begin{bmatrix} A(t) & b(t)\\ c^T(t) & d(t)\end{bmatrix}, \quad R(t)=\begin{bmatrix} I & 0\\ 0 & r(t)\end{bmatrix}, \quad 0<r(t)\le r_0.$$

Конус $\mathcal{K}$ нормальный с константой нормальности $\nu=1$. Условие нормальности (1.13) для конуса $\mathcal{K}_t$ выполняется, если, например,

$$r_-(t)=\frac{r(t)}{\sqrt{1+r^2(t)}}, \qquad r_+(t)=\sqrt{2}\,r(t).$$

При этом для любого $t\ge\theta$ в качестве константы нормальности можно выбрать значение ограниченной функции $\nu(t)=r_+(t)/r_-(t)=\sqrt{2+2r^2(t)}$. Если функция $r(t)$ неубывающая, то выполняется условие (1.7). Преобразованная система (1.14) имеет вид

$$\dot Y + L(t)Y=0, \qquad L(t)=\begin{bmatrix} A(t) & b(t)/r(t)\\ r(t)c^T(t) & d(t)-\dot r(t)/r(t)\end{bmatrix}.$$

Поэтому система (1.4) является позитивной относительно $\mathcal{K}_t$, если для любого $t\ge\theta$ выполняется неравенство (см. пример 1.2)

$$\dot r(t) + \frac{r(t)}{2}\lambda_{\min}\big(A(t)+A^T(t)\big) \ge r(t)d(t) + \big\|b(t)-r^2(t)c(t)\big\|.$$

2. Устойчивость позитивных и монотонных систем. Рассмотрим в фазовом пространстве $\mathcal{E}$ динамическую систему, состояния которой описываются в виде (1.1) и являются непрерывными дифференцируемыми функциями $X(t)$. Пусть $\mathcal{K}_t\subset\mathcal{E}$ — некоторый конус и система имеет изолированное состояние равновесия $X\equiv 0$, т. е. $\Omega(t,t_0)0\equiv 0$.

Состояние $X\equiv 0$ системы (1.1) называем устойчивым в $\mathcal{K}_t$, если для любых $\varepsilon>0$ и $t_0\ge\theta$ можно указать такое $\delta>0$, что из $X_0\in S_\delta(t_0)$ следует $X(t)\in S_\varepsilon(t)$ при $t>t_0$, где $S_\varepsilon(t)=\{X\in\mathcal{K}_t : \|X\|\le\varepsilon\}$. Если при этом для некоторого $\delta_0>0$ из $X_0\in S_{\delta_0}(t_0)$ следует $\|X(t)\|\to 0$ при $t\to\infty$, то состояние $X\equiv 0$ системы асимптотически устойчиво в $\mathcal{K}_t$.

Если состояние $X \equiv 0$ системы (1.1) с инвариантным конусом $\mathcal{K}_t$ устойчиво (асимптотически устойчиво) по Ляпунову, то оно устойчиво (асимптотически устойчиво) в $\mathcal{K}_t$.

Пусть $\mathcal{K}_t$ — нормальный конус, имеющий ограниченную константу нормальности $\nu_t \le \nu < \infty$, и в любой начальный момент времени $t_0 \ge \theta$ конус $\mathcal{K}_0$ воспроизводящий. Кроме того, в данном пункте предполагаем, что конус $\mathcal{K}_t$ имеет следующее свойство:

$$\mathcal{K}_t \subset \mathcal{K}_\tau \ \text{ или } \ \mathcal{K}_t \supset \mathcal{K}_\tau \quad \forall\, t, \tau \ge \theta. \tag{2.1}$$

Покажем, что при изучении условий устойчивости в конусе и устойчивости по Ляпунову нулевого состояния системы (1.1) могут быть использованы следующие свойства производных $\dot{X}(t)$:

$$X_0 \overset{\mathcal{K}_0}{\ge} 0 \ \Rightarrow \ \dot{X}(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} 0 \quad \forall\, t > t_0, \tag{2.2}$$

$$X_0 \overset{\mathcal{K}_0}{\le} 0 \ \Rightarrow \ \dot{X}(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} 0 \quad \forall\, t > t_0. \tag{2.3}$$

Лемма 2.1. *Состояние* $X \equiv 0$ *позитивной относительно* $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$ *системы* (1.1), *имеющей свойство* (2.2) ((2.3)), *устойчиво в* $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$.

Доказательство. Согласно теореме о конечном приращении,

$$X(t) - X(t_0) = \dot{X}(\tau)(t - t_0), \qquad \tau \in (t, t_0), \qquad t > t_0.$$

Отсюда с учетом (2.1), (2.2) и позитивности системы имеем соотношения

$$0 \overset{\mathcal{K}_\xi}{\le} X(t) \overset{\mathcal{K}_\xi}{\le} X_0, \qquad \xi = \begin{cases} t, & \mathcal{K}_t \supset \mathcal{K}_\tau, \\ \tau, & \mathcal{K}_t \subset \mathcal{K}_\tau, \end{cases}$$

из которых следует $\|X(t)\| \le \nu_\xi \|X_0\| \le \nu \|X_0\|$, где ν_ξ — константа нормальности конуса $\mathcal{K}_\xi$. Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ из $X_0 \in S_\delta(t_0)$, где $\delta = \varepsilon / \nu$, следует, что $X(t) \in S_\varepsilon(t)$ при $t > t_0$.

Аналогичные рассуждения справедливы и для конуса $-\mathcal{K}_t$.

Лемма доказана.

Лемма 2.2. *Состояние* $X \equiv 0$ *системы* (1.1), *принадлежащей классам* $\mathcal{M}_1^{\pm}$ *и имеющей свойства* (2.2) *и* (2.3), *устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Из определения классов $\mathcal{M}_1^{\pm}$ и условия $\Omega(t, t_0)0 \equiv 0$ следует, что $\mathcal{K}_t$ и $-\mathcal{K}_t$ являются инвариантными множествами системы (1.1). Если $X_0 \in \mathcal{K}_0$, то с учетом (2.2) для некоторого $\tau \ge t_0$ имеем неравенства $0 \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} X(t) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} X_0$ и, следовательно, $\|X(t)\| \le \nu \|X_0\|$ (см. доказательство леммы 2.1). Данная оценка выполняется также при $X_0 \in -\mathcal{K}_0$, так как в этом случае имеем неравенства $0 \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} -X(t) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\le} -X_0$, следующие из (2.3) и теоремы о конечном приращении.

Поскольку конус $\mathcal{K}_0$ воспроизводящий, то в общем случае $X_0 = X_0^+ + X_0^- \in \mathcal{E}$, $X_0^{\pm} \in \pm\mathcal{K}_0$, причем $\|X_0^{\pm}\| \le \gamma \|X_0\|$, где $\gamma > 0$ — константа несплющенности конуса $\mathcal{K}_0$. Так как $X_-(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X_+(t)$, где $X_\pm(t) =$

$= \Omega(t, t_0) X_0^{\pm}$, то с учетом нормальности конуса $\mathcal{K}_t$ и несплющенности конуса $\mathcal{K}_0$ получаем оценку

$$\|X(t)\| \le \nu_1(t)\|X_-(t)\| + \nu_2(t)\|X_+(t)\| \le \gamma\nu(2\nu+1)\|X_0\|,$$

из которой следует устойчивость состояния $X \equiv 0$ системы (1.1). В данных соотношениях выбраны функции $\nu_1(t) = \nu_t + 1$ и $\nu_2(t) = \nu_t$, где $\nu_t \le \nu$.

Лемма доказана.

При условиях леммы 2.2 состояние $X \equiv 0$ системы классов $\mathcal{M}_1^{\pm}$ имеет свойства устойчивости в $\mathcal{K}_t$ и $-\mathcal{K}_t$. Эти свойства обеспечивают устойчивость по Ляпунову состояния $X \equiv 0$ данной системы. Для линейных систем свойства устойчивости в $\mathcal{K}_t$ и $-\mathcal{K}_t$ нулевого состояния эквивалентны.

***Замечание* 2.1.** Если состояния системы (1.1) удовлетворяют оценке

$$-PX_-(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} QX_+(t), \qquad t \ge t_0,$$

где P и Q — линейные ограниченные операторы, $X_{\pm}(t) = \Omega(t, t_0)X_{\pm}$, $X_0 = X_+ - X_-$, $X_{\pm} \in \mathcal{K}_0$, то из устойчивости (асимптотической устойчивости) в $\mathcal{K}_t$ состояния $X \equiv 0$ данной системы следует его устойчивость (асимптотическая устойчивость) по Ляпунову. Если операторы P и Q положительны относительно $\mathcal{K}_t$, то они ограничены по норме [2].

Лемма 2.2 может быть использована при построении алгебраических условий устойчивости решения $X \equiv 0$ дифференциальной системы (1.3) классов $\mathcal{M}_1^{\pm}$. При этом условия (2.2) и (2.3) представляются в виде неравенств $F(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\le} 0$ и $F(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} 0$, выполняемых на ее решениях с начальными значениями из $\mathcal{K}_0$ и $-\mathcal{K}_0$ соответственно.

Из доказательства лемм 2.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Состояние* $X \equiv 0$ *системы* (1.1), *принадлежащей классам* $\mathcal{M}_1^{\pm}$, *устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *по Ляпунову в том и только в том случае, когда оно устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *в* $\mathcal{K}_t$ *и* $-\mathcal{K}_t$.

Сформулируем следствие леммы 2.2 для линейной системы (1.4) в терминах эволюционного оператора $W_M(t, t_0)$.

Теорема 2.2. *Если выполняются условия*

$$W_M(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_t, \qquad M(t)W_M(t, t_0)\mathcal{K}_0 \subset \mathcal{K}_t, \qquad t \ge t_0,$$

то система (1.4) *устойчива по Ляпунову.*

Рассмотрим класс линейных стационарных систем

$$\dot{X} + MX = 0. \tag{2.4}$$

В этом случае $W_M(t, t_0) = e^{-M(t-t_0)}$ и позитивность системы (2.4) относительно $\mathcal{K}_t$ равносильна включению $e^{Mt_0}\mathcal{K}_0 \subset e^{Mt}\mathcal{K}_t$, $t \ge t_0$. В случае постоянного конуса $\mathcal{K}_t = \mathcal{K}$ условия устойчивости позитивной системы (2.4) описываются в терминах положительных решений алгебраического уравнения $MX = Y$ [10 – 12].

Справедливо следующее утверждение [12, 13].

Теорема 2.3. *Если система* (2.4) *позитивна относительно нормального воспроизводящего конуса* $\mathcal{K}$, *то она экспоненциально устойчива в том и только* *в том случае, когда оператор* M *положительно обратим, т. е.* $\mathcal{K} \subset M\mathcal{K}$. *Если* $\mathcal{K} \subset (M + \gamma I)\mathcal{K}$ *при любом* $\gamma \geq 0$, *то система* (2.4) *позитивна относительно* $\mathcal{K}$ *и экспоненциально устойчива.*

3. Методы сравнения систем. В задачах анализа устойчивости и оценки решений сложных динамических систем применяются методы сравнения, основанные на отображении пространства состояний изучаемой системы в пространства состояний вспомогательных систем [5, 6]. В качестве систем сравнения целесообразно использовать позитивные и монотонные системы относительно подходящих конусов [13, 14]. Изложим обобщенный принцип сравнения с использованием переменного конуса.

Рассмотрим в банаховом пространстве χ дифференциальную систему

$$\dot{x} = f(x, t), \qquad x \in \chi, \qquad t \geq \theta. \tag{3.1}$$

Пусть $\mathcal{E}$ — банахово пространство, содержащее конус $\mathcal{K}_t$ с ограниченной константой нормальности $\nu_t \leq \nu < \infty$, причем в любой начальный момент времени $t_0 \geq \theta$ конус $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_{t_0}$ воспроизводящий. Построим в $\mathcal{E}$ классы систем сравнения вида (1.3) для системы (3.1). При этом будем предполагать, что системы (1.3) и (3.1) имеют единственные непрерывные решения при $t \geq t_0$ и рассматриваемых начальных условиях $X(t_0) = X_0$ и $x(t_0) = x_0$.

Обозначим через $\overline{\mathcal{M}}$ класс систем (1.3), между решениями которых и решениями дифференциальных неравенств

$$\dot{Z} \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} F(Z, t), \qquad Z \in \mathcal{E}, \qquad Z(t_0) = Z_0, \tag{3.2}$$

можно установить такое соответствие, что

$$Z_0 \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_0 \;\Rightarrow\; Z(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t), \qquad t > t_0. \tag{3.3}$$

С помощью соотношений (1.3), (3.2) и (3.3) при дополнительном требовании $X_0 \in \mathcal{K}_0$ $(Z_0 \in \mathcal{K}_0)$ определим также класс систем $\overline{\mathcal{M}}_1$ $\left(\overline{\mathcal{M}}_2\right)$.

Аналогично вводим классы систем $\underline{\mathcal{M}}$, $\underline{\mathcal{M}}_1$ и $\underline{\mathcal{M}}_2$, используя в (3.2) и (3.3) конус $-\mathcal{K}_t$ вместо $\mathcal{K}_t$, т. е. заменяя все используемые конусные неравенства на противоположные. Семейства операторов $F(X, t)$, описывающих классы систем $\overline{\mathcal{M}}$, $\overline{\mathcal{M}}_k$, $\underline{\mathcal{M}}$ и $\underline{\mathcal{M}}_k$ вида (1.3), обозначим соответственно через $\overline{\mathcal{F}}$, $\overline{\mathcal{F}}_k$, $\underline{\mathcal{F}}$ и $\underline{\mathcal{F}}_k$, $k = 1, 2$.

Очевидно, $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{F}}_1 \subset \overline{\mathcal{F}}_2$ и $\underline{\mathcal{F}} \subset \underline{\mathcal{F}}_1 \subset \underline{\mathcal{F}}_2$. Если $F \in \overline{\mathcal{F}} \cup \underline{\mathcal{F}}$, то система (1.3) монотонна относительно $\mathcal{K}_t$. Если $F(0, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$ ($F(0, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} 0$), то система класса $\overline{\mathcal{F}}_2$ $\left(\underline{\mathcal{F}}_2\right)$ является позитивной относительно $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$ и монотонной в $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$.

Лемма 3.1. *При условиях леммы* 1.1 *выполняется включение* $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}} \cup \underline{\mathcal{F}}$.

Доказательство. Используем методику доказательства леммы 1.1. Пусть $F \in \mathcal{F}$ и функции $Y(t)$ и $Z(t)$ при $t \geq t_0$ удовлетворяют соотношениям

$$\dot{Y} = F(Y, t) + \varepsilon Q, \qquad \dot{Z} \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} F(Z, t), \qquad Z_0 \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} Y_0,$$

где $Q \overset{\mathcal{K}_t}{>} 0$, $\varepsilon > 0$, причем в момент времени $\tau \geq t_0$ функция $Y(t) - Z(t)$ выходит за пределы конуса $\mathcal{K}_t$. Тогда для некоторых $\varphi \in \mathcal{K}_\tau^*$ и $\delta > 0$ выполняются соотношения

$$Z(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\leq} Y(\tau), \quad \varphi(Z(\tau)) = \varphi(Y(\tau)), \quad \varphi(Z(t)) > \varphi(Y(t)),$$

где $\tau < t \leq \tau + \delta$. Учитывая предположения, получаем

$$\dot{Y}(\tau) - \dot{Z}(\tau) \overset{\mathcal{K}_\tau}{\geq} F(Y(\tau), \tau) - F(Z(\tau), \tau) + \varepsilon Q(\tau), \quad \varphi\big(\dot{Y}(\tau) - \dot{Z}(\tau)\big) > 0,$$

$$\int_\tau^{\tau+\delta} \varphi\big(\dot{Y}(t) - \dot{Z}(t)\big) dt = \varphi(Y(\tau+\delta)) - \varphi(Z(\tau+\delta)) \geq 0.$$

Последнее неравенство при некотором $\delta > 0$ противоречит предположениям.

Следовательно, $Z(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} Y(t)$ и при $\varepsilon \to 0$ получаем $Z(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t)$, где $X(t)$ — решение системы (1.3), т. е. $F \in \overline{\mathcal{F}}$. Аналогично устанавливается, что $F \in \underline{\mathcal{F}}$.

Лемма доказана.

Классам $\overline{\mathcal{F}}$ и $\underline{\mathcal{F}}$, определенным с помощью конуса неотрицательных векторов в R^n, принадлежат функции, удовлетворяющие условиям Важевского (см. пример 1.1). Оператор-функции $F \in \mathcal{F}$ имеют обобщенное свойство квазимонотонности относительно $\mathcal{K}_t$.

Можно показать, что при условии позитивности системы (1.3) относительно $\mathcal{K}_t$ из $F \in \mathcal{F}_1^+$ $(F \in \mathcal{F}_2^+)$ следует $F \in \overline{\mathcal{F}_1}$ $(F \in \overline{\mathcal{F}_2})$. Аналогично, если система (1.3) позитивна относительно $-\mathcal{K}_t$, то из $F \in \mathcal{F}_1^-$ $(F \in \mathcal{F}_2^-)$ следует $F \in \underline{\mathcal{F}}_1$ $(F \in \underline{\mathcal{F}}_2)$.

Пусть $V(x, t)$ — оператор, непрерывно отображающий некоторую окрестность $\mathcal{D}$ точки $x = 0 \in \chi$ при $t \geq t_0$ в пространство $\mathcal{E}$. Если выражение $V(x, t)$ и его обобщенная производная в силу системы (3.1) при $x \in \mathcal{D}$ и $t \geq \theta$ удовлетворяют соотношению

$$D_t V(x, t)\big|_{(3.1)} \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} F(V(x, t), t), \tag{3.4}$$

то система (1.3) класса $\overline{\mathcal{M}}$ является верхней системой сравнения для системы (3.1) в том смысле, что решения $x(t) \in \mathcal{D}$ и $X(t)$ сравнимы в виде

$$V(x_0, t_0) \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_0 \Rightarrow V(x(t), t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t), \quad t > t_0. \tag{3.5}$$

В (3.4) в качестве производной в силу системы (3.1) можно использовать выражение

$$D_t V(x, t)\big|_{(3.1)} = \limsup_{h \to 0+} \frac{1}{h}[V(x + h f(x, t), t + h) - V(x, t)].$$

Система (1.3) класса $\overline{\mathcal{M}}_1$, позитивная относительно $\mathcal{K}_t$, при условии (3.4) также является верхней системой сравнения для системы (3.1). Если при этом оператор $V(x, t)$ всюду положителен, то мы имеем верхнюю систему сравнения класса $\overline{\mathcal{M}}_2$.

На классах систем $\underline{\mathcal{M}}$, $\underline{\mathcal{M}}_1$ и $\underline{\mathcal{M}}_2$ аналогично определяются нижние системы сравнения для системы (3.1) при замене всех конусных неравенств в (3.4) и (3.5) на противоположные.

Если потребовать, чтобы вместо (3.4) выполнялось равенство

$$D_t V(x,t)\big|_{(3.1)} = F\big(V(x,t),t\big), \tag{3.6}$$

то из определения монотонности системы (1.3) относительно $\mathcal{K}_t$ имеем

$$X_{10} \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} V(x_0,t_0) \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_{20} \Rightarrow X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} V\big(x(t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_2(t), \tag{3.7}$$

где $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — некоторые решения системы (1.3) при $t \geq t_0$ с начальными условиями $X_1(t_0) = X_{10}$ и $X_2(t) = X_{20}$. Поэтому соотношение (3.6) определяет класс монотонных систем (1.3), используемых в качестве нижних и верхних систем сравнения для системы (3.1).

Оценки (3.5) и (3.7) можно использовать для сравнения динамических свойств систем (3.1) и (1.3), а также при построении области притяжения в фазовом пространстве системы (3.1). Например, если неравенство $V(x,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} 0$ возможно только при $x = 0$, то при условиях (3.5) и $X(t) \to 0$ имеем $x(t) \to 0$, $t \to \infty$.

Рассмотрим в пространстве $\mathcal{E}$ две системы

$$\dot{X}_1 = F_1(X_1,t), \quad X_1 \in \mathcal{E}, \quad t \geq \theta, \tag{3.8}$$

$$\dot{X}_2 = F_2(X_2,t), \quad X_2 \in \mathcal{E}, \quad t \geq \theta, \tag{3.9}$$

класса $\underline{\mathcal{M}}$ и $\overline{\mathcal{M}}$ соответственно. Если при $x \in \mathcal{D}$ и $t \geq \theta$

$$F_1\big(V(x,t),t\big) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} D_t V(x,t)\big|_{(3.1)} \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} F_2\big(V(x,t),t\big), \tag{3.10}$$

то решение исходной системы (3.1) удовлетворяет оценке (3.7), где $X_1(t)$ и $X_2(t)$ — решения соответствующих систем (3.8) и (3.9).

Пусть исходная система (3.1) и системы сравнения (3.8) и (3.9) имеют изолированные состояния равновесия: $f(0,t) \equiv 0$, $F_1(0,t) \equiv F_2(0,t) \equiv 0$. Потребуем, чтобы оператор V имел дополнительные свойства

$$V(0,t) \equiv 0, \quad V(x,t) \neq 0, \quad x \neq 0 \in \mathcal{D}, \quad t \geq \theta. \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Пусть оператор V удовлетворяет соотношениям* (3.10), (3.11), *причем $F_1 \in \underline{\mathcal{F}}_1$ и $F_2 \in \overline{\mathcal{F}}_1$. Тогда решение $x \equiv 0$ системы* (3.1) *устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *по Ляпунову, если устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *в $-\mathcal{K}_t$ решение $X_1 \equiv 0$ системы* (3.8) *и устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *в $\mathcal{K}_t$ решение $X_2 \equiv 0$ системы* (3.9).

Доказательство. Поскольку конус $\mathcal{K}_0$ воспроизводящий и имеет свойство несплющенности, то

$$-X_-^0 \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} V(x_0,t_0) = X_+^0 - X_-^0 \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_+^0, \quad \left\| X_\pm^0 \right\| \geq \gamma \left\| V(x_0,t_0) \right\|,$$

где $X_\pm^0 \overset{\mathcal{K}_0}{\geq} 0$, $\gamma > 0$ — универсальная константа.

Пусть $X_1(t)$ $\big(X_2(t)\big)$ — решение системы (3.8) ((3.9)) класса $\underline{\mathcal{M}}_1$ $\big(\overline{\mathcal{M}}_1\big)$ с начальным условием $X_1(t_0) = -X_-^0$ $\big(X_2(t_0) = X_+^0\big)$. Тогда $X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} 0$ и $X_2(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\geq} 0$ при $t \geq t_0$. С учетом (3.7) и нормальности конуса $\mathcal{K}_t$ имеем

$$\| V(x(t),t) \| \leq \nu_1 \left\| X_1(t) \right\| + \nu_2 \left\| X_2(t) \right\|, \quad t > t_0,$$

где $\nu_1 > 0$ и $\nu_2 > 0$ — универсальные константы.

Из непрерывности функции $V(x,t)$ и условий (3.11) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta_0 > 0$ такое, что $\|x(t)\| \le \varepsilon$, лишь только $\|V(x(t),t)\| \le \delta_0$. Используем свойства устойчивости в $-\mathcal{K}_t$ и $\mathcal{K}_t$ нулевых решений систем (3.8) и (3.9) соответственно. Подберем $\delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ так, чтобы из $\|X_-^0\| \le \delta_1$ и $\|X_+^0\| \le \delta_2$ следовали соответствующие неравенства

$$\|X_1(t)\| \le \frac{\delta_0}{2\nu_1}, \qquad \|X_2(t)\| \le \frac{\delta_0}{2\nu_2}, \qquad t > t_0.$$

Наконец, выберем $\delta > 0$ так, чтобы из $\|x_0\| \le \delta$ следовало $\|V(x_0, t_0)\| \le \min\{\delta_1, \delta_2\}/\gamma$. Тогда с учетом изложенных рассуждений получаем $\|x(t)\| \le \varepsilon$ при $t > t_0$, т. е. нулевое решение системы (3.1) устойчиво по Ляпунову. При этом $\|x(t)\| \to 0$, если $\|X_1(t)\| \to 0$ и $\|X_2(t)\| \to 0$ при $t \to \infty$.

Теорема доказана.

Анализ устойчивости нулевого решения системы (3.1) можно проводить на основе лишь верхних (нижних) систем сравнения класса $\overline{\mathcal{M}}_2$ $(\underline{\mathcal{M}}_2)$ или монотонных в $\mathcal{K}_t$ $(-\mathcal{K}_t)$ систем (1.3) с использованием всюду положительных (отрицательных) операторов V. В частности, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены соотношения* (3.4) *и* (3.11), *причем* $F \in \overline{\mathcal{F}}_2$ *и* $V(x,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} 0$ *при* $x \in \mathcal{D}$, $t \ge \theta$. *Тогда решение* $x \equiv 0$ *системы* (3.1) *устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *по Ляпунову, если устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *в* $\mathcal{K}_t$ *решение* $X \equiv 0$ *системы* (1.3).

Доказательства теорем 3.1 и 3.2 аналогичны.

***Замечание* 3.1.** Верхние системы сравнения в теоремах 3.1 и 3.2 должны быть позитивными. Поэтому условия устойчивости (асимптотической устойчивости) в $\mathcal{K}_t$ нулевых решений данных систем можно заменить требованием их устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову. Аналогично, условия устойчивости (асимптотической устойчивости) в $-\mathcal{K}_t$ нулевого решения нижней системы сравнения в теореме 3.1 можно заменить требованием его устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову.

***Замечание* 3.2.** Теорема 3.2 остается справедливой, если потребовать, чтобы вместо конусного неравенства $V(x,t) \overset{\mathcal{K}_t}{\ge} 0$ для некоторого $\varphi \in \mathcal{K}_t^*$ выполнялось скалярное неравенство $\varphi(V(x,t)) > 0$ при $x \ne 0 \in \mathcal{D}$ и $t \ge \theta$. Теорема 3.2 также имеет место, если вместо требования $F \in \overline{\mathcal{F}}_2$ использовать свойство монотонности системы (1.3) в конусе $\mathcal{K}_t$. При этом должно выполняться соотношение (3.6).

Отметим, что нижние и верхние системы сравнения для системы (3.1) можно строить в разных полуупорядоченных пространствах $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$. При этом свойства соответствующих операторов $V_1(x,t)$ и $V_2(x,t)$ и неравенств

$$V_1(x(t),t) \overset{\mathcal{K}_{1t}}{\ge} X_1(t), \qquad V_2(x(t),t) \overset{\mathcal{K}_{2t}}{\le} X_2(t)$$

должны быть согласованы с целью изучения определенных характеристик системы (3.1). Так, если система неравенств $V_1(x,t) \overset{\mathcal{K}_{1t}}{\ge} 0$ и $V_2(x,t) \overset{\mathcal{K}_{2t}}{\le} 0$ выполняется только при $x = 0$, то из $X_1(t) \to 0$ и $X_2(t) \to 0$, где $X_1(t)$ $(X_2(t))$ — решение нижней (верхней) системы сравнения, следует $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

***Пример* 3.1.** Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = g\big(V(x), t\big) \odot x, \quad x \in R^n, \tag{3.12}$$

где g — некоторая вектор-функция, $V(x) = x^2 \equiv x \odot x \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$, $\mathcal{K} \subset R^n$ — конус неотрицательных векторов, $\odot$ — поэлементное произведение Шура. Производная от $V(x)$ в силу системы (3.12) равна выражению $2g\big(V(x), t\big) \odot V(x)$, и мы имеем систему сравнения вида

$$\dot{X} = 2g(X, t) \odot X, \quad x \in R^n. \tag{3.13}$$

Система (3.13) является позитивной относительно конуса $\mathcal{K}$. Если вектор-функция g удовлетворяет условию Важевского (см. пример 1.1), то система (3.13) является монотонной в $\mathcal{K}$ и может быть использована в теореме 3.2. Для решений систем (3.12) и (3.13) справедлива оценка

$$|x_0| \overset{\mathcal{K}}{\leq} \sqrt{X_0} \;\Rightarrow\; |x(t)| \overset{\mathcal{K}}{\leq} \sqrt{X(t)}, \quad t > t_0,$$

где операции модуля и корня от вектора выполняются поэлементно. Из устойчивости (асимптотической устойчивости) в $\mathcal{K}$ решения $X \equiv 0$ системы (3.13) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) по Ляпунову решения $x \equiv 0$ системы (3.12).

***Пример* 3.2.** Рассмотрим дифференциальную систему

$$\dot{x} = \mathcal{A}\big(V(x), t\big)x, \quad x \in R^n, \tag{3.14}$$

где $\mathcal{A}$ — некоторый оператор, $V(x) = xx^T \overset{\mathcal{K}}{\geq} 0$, $\mathcal{K} \subset R^{n\times n}$ — конус неотрицательно определенных матриц. Вычисляя производную в силу системы (3.14) от $V(x)$, на основе соотношения (3.6) получаем матричное уравнение

$$\dot{X} = \mathcal{A}(X, t)X + X\mathcal{A}^T(X, t), \quad X = X^T \in R^{n\times n}. \tag{3.15}$$

Пусть $\mathcal{A}(X, t) = -A(t) + X\mathcal{B}(X, t)$ и оператор $\mathcal{R}(X, t) = \mathcal{B}(X, t) + \mathcal{B}^T(X, t)$ является монотонным относительно конуса $\mathcal{K}$. Тогда уравнение (3.15) приводится к виду (1.10) и может быть использовано в качестве верхней системы сравнения в теореме 3.2 для исходной системы (3.14). Каждое решение $x(t)$ системы (3.14) удовлетворяет оценке

$$x_0 x_0^T \overset{\mathcal{K}}{\leq} X_0 \;\Rightarrow\; x(t)x^T(t) \overset{\mathcal{K}}{\leq} X(t), \quad t > t_0,$$

где $X(t) \geq 0$ — решение уравнения (1.10). Из устойчивости (асимптотической устойчивости) в $\mathcal{K}$ решения $X \equiv 0$ уравнения (1.10) следует устойчивость (асимптотическая устойчивость) по Ляпунову решения $x \equiv 0$ системы (3.14).

4. Робастная устойчивость семейства систем. В прикладных исследованиях возникает задача об устойчивости заданного семейства систем, описываемых дифференциальными или разностными уравнениями с неопределенными параметрами (задача робастной устойчивости). Изложим методику анализа робастной устойчивости семейства систем

$$\dot{X} = F(X, t), \quad F(0, t) \equiv 0, \tag{4.1}$$

$$\underline{F}(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} F(X, t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} \overline{F}(X, t), \quad X \in \mathcal{E}, \quad t \geq \theta, \tag{4.2}$$

где неравенства определяются конусом $\mathcal{K}_t \subset \mathcal{E}$ с ограниченной константой нормальности. Неравенства между значениями функций в начальный момент времени t_0 определяем относительно воспроизводящего конуса $\mathcal{K}_0 = \mathcal{K}_{t_0}$.

Выделим в семействе (4.1), (4.2) две системы:

$$\dot{X}_1 = \underline{F}(X_1, t), \qquad \underline{F}(0, t) \equiv 0, \tag{4.3}$$

$$\dot{X}_2 = \overline{F}(X_2, t), \qquad \overline{F}(0, t) \equiv 0. \tag{4.4}$$

При $\underline{F} \in \underline{\mathcal{F}}$ и $\overline{F} \in \overline{\mathcal{F}}$ решения каждой системы (4.1), (4.2) ограничены соответствующими решениями систем (4.3) и (4.4), т. е.

$$X_{10} \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_0 \overset{\mathcal{K}_0}{\leq} X_{20} \Rightarrow X_1(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X(t) \overset{\mathcal{K}_t}{\leq} X_2(t) \quad \forall\, t > t_0. \tag{4.5}$$

Поэтому (4.3) и (4.4) можно рассматривать соответственно в качестве нижней и верхней систем сравнения для системы (4.1). Полагая в теореме 3.1 $V(X, t) \equiv X$, получаем следующие условия робастной устойчивости семейства систем (4.1), (4.2).

Теорема 4.1. *Пусть* $\underline{F} \in \underline{\mathcal{F}}_1$, $\overline{F} \in \overline{\mathcal{F}}_1$ *и нулевые решения систем* (4.3) *и* (4.4) *устойчивы* (*асимптотически устойчивы*) *соответственно в* $-\mathcal{K}_t$ *и* $\mathcal{K}_t$. *Тогда устойчиво* (*асимптотически устойчиво*) *по Ляпунову нулевое решение каждой системы семейства* (4.1), (4.2).

В данном утверждении условия устойчивости (асимптотической устойчивости) в $-\mathcal{K}_t$ и $\mathcal{K}_t$ нулевых решений соответствующих систем (4.3) и (4.4) можно заменить требованием их устойчивости (асимптотической устойчивости) по Ляпунову.

Сформулируем условия устойчивости семейства линейных систем

$$\dot{X} + M(t)X = 0, \qquad \underline{M}(t) \leq M(t) \leq \overline{M}(t). \tag{4.6}$$

В данном случае неравенства (4.2) выполняются при $X \in \mathcal{K}_t$, а системы (4.3) и (4.4) имеют вид

$$\dot{X}_1 + \overline{M}(t)X_1 = 0, \tag{4.7}$$

$$\dot{X}_2 + \underline{M}(t)\, X_2 = 0. \tag{4.8}$$

Теорема 4.2. *Если система* (4.8) *асимптотически устойчива, а система* (4.7) *позитивна относительно* $\mathcal{K}_t$, *то каждая система семейства* (4.6) *асимптотически устойчива и позитивна относительно* $\mathcal{K}_t$.

***Пример* 4.1.** Рассмотрим семейство линейных систем

$$\dot{x} + A(t)x = 0, \qquad \underline{a}_{ij} \leq a_{ij}(t) \leq \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ \overline{a}_{ij}(t), & i = j, \end{cases}$$

где $\underline{a}_{ij}$ — элементы внедиагонально неположительной матрицы, имеющей положительные главные ведущие миноры, $\overline{a}_{ij}(t)$ — заданные непрерывные функции. Система $\dot{x}_1 + \overline{A}(t)x_1 = 0$ с диагональной матрицей $\overline{A}(t)$ является позитивной относительно конуса неотрицательных векторов $\mathcal{K} \subset R^n$, а система $\dot{x}_2 + \underline{A}\,x_2 = 0$ — асимптотически устойчивой. Поэтому каждая система данного семейства асимптотически устойчива и позитивна относительно $\mathcal{K}$. При этом $A^{-1}(t) \geq 0$ для любой матрицы $A(t)$ из интервала $\underline{A} \leq A(t) \leq \overline{A}(t)$.

1. *Красносельский М. А.* Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 332 с.
2. *Красносельский М. А., Лифшиц Е. А., Соболев А. В.* Позитивные линейные системы. – М.: Наука, 1985. – 256 с.
3. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. – М.: Мир, 1992. – 352 с.
4. *Мазко А. Г.* Устойчивость позитивных и монотонных систем в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 4. – С. 462 – 475.
5. *Матросов В. М., Анапольский Л. Ю., Васильев С. Н.* Метод сравнения в математической теории систем. – Новосибирск: Наука, 1980. – 480 с.
6. *Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А. А.* Устойчивость движения: метод сравнения. – Киев: Наук. думка, 1991. – 248 с.
7. *Lakshmikantham V., Leela S.* Advances in stability theory of Lyapunov: old and new // Adv. in Stability Theory at the End of the 20th Century / Ed. A. A. Martynyuk. – London: Taylor & Francis, 2003. – **13**. – P. 121 – 134.
8. *Martynyuk A. A.* Qualitative methods in nonlinear dynamics: Novel approaches to Liapunov's matrix functions. – New York: Marcel Dekker, Inc., 2002. – 301 p.
9. *Мартынюк А. А., Оболенский А. Ю.* Об устойчивости решений автономных систем Важевского // Дифференц. уравнения. – 1980. – **16**, № 8. – С. 1392 – 1407.
10. *Мазко А. Г.* Локализация спектра и устойчивость динамических систем // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1999. – **28**. – 216 с.
11. *Мильштейн Г. Н.* Экспоненциальная устойчивость положительных полугрупп в линейном топологическом пространстве // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 9. – С. 35 – 42.
12. *Мазко А. Г.* Устойчивость линейных позитивных систем // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 323 – 330.
13. *Мазко А. Г.* Устойчивость и сравнение систем в полуупорядоченном пространстве // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах. – 2002. – **8**, вып. 1(15). – С. 24 – 48.
14. *Мазко А. Г.* Позитивные и монотонные системы в полуупорядоченном пространстве // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 2. – С. 164 – 173.

Получено 15.06.2004