УДК 517.5

В. Ф. Кириченко (Моск. гос. пед. ун-т, Россия),
В. М. Кузаконь (Одес. нац. академия пищевых технологий)

О ГЕОМЕТРИИ ГОЛОМОРФНЫХ ТОРСООБРАЗУЮЩИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НА ПОЧТИ ЭРМИТОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

The determinatiuon of conditions for the invariance of geometric objects under the action of a group of transformations is one of the most important problems of geometric research. In this paper, we study invariance conditions for almost Hermitian structures relative to the action of a local one-parameter group of diffeomorphisms generated by a developable vector field on a manifold. In addition, we investigate the relationship between developable (in particular, concircular) vector fields on Riemannian manifolds and locally concircular transformations of the metric of these manifolds.

Знаходження умов інваріантності геометричних об'єктів щодо дії тієї чи іншої групи перетворень є однією з найбільш актуальних задач геометричного дослідження. У цій роботі ми вивчаємо умови інваріантності майже ермітових структур щодо дії локальної однопараметричної групи дифеоморфізмів, породженої торсотвірним векторним полем на цьому многовиді. Крім того, вивчені взаємозв'язки між торсотвірними, зокрема концикулярними, векторними полями на ріманових многовидах і локально концикулярними перетвореннями метрики цих многовидів.

Пусть M — n-мерное гладкое многообразие, $\mathfrak{X}(M)$ — $C^\infty(M)$-модуль гладких векторных полей на M, d — оператор внешнего дифференцирования, $\mathfrak{L}_X$ — оператор дифференцирования Ли в направлении векторного поля X. Все многообразия, тензорные поля и подобные объекты предполагаются гладкими класса C^∞.

Зафиксируем векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Известно, что оно порождает локальную однопараметрическую группу диффеоморфизмов $\mathcal{F}_t$ многообразия M. Рассмотрим дифференциально-геометрическую структуру $\mathcal{S} = \{\,T_1, \ldots, T_N\,\}$ на M, определенную конечным числом тензорных полей на M. Примерами таких структур являются римановы структуры $(N = 1)$, почти эрмитовы структуры $(N = 2)$, почти контактные структуры $(N = 3)$ и т. п.

Определение 1. *Структуру $\mathcal{S}$ назовем ξ-инвариантной, если каждый из тензоров, ее составляющих, инвариантен относительно операций увлечения, порожденных элементами локальной группы $\mathcal{F}_t$* [1].

Лемма 1 [1]. *Структура $\mathcal{S}$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{L}_\xi(T_k) = 0, \qquad k = 1, \ldots, N.$$

Пример [1]. Риманова структура $g = \langle\,\cdot,\cdot\,\rangle$ ξ-инвариантна тогда и только тогда, когда ξ — векторное поле Киллинга, т. е.

$$\langle \nabla_X \xi, Y\rangle + \langle \nabla_Y \xi, X\rangle = 0, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M),$$

где ∇ — оператор Кошуля римановой связности метрики g.

Определение 2. *Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется торсообразующим, если $\nabla\xi = \rho id + a \otimes \xi$ для некоторых $\rho \in C^\infty(M)$ и $a \in \mathfrak{X}^*(M)$. Дифференциальную 1-форму a и функцию ρ назовем характеристическими. Торсообразующее векторное поле называется концикулярным, если $da = 0$, спецконцикулярным, если $a = 0$, и рекуррентным, если $\rho = 0$.*

Пусть $\mathcal{S} = \{g, J\}$ — почти эрмитова (кратко $A\mathcal{H}$-) структура на M, $J^2 = -\mathrm{id}$, $\langle JX, JY\rangle = \langle X, Y\rangle$ (эндоморфизм J называется *почти комплексной структурой*).

Определение 3. *Векторное поле $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ называется голоморфным, если эндоморфизм J ξ-инвариантен.*

Теорема 1. *Торсообразующее векторное поле ξ на почти эрмитовом многообразии M голоморфно тогда и только тогда, когда*

$$\nabla_\xi(J)X = a(JX)\xi - a(X)J\xi, \qquad X \in \mathfrak{X}(M). \tag{1}$$

Доказательство. В принятых обозначениях имеем

$$\begin{gathered}
\mathfrak{L}_\xi(J)X = \mathfrak{L}_\xi(JX) - J\mathfrak{L}_\xi(X) = \\
= [\xi, JX] - J([\xi, X]) = \\
= \nabla_\xi(JX) - \nabla_{JX}\xi - J(\nabla_\xi X) + J\nabla_X\xi = \\
= \nabla_\xi(J)X + J\nabla_\xi X - \nabla_{JX}\xi - J(\nabla_\xi X) + J\nabla_X\xi = \\
= \nabla_\xi(J)X - \nabla_{JX}\xi + J\nabla_X\xi = \\
= \nabla_\xi(J)X - \rho\circ J(X) - a\circ J(X)\xi + J(\rho X) + J(a(X)\xi) = \\
= \nabla_\xi(J)X - a\circ J(X)\xi + J(a(X)\xi) = \\
= \nabla_\xi(J)X - a(JX)\xi + a(X)J\xi,
\end{gathered}$$

откуда непосредственно следует, что условие $\mathfrak{L}_\xi(J) = 0$ ξ-инвариантности почти комплексной структуры J равносильно справедливости тождества (1).

Теорема 1 доказана.

Напомним [2], что почти эрмитова структура называется *келеровой*, если она интегрируема и имеет замкнутую фундаментальную форму $\Omega(X, Y) = \langle X, JY\rangle$. Необходимое и достаточное условие келеровости почти эрмитовой структуры имеет вид

$$\nabla_X(J)Y = 0, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{2}$$

Теорема 2. *Торсообразующее векторное поле на келеровом многообразии M будет голоморфным тогда и только тогда, когда оно спецконциркулярно.*

Доказательство. Пусть ξ — торсообразующее голоморфное векторное поле на келеровом многообразии. В силу тождеств (1) и (2)

$$a(JX)\xi - a(X)J\xi = 0, \qquad X \in \mathfrak{X}(M),$$

откуда легко следует, что $a = 0$, т. е. ξ — спецконциркулярное векторное поле.

Обратно, если ξ — спецконциркулярное векторное поле на келеровом многообразии M, то, по определению, $a = 0$, и с учетом (2) видим, что соотношение (1) выполняется на M тождественно, а значит, ξ — голоморфное векторное поле.

Теорема 2 доказана.

Пусть ξ — торсообразующее векторное поле на почти эрмитовом многообразии M. Обозначим через ω ковекторное поле, дуальное векторному полю ξ. Имеем

$$\omega(Y) = \langle \xi, Y \rangle, \qquad Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Применим к обеим частям этого тождества оператор ∇_X:

$$\nabla_X(\omega)Y = \langle \nabla_X \xi, Y \rangle = \langle a(X)\xi, Y \rangle + \rho \langle X, Y \rangle.$$

Таким образом,

$$\nabla_X(\omega)Y = a(X)\omega(Y) + \rho\langle X, Y \rangle, \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M). \tag{3}$$

В частности,

$$d\omega(X, Y) = \nabla_X(\omega)Y - \nabla_Y(\omega)X = a(X)\omega(Y) - a(Y)\omega(X) = a \wedge \omega(X, Y).$$

Следовательно,

$$d\omega = a \wedge \omega. \tag{4}$$

Дифференциальное продолжение этого тождества имеет вид

$$da \wedge \omega = 0. \tag{5}$$

Соотношение (4) показывает, что гиперраспределение на M, порожденное дифференциальной формой ω, инволютивно и, значит, вполне интегрируемо. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 3. *Гиперраспределение на почти эрмитовом многообразии, порожденное дифференциальной формой, дуальной голоморфному торсообразующему векторному полю на этом многообразии, вполне интегрируемо.*

Замечание. Замена соотношения (5) на более сильное условие $da = 0$ приводит к более узкому классу — классу концииркулярных векторных полей, для которого полученные результаты сохраняют силу. При этом соотношение (5) обращается в тождество.

Особый интерес представляет случай $\omega = a$. В этом случае из (4) следует, что $da = 0$, т. е. ξ — концииркулярное векторное поле. Уравнение (3) в этом случае принимает вид

$$\nabla\omega = \omega \otimes \omega + \rho g. \tag{6}$$

Здесь ρ — гладкая функция на многообразии M, с необходимостью равная

$$\rho = \frac{1}{n}(\delta\omega - \|\omega\|^2),$$

где $\delta\omega = g^{ij}\omega_{i,j}$ — кодифференциал формы ω, $\|\omega\|$ — норма этой формы.

Уравнение (6) было введено Яно в [3] и называется *уравнением Яно*. Укажем его геометрический смысл. Как мы видели, дифференциальная форма ω, дуальная торсообразующему векторному полю ξ, в случае ее совпадения с характеристической формой a замкнута и, значит, локально точна. Следовательно, существует открытое покрытие $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ многообразия M такое, что для любого $\alpha \in A$ существует $\sigma_a \in C^\infty(U_\alpha) \,\&\, \omega|_{U_\alpha} = d\sigma_\alpha$. Рассмотрим функции σ_α как определяющие функции локально конформного преобразования $g|_{U_\alpha} \longrightarrow \tilde{g} = e^{2\sigma_\alpha} g|_{U_\alpha}$ метрики многообразия M. Тогда выполнимость уравнения Яно на многообразии M равносильна конциркулярности построенного нами локально конформного преобразования его метрики (напомним, что конформное преобразование метрики называется *конциркулярным преобразованием,* если оно любую геодезическую окружность переводит в геодезическую окружность). Заметим также, что эти рассуждения, очевидно, остаются в силе для любых римановых многообразий. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Торсообразующее векторное поле на римановом многообразии, дуальная* 1-*форма которого совпадает с характеристической* 1-*формой, является конциркулярным векторным полем и внутренним образом порождает конциркулярное локально конформное преобразование метрики этого многообразия.*

1. *Аминова А. В.* Проективные преобразования псевдоримановых многообразий. – М.: Янус-К, 2003. – 619 с.
2. *Kaehler E.* Uber eine bemerkenswerte Hermitische Metrik //Abh. Math. Sem. Hamburgischen Univ. – 1933. – **9**. – P. 173 – 186.
3. *Yano K.* Concircular geometry. I–4 // Proc. Imp. Acad. Jap. – 1940. – **16**. – P. 195 – 200, 354 – 360, 442 – 448, 505 – 511.

Получено 25.09.12