

## ОБ ОДНОЙ ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ О МНОЖЕСТВАХ ПОМПЕЙЮ

Upper estimates are established for the smallest radius of a ball, in which a given set is the Pompeiu set. As the set, the half of the straight circular cone is considered. Estimates obtained essentially improve the known results.

Знайдено оцінки зверху найменшого радіуса кулі, в якій дана множина є множиною Помпейю. В якості множини розглянуто половину прямого кругового конуса. Отримані оцінки значно уточнюють відомі раніше.

**1. Введение.** Пусть  $\mathbb{R}^n$  — вещественное евклидово пространство размерности  $n \geq 2$  с евклидовой нормой  $|\cdot|$ ,  $\mathbf{M}(n)$  — группа движений  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$ . Для компактного множества  $A \subset \mathbb{R}^n$  и области  $B \subset \mathbb{R}^n$  положим  $\text{Mot}(A, B) = \{\lambda \in \mathbf{M}(n) : \lambda A \subset B\}$ . Компакт  $A$  называется множеством Помпейю в области  $B$  (будем обозначать это  $A \in \text{Pomp}(B)$ ), если любая локально суммируемая функция  $f : B \rightarrow \mathbb{C}$ , для которой

$$\int_{\lambda A} f(x) dx = 0 \quad \forall \lambda \in \text{Mot}(A, B), \quad (1)$$

равна нулю почти всюду в  $B$ . Классическая проблема Помпейю состоит в описании класса  $\text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ . Она изучалась во многих работах (см. [1, 2]). Из результата Вильямса [3] следует, что если граница множества  $A$  липшицева, но не вещественно аналитическая, то  $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ . В. В. Волчков построил примеры множеств  $A \in \text{Pomp}(B)$  с нелипшицевой (и даже фрактальной) границей, одним из которых является „снежинка Кох” [4].

Если некоторое множество  $A \in \text{Pomp}(\mathbb{R}^n)$ , то возникает вопрос: будет ли  $A \in \text{Pomp}(\mathbb{B}_R)$  при достаточно большом  $R > 0$ ? В. В. Волчков доказал, что ответ на этот вопрос положителен (см. [5]). В [6] (ч. 4, гл. 1) поставлена следующая задача.

**Задача 1.** Для данного множества  $A$  найти

$$\mathcal{R}(A) = \inf \{R > 0 : A \in \text{Pomp}(\mathbb{B}_R)\}.$$

Первые результаты, содержащие оценки сверху для величины  $\mathcal{R}(A)$ , получены в работе [7]. По поводу нижних оценок для  $\mathcal{R}(A)$  см. [6] (ч. 4, теорема 1.6). В [6] (ч. 4) содержится достаточно полная история данного вопроса и близких к нему.

Отметим, что множества  $A$ , для которых в настоящее время известны точные значения величины  $\mathcal{R}(A)$ , можно разбить на следующие типы по структуре их границ:

- 1) граница состоит из отрезков или плоских участков (многоугольники, многогранники (см. [6], ч. 4, гл. 2, 3, [8]);
- 2) эллипсоиды, отличные от шара [6] (ч. 4, гл. 4);
- 3) полушар [6] (ч. 4, гл. 5.1);
- 4) граница содержит отрезки и дуги окружностей (секторы [9], треугольник Рело [10]);

5) цилиндры в  $\mathbb{R}^3$ , в основании которых лежат круговые сегменты [11].

В данной работе впервые изучается случай, когда граница множества  $A$  содержит участок конической поверхности. В частности, получена оценка сверху величины  $\mathcal{R}(A)$  для множества

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq h(1 - \sqrt{x^2 + y^2}), y \geq 0 \right\}, \quad (2)$$

где  $h > 0$  фиксировано (см. ниже теорему 1). Множество  $A$  является половиной прямого кругового конуса в  $\mathbb{R}^3$  с радиусом основания 1 и высотой  $h$ . Результаты такого типа находят многочисленные применения в теории аппроксимации, комплексном анализе и теории отображений, сохраняющих меру (см. [6] (ч. 5), а также п. 6 данной работы).

**2. Формулировка основного результата.** Всюду в дальнейшем предполагается, что  $n = 3$  и множество  $A$  имеет вид (2). Следуя [6] (ч. 4), введем следующие классы функций. Пусть  $\mathfrak{B}(A, B)$  — множество функций из  $L_{\text{loc}}(B)$ , удовлетворяющих (1). Для  $k = 1, 2, \dots, \infty$  положим  $\mathfrak{B}^k(A, B) = \mathfrak{B}(A, B) \cap C^k(B)$ . Кроме того, пусть  $\alpha = \text{arctg } h$ ,  $l = \sqrt{h^2 + 1}$ ,  $\beta = \arccos(l/(2R))$ .

Для компактного множества  $K$  обозначим через  $r^*(K) = \inf \{R > 0 : \lambda K \subset \mathbb{B}_R, \lambda \in \mathbf{M}(n)\}$  наименьший из радиусов замкнутых шаров, содержащих  $K$ . Тогда

$$r^*(A) = \begin{cases} (h^2 + 1)/(2h), & h > 1, \\ 1, & h \leq 1. \end{cases} \quad (3)$$

В связи с дальнейшими результатами (см. п. 4) естественно ввести следующие обозначения:

$$\text{MAX}_{ABC}(R, h) = \sqrt{R^2 - (r^*(A))^2}, \quad (4)$$

$$\text{MIN}_B(R, h) = \max \left\{ h - \sqrt{R^2 - 1}; 0 \right\}, \quad (5)$$

$$\text{MIN}_A(R, h) = \begin{cases} \max\{2 - R; 0\}, & 2R \cos \alpha \geq l, \\ \max\{l - R; 0\}, & l + 2R \cos 2\alpha \leq 0, \\ \sqrt{R^2 + 4 - 4R \cos(\alpha - \beta)} & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \quad (6)$$

$$\text{MAX}_{AC}(R, h) = \sqrt{R^2 - 1}, \quad \text{MIN}_{AC}(R, h) = \max\{h - R; 0\}, \quad (7)$$

$$\text{MAX}_{AB}(R, h) = \begin{cases} \sqrt{R^2 - (l/2)^2}, & 2Rh > 1 + h^2, \\ R \sin(\alpha + \arccos(1/R)), & 2Rh \leq 1 + h^2, \end{cases} \quad (8)$$

$$\text{MIN}_{AB}(R, h) = \begin{cases} \max\{(2h/l) - R; 0\}, & R \sin \alpha > 1, \\ R \sin(\alpha - \arccos(1/R)), & R \sin \alpha \leq 1. \end{cases} \quad (9)$$

Кроме того, положим

$$\mathcal{P}(A) = \inf \left\{ R > 0: [0; \text{MAX}_{ABC}] \cup [\text{MIN}_{AB}; \text{MAX}_{AB}] \cup \right. \\ \left. \cup [\text{MIN}_{AC}; \text{MAX}_{AC}] \cup [\min\{\text{MIN}_A; \text{MIN}_B\}; R] = [0; R] \right\}. \quad (10)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть  $h > 0$ ,  $R > \mathcal{P}(A)$  и  $f \in \mathfrak{B}(A, \mathbb{B}_R)$ . Тогда  $f = 0$ .

Непосредственными вычислениями получаем явный вид  $\mathcal{P}(A)$ :

$$\mathcal{P}(A) = \sqrt{1 + h^2 / (1 + \sqrt{h^2 + 1})^2} \quad \text{при } h < 1 \quad (11)$$

и

$$\mathcal{P}(A) = \frac{5h^2 + 1}{8h} \quad \text{при } h > 3. \quad (12)$$

Значения  $\mathcal{P}(A)$  для каждого  $h \in [1; 3]$  можно легко вычислить с любой наперед заданной точностью  $\varepsilon$  с помощью компьютера. Идея алгоритма состоит в том, чтобы, проверяя для данного  $h$  все значения  $R$ , начиная с  $r^*(A)$ , с шагом  $\varepsilon$ , найти первое (наименьшее) из тех, при которых объединение множеств в формуле (10) равно  $[0; R]$ . Результаты реализации описанного алгоритма при  $\varepsilon = 10^{-6}$  приведены в таблице. В ней для каждого  $h \in [1; 3] \cap \{h: 10h \in \mathbb{N}\}$  найдено такое  $R$ , что  $R \in [\mathcal{P}(A); \mathcal{P}(A) + 10^{-6}]$ , или, что то же, найдено  $R$ , при котором  $\mathcal{P}(A) \in [R - 10^{-6}; R]$ .

Таким образом, в работе получена оценка  $\mathcal{R}(A) \leq \mathcal{P}(A)$ . Заметим, что известные ранее оценки К. А. Беренштейна и Р. Гэя давали лишь оценку  $\mathcal{R}(A) \leq 2r^*(A)$ . Из формул (3), (11), (12) и таблицы видно, что новая оценка существенно улучшает известную ранее для каждого  $h$ . Доказательство теоремы 1 приводится в п. 5, а в пп. 3 и 4 развивается необходимый аппарат.

**3. Интегральные формулы.** Рассмотрим дифференциальные операторы  $\mathfrak{D} = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} - x \cdot \frac{\partial}{\partial y}$ ,  $\mathfrak{P} = \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\mathfrak{Q} = \frac{\partial}{\partial z}$ ,  $l_1 = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x}$ ,  $l_2 = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{h} \frac{\partial}{\partial x}$ . Пусть вершины полуконуса  $A$  имеют координаты  $A = v_1 = (-1, 0, 0)$ ,  $B = v_2 = (0, 0, h)$ ,  $C = v_3 = (1, 0, 0)$  (см. рис. 1, а).

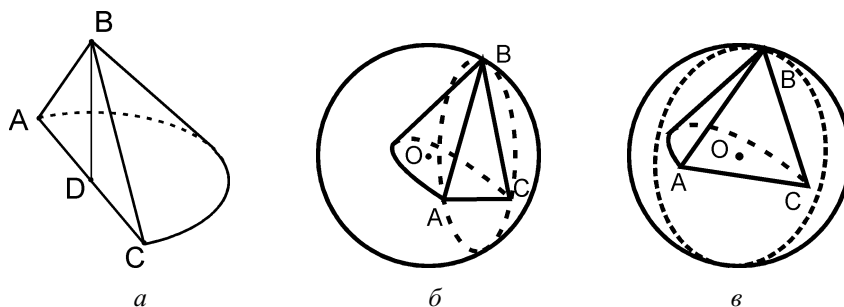


Рис. 1. Обозначения вершин, дальнее и ближнее положения грани  $ABC$ .

Приближенные значения  $\mathcal{P}(A)$  для  $h \in \{t/10: t \in \overline{10, 30}\}$

$h$	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5
$R \approx \mathcal{P}(A)$	1,082393	1,093477	1,104254	1,128990	1,169882	1,213531
$2r^*(A)$	2,000000	2,009091	2,033333	2,069231	2,114286	2,166667
$h$	1,6	1,7	1,8	1,9	2,0	2,1
$R \approx \mathcal{P}(A)$	1,259438	1,307217	1,345363	1,379312	1,414214	1,450001
$2r^*(A)$	2,225000	2,288235	2,355556	2,426316	2,500000	2,576190
$h$	2,2	2,3	2,4	2,5	2,6	2,7
$R \approx \mathcal{P}(A)$	1,486607	1,523976	1,562050	1,612501	1,673077	1,733797
$2r^*(A)$	2,654545	2,734783	2,816667	2,900000	2,984615	3,070370
$h$	2,8		2,9		3,0	
$R \approx \mathcal{P}(A)$	1,794643		1,855604		1,916667	
$2r^*(A)$	3,157143		3,244828		3,333333	

**Лемма 1.** Пусть  $f \in C^2(A)$ . Тогда

$$\int_A (\mathfrak{D} \mathfrak{P} f)(x, y, z) dx dy dz = \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right) f\left(1 - \frac{z}{h}, 0, z\right) dz - \int_0^h \left(\frac{z}{h} - 1\right) f\left(\frac{z}{h} - 1, 0, z\right) dz - \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} f(x, 0, z) dx. \quad (13)$$

**Доказательство.** В интеграле, стоящем слева в (13), осуществляется переход к повторному интегралу исходя из равенств

$$\begin{aligned} \int_A g(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^h dz \int_0^{1-(z/h)} dy \int_{-\sqrt{(1-(z/h))^2-y^2}}^{\sqrt{(1-(z/h))^2-y^2}} g(x, y, z) dx = \\ &= \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} dx \int_0^{\sqrt{(1-(z/h))^2-x^2}} g(x, y, z) dy, \end{aligned}$$

выполненных для любой  $g \in L(A)$ .

Выбирая тот порядок интегрирования, который позволяет вычислить внутренний интеграл, получаем

$$\int_A (\mathfrak{D} f)(x, y, z) dx dy dz = \int_0^h dz \int_0^{1-(z/h)} y f(\sqrt{(1-(z/h))^2-y^2}, y, z) dy -$$

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^h dz \int_0^{1-(z/h)} y f(-\sqrt{(1-(z/h))^2 - y^2}, y, z) dy - \\
 & - \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} x f(x, \sqrt{(1-(z/h))^2 - x^2}, z) dx + \\
 & + \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} x f(x, 0, z) dx.
 \end{aligned}$$

Выполняя в полученных интегралах замены: в первом и втором  $y = (1 - (z/h)) \cos t$ , в третьем  $x = (1 - (z/h)) \sin t$ , имеем

$$\begin{aligned}
 & \int_A (\mathfrak{D}f)(x, y, z) dx dy dz = \\
 & = - \int_0^h dz \int_{-\pi/2}^0 - \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \frac{\sin 2t}{2} f\left(\left(1 - \frac{z}{h}\right) \sin t, \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos t, z\right) dt - \\
 & - \int_0^h dz \int_{-\pi/2}^0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \frac{\sin 2t}{2} f\left(-\left(1 - \frac{z}{h}\right) \sin t, \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos t, z\right) dt - \\
 & - \int_0^h dz \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 \frac{\sin 2t}{2} f\left(\left(1 - \frac{z}{h}\right) \sin t, \left(1 - \frac{z}{h}\right) \cos t, z\right) dt + \\
 & + \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} x f(x, 0, z) dx.
 \end{aligned}$$

После замены  $t \rightarrow -t$  во втором интеграле первый, второй и третий интегралы взаимно уничтожаются. Таким образом,

$$\int_A (\mathfrak{D}f)(x, y, z) dx dy dz = \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} x f(x, 0, z) dx.$$

Отсюда, заменяя  $f$  на  $rf$  и интегрируя внутренний интеграл по частям, получаем (13), что и требовалось доказать.

**Лемма 2.** Пусть  $f \in C^7(A)$ . Тогда

$$\begin{aligned}
 & \int_A (\mathfrak{D}pql_1^2 l_2^2 f)(x, y, z) dx dy dz = \\
 & = - \int_{-1}^1 (l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, 0) dz - (ql_1 l_2^2 f)(v_3) - (ql_2 l_1^2 f)(v_1) + \\
 & + \left[ (ql_1^2 f)(v_2) - (ql_1^2 f)(v_1) + (ql_2^2 f)(v_2) - (ql_2^2 f)(v_3) \right]
 \end{aligned}$$

$$+ (l_1^2 l_2 f)(v_1) - (l_1^2 l_2 f)(v_2) + (l_1 l_2^2 f)(v_2) - (l_1 l_2^2 f)(v_3)] / h. \quad (14)$$

**Доказательство.** В равенстве (13) заменим  $f$  на  $l_1^2 l_2^2 f$  и вычислим отдельно первый и второй интегралы в правой части полученного выражения. Поскольку операторы  $l_1$  и  $l_2$  являются дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами, они коммутируют. Применяя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^h (1 - (z/h))(l_1^2(l_2^2 f))(1 - (z/h), 0, z) dz = \\ & = -(l_1 l_2^2 f)(v_3) + [(l_2^2 f)(v_2) - (l_2^2 f)(v_3)] / h \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} & \int_0^h ((z/h) - 1)(l_2^2(l_1^2 f))((z/h) - 1, 0, z) dz = \\ & = (l_2 l_1^2 f)(v_1) - [(l_1^2 f)(v_2) - (l_1^2 f)(v_1)] / h. \end{aligned}$$

(Здесь использован тот факт, что если  $g_1(z) = f(1 - (z/h), 0, z)$  и  $g_2(z) = f((z/h) - 1, 0, z)$ , то их дифференциалы имеют вид  $dg_1(z) = (l_1 f)(1 - (z/h), 0, z) dz$ ,  $dg_2(z) = (l_2 f)((z/h) - 1, 0, z) dz$ .)

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \int_A (\mathfrak{D} p l_1^2 l_2^2 f)(x, y, z) dx dy dz = \\ & = - \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} (l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, z) dx - (l_1 l_2^2 f)(v_3) - \\ & - (l_2 l_1^2 f)(v_1) + [(l_1^2 f)(v_2) - (l_1^2 f)(v_1) + (l_2^2 f)(v_2) - (l_2^2 f)(v_3)] / h. \quad (15) \end{aligned}$$

Заменим в полученном равенстве  $f$  на  $q f$ . Учитывая, что оператор  $q$  коммутирует с  $l_1$  и  $l_2$ , вычисляем отдельно повторный интеграл:

$$\begin{aligned} & \int_0^h dz \int_{(z/h)-1}^{1-(z/h)} (q l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, z) dx = \int_{-1}^1 dx \int_0^{h(1-|x|)} (q l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, z) dz = \\ & = \int_{-1}^0 (l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, h(1+x)) + \int_0^1 (l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, h(1-x)) - \int_{-1}^1 (l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, 0) = \\ & = - \int_{-1}^1 (l_1^2 l_2^2 f)(x, 0, 0) dx + \\ & + [(l_1^2 l_2 f)(v_2) - (l_1^2 l_2 f)(v_1) + (l_2^2 l_1 f)(v_3) - (l_2^2 l_1 f)(v_2)] / h. \quad (16) \end{aligned}$$

Подставляя (16) в полученное из (15), приходим к (14).

Лемма 2 доказана.

**Лемма 3.** Пусть  $f \in C^6(A)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_A (\mathfrak{D}p^2 l_2^2 l_1 f)(x, y, z) dx dy dz &= \frac{1}{h} \int_0^h (pl_2^2 f) \left(1 - \frac{z}{h}, 0, z\right) dz + \\ &+ (pl_1 l_2 f)(v_1) - (pl_2^2 f)(v_3) - (l_2^2 f)(v_2) + (l_2^2 f)(v_3) - \\ &- (l_1 l_2 f)(v_2) + (l_1 l_2 f)(v_2) + [(pl_1 f)(v_2) - (pl_1 f)(v_1)]/h. \end{aligned} \quad (17)$$

**Доказательство.** Заменяем в равенстве (13) функцию  $f$  на  $pf$ . Учитывая, что при  $g_3(z) = f(x, 0, z)$  дифференциал  $dg_3(z)$  равен  $pf(x, 0, z) dz$ , имеем

$$\begin{aligned} \int_A (\mathfrak{D}p^2 f)(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right) (pf) \left(1 - \frac{z}{h}, 0, z\right) dz - \\ &- \int_0^h \left(\frac{z}{h} - 1\right) (pf) \left(\frac{z}{h} - 1, 0, z\right) dz - \\ &- \int_0^h f \left(1 - \frac{z}{h}, 0, z\right) dz + \int_0^h f \left(\frac{z}{h} - 1, 0, z\right) dz. \end{aligned}$$

Поскольку  $p$ ,  $l_1$  и  $l_2$  коммутируют, заменяя в полученном равенстве последовательно  $f$  на  $l_2 f$ , а затем  $f$  на  $l_1 f$  и используя формулу интегрирования по частям, получаем

$$\begin{aligned} \int_A (\mathfrak{D}p^2 l_2^2 f)(x, y, z) dx dy dz &= \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right) (l_2^2 p f) \left(1 - \frac{z}{h}, 0, z\right) dz - \\ &- \int_0^h (l_2^2 f) \left(1 - \frac{z}{h}, 0, z\right) dz - (l_2 f)(v_1) + (l_2 f)(v_2) + \\ &+ (pl_2 f)(v_1) - [(pf)(v_2) - (pf)(v_1)]/h, \end{aligned}$$

откуда после подобных преобразований следует (17).

Лемма 3 доказана.

Заменяя в равенстве (15)  $f$  на  $pf$ , получаем следующее утверждение.

**Лемма 4.** Пусть  $f \in C^7(A)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_A (\mathfrak{D}p^2 l_2^2 l_1^2 f)(x, y, z) dx dy dz &= (l_1 l_2^2 f)(v_3) - (l_1 l_2^2 f)(v_2) + (l_2 l_1^2 f)(v_2) - \\ &- (l_2 l_1^2 f)(v_1) - (l_1 l_2^2 p f)(v_3) + (l_2 l_1^2 p f)(v_1) + \\ &+ [(l_2^2 p f)(v_2) - (l_2^2 p f)(v_3) - (l_1^2 p f)(v_2) + (l_1^2 p f)(v_1)]/h. \end{aligned} \quad (18)$$

Правую часть равенства (18) можно переписать в виде  $\sum_{\nu=1}^3 (P_\nu(\partial) f)(v_\nu)$ , где оператор  $\partial = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$  и  $P_\nu: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  — соответствующие многочлены степеней не выше четвертой. Далее для каждого  $\nu \in \{1, 2, 3\}$  и  $\varepsilon > 0$  положим

$$\Omega_{\nu, \varepsilon} = \{x \in \mathbb{R}^3: |v_\nu| - \varepsilon < |x| < |v_\nu| + \varepsilon\}.$$

Применяя предложение 1.5.6 из [6], получаем такое следствие.

**Следствие 1.** Пусть  $\varepsilon > 0$  и  $f \in \mathfrak{B}(A, \mathbb{B}_R)$ , где  $\mathbb{B}_R$  — наименьший шар, содержащий  $\bigcup_{\nu=1}^3 \Omega_{\nu, \varepsilon}$ . Тогда справедливо равенство

$$\sum_{\nu=1}^3 (P_{\nu}(\partial) f)(x + v_{\nu}) = 0, \quad x \in \mathbb{B}_{\varepsilon}. \quad (19)$$

**4. Геометрические конструкции.** Описав около полуконуса  $A$  шар при различных значениях  $h$ , убеждаемся, что формула (3) верна. Заметим также, что величина  $r^*(A)$  равна значению  $r^*(K)$ , где  $K$  — равнобедренный треугольник с основанием 2 и высотой  $h$ , проведенной к основанию.

Пусть вершины полуконуса  $A$  расположены в соответствии с рис. 1, а и  $\overline{\mathbb{B}}_R = \{x \in \mathbb{R}^3: |x| \leq R\}$ . Докажем, что формулы (4)–(9) верны, где  $\text{MAX}_*(R, h)$  и  $\text{MIN}_*(R, h)$  — соответственно наибольшее и наименьшее расстояние от центра шара  $\overline{\mathbb{B}}_R$  до объекта  $*$  (вершины, ребра или грани) полуконуса  $\lambda A$  при всех возможных движениях  $\lambda \in \text{Mot}(A, \overline{\mathbb{B}}_R)$ . На рис. 1, б, в показано, при каком положении полуконуса достигаются значения  $\text{MAX}_{ABC}$  и  $\text{MIN}_{ABC}$ , откуда следует (4) и  $\text{MIN}_{ABC} \equiv 0$ .

Для определения остальных величин заметим, что эти экстремальные расстояния достигаются при расположениях треугольника  $ABC$  в наибольшем сечении шара, т. е. в круге, содержащем центр шара. Поэтому далее будут рассматриваться положения треугольника  $ABC$  в круге радиуса  $R$ . Поскольку в этом треугольнике углы  $\angle A = \angle C$  острые, то  $\text{MAX}_A(R, h) = \text{MAX}_C(R, h) = R$ .

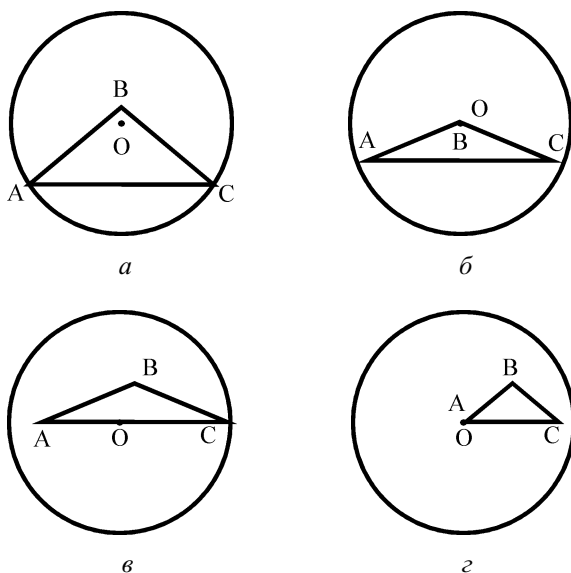


Рис. 2. Ближнее положение вершин  $B$  и  $A$ .

Решив геометрические задачи по нахождению упомянутых расстояний для соответствующих экстремальных положений  $\lambda A$  в  $\overline{\mathbb{B}}_R$ , изображенных на рис. 2–5, приходим к следующим результатам. Из рис. 2, а, б получаем (5), из рис. 2, в, г —



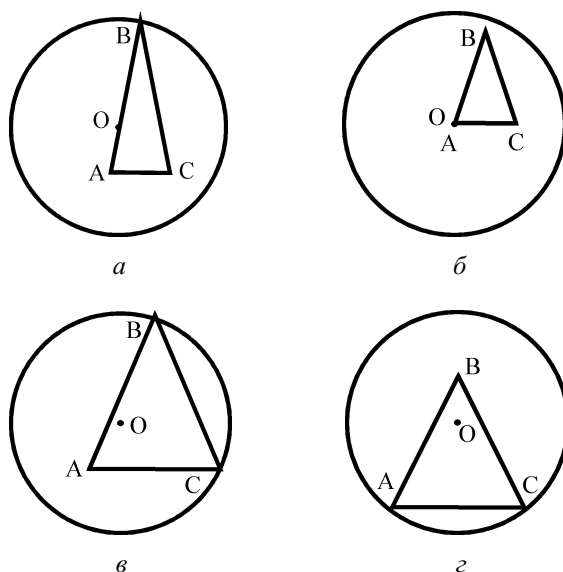


Рис. 3. Ближнее положение вершины  $A$  и дальнее положение стороны  $AC$ .

первую строку, из рис. 3,  $a, б$  – вторую, из рис. 3,  $в$  – третью строку формулы (6). Из рис. 3,  $г$  получаем значение  $\text{MAX}_{AC}(R, h)$  в (7).

Из рис. 4,  $a, б$  находим значение  $\text{MIN}_{AC}(R, h)$  в (7), из рис. 4,  $в$  – первую строку, из рис. 4,  $д$  – вторую строку формулы (8).

Из рис. 5,  $a, б$  получаем первую строку, из рис. 5,  $в$  – вторую строку формулы (9). Отметим, что на рис. 5,  $в$  изображено такое положение треугольника  $ABC$  в круге, что его высота, проведенная из вершины  $C$ , содержит центр  $O$ .

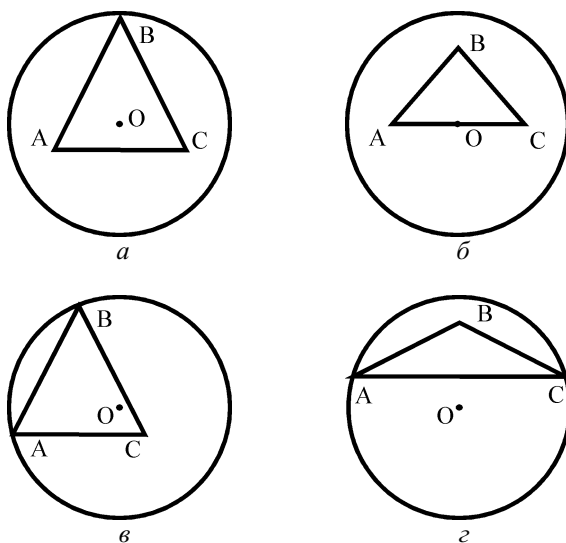
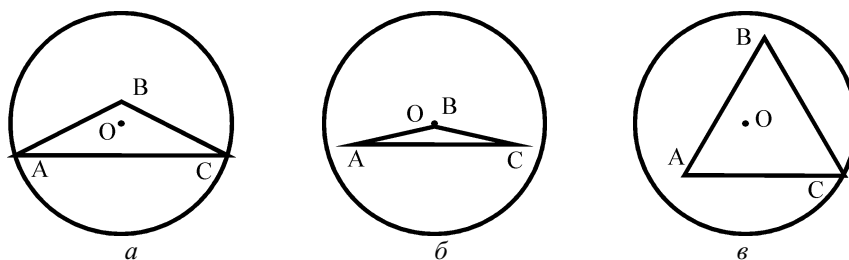
**5. Доказательство основного результата.** Перед доказательством основного результата приведем несколько вспомогательных утверждений. Заметим, что из геометрических соображений следует  $\text{Max}_{AB}(R, h) > \text{Max}_{AC}(R, h)$ . Далее, как обычно,  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – оператор Лапласа в  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbb{B}_{a,b} = \{x \in \mathbb{R}^3 : a < |x| < b\}$  – кольцо с радиусами  $a$  и  $b$ , где  $a, b \in \mathbb{R}$ . Исследуем некоторые свойства функций, имеющих нулевые интегралы по заданным множествам.

**Лемма 5.** Пусть  $0 < a < b < d < R$ ,  $f \in L(0; R)$ ,  $f = 0$  в  $(a; b) \cup (d; R)$  и при некоторых  $a_1, a_2$  таких, что  $a < a_1 < a_2 < b$ ,

$$\int_0^{\sqrt{d^2-x^2}} f(\sqrt{x^2+y^2}) dy = 0$$

для всех  $x \in (a_1, a_2)$ . Тогда  $f = 0$  в  $\mathbb{B}_{a,R}$ .

**Доказательство.** Выполним в данном интеграле замену  $t = \sqrt{x^2+y^2}$ . Тогда для всех перечисленных условий на входящие в интеграл параметры получаем равенство

Рис. 4. Ближнее положение стороны  $AC$  и дальнее положение стороны  $AB$ .Рис. 5. Ближнее положение стороны  $AB$ .

$$0 = \int_x^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \quad \forall x \in (a_1; a_2).$$

Поскольку функция  $f(t) = 0$  при  $t \in (a; b)$ , то

$$0 = \int_b^d \frac{f(t)t}{\sqrt{t^2 - x^2}} dt \quad \forall x \in (a_1; a_2). \quad (20)$$

Разложим в ряд Лорана функцию

$$\frac{t}{\sqrt{t^2 - x^2}} = \left(1 - \left(\frac{x}{t}\right)^2\right)^{-1/2} = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j-1)!!}{(2j)!!} \left(\frac{x}{t}\right)^{2j}, \quad |t| > x.$$

Подставляя разложение в (20), получаем

$$0 = \sum_{j=0}^{\infty} \left( \int_b^d \frac{f(t)}{t^{2j}} dt \right) \frac{(2j-1)!!x^{2j}}{(2j)!!} \quad \forall x \in (a_1; a_2).$$

Таким образом,

$$\int_b^d \frac{f(t)}{t^{2j}} dt = 0 \quad \text{для всех } j \in \mathbb{Z}_+.$$

Выполним в полученном интеграле замену  $z = 1/t^2$ . В результате получим  $\int_{1/d^2}^{1/b^2} z^{j-1} \frac{f(1/\sqrt{z})}{\sqrt{z}} dz = 0$ . Поскольку система многочленов  $\{1, z, z^2, \dots\}$  замкнута в пространстве  $C(1/d^2; 1/b^2)$ , то  $f(1/\sqrt{z})/\sqrt{z} = 0$  в  $(1/d^2; 1/b^2)$ , откуда непосредственно следует, что  $f(t) = 0$  в  $(b, d)$ . Учитывая равенство нулю функции  $f$  в  $(a; b) \cup (d; R)$ , получаем требуемое утверждение леммы.

Обозначим  $E(R) = \{\lambda v_j : \lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R), j \in \{1, 2, 3\}\}$ . Из теоремы 4.3.2 из [6] с учетом следствия 1 получаем следующий результат.

**Лемма 6.** Пусть  $R > r^*(A)$ , функция  $f$  принадлежит  $\mathfrak{B}(A, \mathbb{B}_R)$  и является радиальной. Тогда существует ненулевой полином  $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $P(\Delta)f = 0$  в  $E(R)$ .

Если множество  $E(R)$  является кольцом, то это кольцо с радиусами  $\min\{\text{MIN}_A, \text{MIN}_B\}$  и  $R$ . Если это объединение колец, то, применяя лемму 5, получаем следующее утверждение.

**Лемма 7.** Пусть  $R > r^*(A)$ , функция  $f$  принадлежит  $\mathfrak{B}^\infty(A, \mathbb{B}_R)$  и является радиальной. Тогда существует ненулевой полином  $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $P(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_{\min\{\text{MIN}_A, \text{MIN}_B\}, R}$ .

Далее докажем следующую лемму.

**Лемма 8.** Пусть  $R > \mathcal{P}(A)$ , функция  $f$  принадлежит  $\mathfrak{B}^\infty(A, \mathbb{B}_R)$  и является радиальной. Тогда существует ненулевой полином  $P: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{C}$  такой, что  $P(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_R$ .

**Доказательство.** Пусть  $F = P(\Delta)f = 0$  в  $\mathbb{B}_{\min\{\text{MIN}_A, \text{MIN}_B\}, R}$ , где  $P$  — ненулевой полином из предыдущей леммы. Доопределим  $F$  нулем вне  $\mathbb{B}_R$ . Из лемм 1–4 и определения  $\mathcal{P}(A)$  следует, что интегралы от  $F$  по всем прямым, расстояние до которых от начала координат не менее  $a = \min\{\text{MIN}_{AC}, \text{MIN}_{AB}\}$ , равны нулю. Отсюда по лемме 1.8.3 из [6] получаем  $F = 0$  в  $\mathbb{B}_{a, R}$ . Из (13) следует, что интегралы от  $F$  по всем плоскостям равны нулю. Тогда по лемме 1.8.3 из [6] получаем  $F = 0$  в  $\mathbb{B}_R$ , что завершает доказательство леммы.

**Доказательство теоремы 1.** Поскольку  $R > \mathcal{P}(A)$ , функцию  $f$  можно считать принадлежащей классу  $\mathfrak{B}^\infty(A, \mathbb{B}_R)$  (общий случай получаем отсюда применением стандартного метода сглаживания, см., например, §1.3.3 в [6]). Повторяя рассуждения из доказательства предложения 1.5.9 (там же) и учитывая (19), видим, что теорему достаточно доказать для радиальной функции. Повторяя теперь рассуждения из доказательства леммы 4.3.7 из [6] и используя лемму 8, получаем утверждение теоремы.

**6. Применения полученного результата.** Теорема 1 позволяет получить достаточное условие замкнутости в пространстве  $L_p(\mathbb{B}_R)$ ,  $1 \leq p < \infty$ , системы функций

$$\{\chi_A(\lambda^{-1}x) : \lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)\}. \tag{21}$$

Здесь, как обычно,  $\chi_A$  — индикатор (характеристическая функция) множества  $A$ , т. е.

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

**Теорема 2.** Пусть  $h > 0$ ,  $R > \mathcal{P}(A)$ . Тогда система функций (21) замкнута в пространстве  $L_p(\mathbb{B}_R)$  при любом  $1 \leq p < \infty$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi$  — линейный непрерывный функционал на пространстве  $L_p(\mathbb{B}_R)$  такой, что  $\varphi(\chi_A(\lambda^{-1}x)) = 0$  при всех  $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ . По теореме Рисса существует функция  $f \in L_q(\mathbb{B}_R)$ ,  $q = p/(p-1)$ , такая, что  $\varphi(g) = \int_{\mathbb{B}_R} f(x)g(x) dx$  для любой  $g \in L_p(\mathbb{B}_R)$ . Подставляя вместо  $g$  функции из (21), получаем  $\int_{\lambda A} f(x) dx = 0$  для всех  $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ , что означает  $f \in \mathfrak{B}(A, \mathbb{B}_R)$ . Отсюда, учитывая  $R > \mathcal{P}(A)$ , по теореме 1 получаем  $f = 0$ , значит,  $\varphi$  — нулевой функционал. Отсюда следует замкнутость системы (21) в  $L_p(\mathbb{B}_R)$ .

Теорема 2 доказана.

Отметим, что теорема 2 теряет силу при  $p = \infty$ , так как ненулевые тождественные константы не могут быть аппроксимированы указанным в теореме 2 способом.

Рассмотрим также применение теоремы 1 в теории отображений, сохраняющих меру. Здесь под  $\text{meas } E$  понимается мера Лебега множества  $E$ .

**Теорема 3.** Пусть  $h > 0$ ,  $R > \mathcal{P}(A)$  и  $f$  —  $C^1$ -диффеоморфизм  $\mathbb{B}_R$  на область  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ . Тогда если  $\text{meas } f(\lambda A) = \text{meas } \lambda A \forall \lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ , то  $\text{meas } f(E) = \text{meas } E$  для любого измеримого множества  $E \subset \mathbb{B}_R$ .

**Доказательство.** Пусть  $J_f$  — якобиан отображения  $f$ . По условию  $\int_{\lambda A} dx = \int_{f(\lambda A)} dx = \int_{\lambda A} |J_f| dx$  для всех  $\lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ . Отсюда  $\int_{\lambda A} (|J_f| - 1) dx = 0 \forall \lambda \in \text{Mot}(A, \mathbb{B}_R)$ . По теореме 1,  $|J_f| = 1$  в  $\mathbb{B}_R$ , откуда  $\int_E dx = \int_E |J_f| dx = \int_{f(E)} dx$  для любого измеримого множества  $E \subset \mathbb{B}_R$ , что и требовалось доказать.

1. Zalcman L. A bibliographic survey of Pompeiu problem // Approxim. Solutions Partial Different. Equat. / Eds B. Fuglede et al. — 1992. — P. 185–194.
2. Zalcman L. Supplementary bibliography to ‘A bibliographic survey of Pompeiu problem’ in Radon Transforms and Tomography // Comtemp. math. — 2001. — 278. — P. 69–74.
3. Williams S. A. A partial solution of the Pompeiu problem // Math. Ann. — 1976. — 223. — P. 183–190.
4. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. New results in integral geometry // Comtemp. math. — 2005. — 382. — P. 417–432.
5. Volchkov V. V., Volchkov Vit. V. Geometric aspects of the mean periodicity. — Donetsk: Donetsk Nat. Univ. Press, 2007. — 166 p.
6. Volchkov V. V. Integral geometry and convolution equations. — Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 2003. — 454 p.
7. Berenstein C. A., Gay R. Le probleme de Pompeiu locale // J. Anal. Math. — 1989. — 2. — P. 133–166.
8. Волчков В. В. О функциях с нулевыми интегралами по кубам // Укр. мат. журн. — 1991. — 43, № 6. — С. 859–863.
9. Машаров П. А. Экстремальные задачи о множествах с локальным свойством Помпейю // Доп. НАН України. — 2001. — № 7. — С. 25–29.
10. Машаров П. А. Решение локального варианта проблемы Помпейю для треугольника Рело // Вісн. Дніпропетр. ун-ту. Математика. — 2001. — Вип. 6. — С. 72–81.
11. Машаров П. А. Про циліндри з локальною властивістю Помпейю // Вісн. Донец. нац. ун-ту. Сер. А. Природ. науки. — 2000. — № 1. — С. 21–25.

Получено 08.02.08,  
после доработки — 17.05.08