УДК 517+519.2

И. П. Мазур (Физ.-техн. ин-т низких температур НАН Украины, Харьков)

ТЕОРЕМА СКИТОВИЧА – ДАРМУА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ И КОМПАКТНЫХ ВПОЛНЕ НЕСВЯЗНЫХ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП *

The classical Skitovich – Darmois theorem states that the Gaussian distribution on the real line can be characterized by the independence of two linear forms of n independent random variables. In this paper, we generalize the Skitovich – Darmois theorem to discrete abelian groups, compact totally disconnected abelian groups, and some other classes of locally compact Abelian groups. In contrast to the previous research, we consider n linear forms of n independent random variables.

Класична теорема Скитовича – Дармуа стверджує, що гауссівські розподіли на дійсній прямій характеризуються незалежністю двох лінійних форм від n незалежних випадкових величин. У цій статті теорему Скитовича – Дармуа узагальнено на дискретні абелеві групи, компактні цілком незв'язні абелеві групи, а також на деякі інші класи локально компактних абелевих груп. На відміну від попередніх досліджень розглядаються n лінійних форм від n незалежних випадкових величин.

1. Введение. Классическая теорема Скитовича – Дармуа гласит ([1, 2], см. также [3], гл. 3): Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины, α_i и β_i — ненулевые константы. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ независимы. Тогда все случайные величины ξ_i гауссовские.

Теорема Скитовича – Дармуа обобщалась на различные алгебраические структуры, такие как конечномерные и бесконечномерные линейные пространства, симметрические пространства, квантовые группы, локально компактные абелевы группы [4 – 13]. Особенно большое внимание было уделено обобщению этой теоремы на локально компактные абелевы группы. При этом коэффициентами линейных форм были топологические автоморфизмы групп, а количество линейных форм было равно двум. В настоящей статье мы продолжаем данные исследования. Принципиальное отличие от предыдущих работ состоит в том, что мы изучаем n независимых линейных форм от n независимых случайных величин. Необходимость изучения в групповой ситуации n линейных форм от n независимых случайных величин связана со следующим обстоятельством.

Рассмотрим независимые случайные величины ξ_i со значениями в локально компактной абелевой группе X и линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$, где $\alpha_i, \beta_i, i = 1, 2, \ldots, n,$ — топологические автоморфизмы X. Основную задачу, которая возникает при обобщении теоремы Скитовича – Дармуа на группы, можно сформулировать так: для каких групп из независимости линейных форм L_1 и L_2 следует, что распределения случайных величин ξ_i либо гауссовские, либо являются распределениями, которые можно рассматривать как аналоги гауссовских распределений? Решить эту задачу на произвольных локально компактных абелевых группах оказалось достаточно сложно. Поэтому она изучалась для различных классов локально компактных абелевых групп, таких как конечные [5], дискретные периодические группы [8], компактные [7]. Было доказано, что в каждом из рассматриваемых классов групп, вообще говоря, теорема Скитовича – Дармуа не верна, и были описаны группы, на которых она справедлива. Оказалось, что это очень специальные группы.

* Выполнена при частичной поддержке совместной украинско-французской программы „Дніпро 2013-2014. Ймовірнісні задачі в спектральній теорії та на групах”.

Ситуация принципиально меняется, если рассматривать n линейных форм от n случайных величин. В работе [14] доказано, что если X — конечная абелева группа, то из независимости n линейных форм от n независимых случайных величин следует, что эти случайные величины имеют идемпотентные распределения. Отметим, что идемпотентные распределения на конечных абелевых группах являются аналогами гауссовских распределений на прямой. Другими словами, теорема Скитовича – Дармуа для n линейных форм справедлива на конечных абелевых группах.

В данной работе мы усиливаем результаты [14]. В пункте 3 доказывается, что теорема Скитовича – Дармуа для n линейных форм от n независимых случайных величин справедлива для дискретных абелевых групп. В пункте 4 этот результат обобщается на существенно более широкий класс групп. Наконец, в пункте 5 полностью описываются компактные вполне несвязные абелевы группы, для которых справедлива теорема Скитовича – Дармуа в случае n линейных форм от n независимых случайных величин. Отметим, что полученные в статье результаты опираются на изученный автором в [14] случай конечных абелевых групп. Кроме того, все основные теоремы в случае двух линейных форм и двух случайных величин были доказаны ранее в работах [10 – 13].

2. Определения и обозначения. Отметим, что в дальнейшем мы неоднократно будем использовать результаты, приведенные в [18].

На протяжении всей статьи X обозначает локально компактную абелеву группу, удовлетворяющую второй аксиоме счетности. Множество всех компактных элементов группы X обозначим через b_X. Отметим также, что b_X — замкнутая подгруппа X. Если каждый элемент группы X имеет конечный порядок, то группа X называется периодической группой. Если порядки всех элементов группы X ограничены, то группа X называется ограниченной.

Пусть $\{X_\lambda\}$, $\lambda \in \Lambda$, — непустое семейство групп. Обозначим через $\mathbf{P}_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ прямое произведение групп X_λ. Мы будем рассматривать прямые произведения только компактных групп. Слабое прямое произведение групп X_λ обозначим через $\mathbf{P}^*_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$. Мы будем рассматривать слабые прямые произведения только дискретных групп. Если $X = X_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$, то прямое произведение групп X_λ обозначаем через $X^{\mathfrak{n}}$, где $\mathfrak{n}$ — кардинальное число множества Λ, а их слабое прямое произведение — через $X^{\mathfrak{n}*}$. Обозначим через $\aleph_0$ кардинальное число счетного множества. Пусть $\mathrm{Aut}(X)$ — группа топологических автоморфизмов группы X. Подгруппа G группы X называется характеристической, если для любого $\alpha \in \mathrm{Aut}(X)$ выполняется $\alpha(G) = G$. Положим $X_{(m)} = \{x \in X | mx = 0\}$. Отметим, что $X_{(m)}$ — характеристическая подгруппа X для любого целого числа m. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество простых чисел, через $\triangle_p$ группу целых p-адических чисел, через $\mathbb{Z}(p)$ циклическую группу порядка p. Назовем периодическую группу X p-примарной, если порядок любого элемента группы X есть степень некоторого простого числа p. Пусть $Y = X^*$ — группа характеров группы X. Значение характера $y \in Y$ на элементе $x \in X$ обозначим через (x, y). Пусть B — непустое подмножество X. Положим

$$A(Y, B) = \{y \in Y : (x, y) = 1, x \in B\}.$$

Множество $A(Y, B)$ называется аннулятором B в Y. Аннулятор $A(Y, B)$ — замкнутая подгруппа в Y. Отметим, что если G — замкнутая подгруппа группы X, то $G = A\big(X, A(Y, G)\big)$. Пусть α — непрерывный эндоморфизм группы X. Обозначим через $\tilde{\alpha}$ эндоморфизм группы Y, сопряженный к α, определяемый по формуле $(\alpha x, y) = (x, \tilde{\alpha} y)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$. Тождественный автоморфизм группы обозначим через I.

Пусть μ — распределение на X. Обозначим через $\sigma(\mu)$ носитель распределения μ. Пусть $x \in X$. Обозначим через E_x вырожденное распределение, сосредоточенное в x. Пусть K — компактная подгруппа группы X. Обозначим через m_K распределения Хаара компактной подгруппы K, а через $I(X)$ множество сдвигов таких распределений, т. е. распределений вида $m_K * E_x$, где K — компактная подгруппа X, $x \in X$. Распределения класса $I(X)$ называются идемпотентными распределениями. Положим $\bar{\mu}(M) = \mu(-M)$, где M — борелевское подмножество в X. Характеристическую функцию распределения μ определим по формуле

$$\hat{\mu}(y) = \int\limits_X (x, y) d\mu(y), \quad y \in Y.$$

Отметим, что $\hat{\bar{\mu}}(y) = \overline{\hat{\mu}(y)}$. Положим $F_\mu = \big\{y \in Y : \hat{\mu}(y) = 1\big\}$. Тогда F_μ — подгруппа группы Y, $\sigma(\mu) \subset A(X, F_\mu)$, функция $\hat{\mu}(y)$ является F_μ-инвариантной, т. е. $\hat{\mu}(y + h) = \hat{\mu}(y)$, $y \in Y$, $h \in F_\mu$. Характеристическая функция m_K имеет вид

$$\hat{m}_K(y) = \begin{cases} 1, & y \in A(Y, K), \\ 0, & y \notin A(Y, K). \end{cases} \tag{1}$$

Распределение μ на группе X называется гауссовским, если его характеристическую функцию можно представить в виде

$$\hat{\mu}(y) = (x, y) \exp\big\{ - \varphi(y)\big\}, \quad y \in Y,$$

где $x \in X$, функция $\varphi(y)$ непрерывна, неотрицательна и удовлетворяет уравнению

$$\varphi(u + v) + \varphi(u - v) = 2\big(\varphi(u) + \varphi(v)\big), \quad u, v \in Y.$$

Обозначим через $\Gamma(X)$ множество всех гауссовских распределений на X. Отметим, что носитель гауссовского распределения совпадает с классом смежности группы X по некоторой связной подгруппе [19].

3. Теорема Скитовича – Дармуа для дискретных абелевых групп. В работе [14] был доказан такой аналог теоремы Скитовича – Дармуа:

Теорема 1. *Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в конечной абелевой группе X и распределениями μ_i. Если линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\xi_i$, где $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, независимы, то $\mu_i \in I(X), i = 1, 2, \ldots, n$. Более того, если мы положим $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, то независимость линейных форм L_j влечет, что $\mu_i = m_K * E_{x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Целью настоящего пункта является доказательство того факта, что теорема 1 справедлива для дискретных абелевых групп. Для этого нам понадобятся некоторые леммы.

Лемма 1 [14]. *Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины со значениями в локально компактной абелевой группе X и распределениями μ_i. Линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\xi_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, независимы тогда и только тогда, когда характеристические функции $\hat{\mu}_i(y)$ удовлетворяют уравнению*

$$\prod_{i=1}^n \hat{\mu}_i \left(\sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{ij} u_j \right) = \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^n \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij} u_j), \quad u_j \in Y. \tag{2}$$

Далее нам понадобятся некоторые понятия из теории линейных пространств. Пусть L — линейное пространство, M — линейное подпространство конечной коразмерности в L. Обозначим через $\operatorname{codim} M$ коразмерность M. Пусть γ — линейный оператор, действующий на L. Обозначим через $\operatorname{Ker}\ \gamma$ ядро γ. Пусть $\{L_i\}_{i=1}^n$ — семейство линейных пространств. Обозначим через $\oplus_{i=1}^n L_i$ прямую сумму L_i, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2. *Пусть Y — линейное пространство, $\tilde{\alpha}_{ij}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, — обратимые линейные операторы, действующие на Y. Предположим, что $\tilde{\alpha}_{1j} = \tilde{\alpha}_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Пусть $\{E_i\}_{i=1}^n$, $\{F_i\}_{i=1}^n$ — семейства линейных подпространств Y конечной коразмерности, удовлетворяющие условиям*

$$\tilde{\alpha}_{ij}(E_j) \subset F_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{codim} F_i \geq \sum_{i=1}^n \operatorname{codim} E_i. \tag{4}$$

Тогда $E_i = F_j = F$, где F — линейное подпространство в Y и $\tilde{\alpha}_{ij}(F) = F$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Положим $\operatorname{codim} F_i = k_i$, $\operatorname{codim} E_i = m_i$. Тогда неравенство (4) примет вид

$$\sum_{i=1}^n k_i \geq \sum_{i=1}^n m_i. \tag{5}$$

Поскольку $\tilde{\alpha}_{ij}$ обратимы, имеем

$$\operatorname{codim} \tilde{\alpha}_{ij}(E_j) = m_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Из (3) и (6) следует, что

$$m_i \geq k_j, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Из (7) получаем

$$\min_{1 \leq i \leq n} m_i \geq \max_{1 \leq j \leq n} k_j.$$

Отсюда и из (5) следует, что

$$\sum_{i=1}^n k_i \geq \sum_{i=1}^n m_i \geq n \max_{1 \leq j \leq n} k_j. \tag{8}$$

Следовательно, (8) влечет

$$k_j = k, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

и принимает вид

$$nk \geq \sum_{i=1}^n m_i \geq nk,$$

откуда следует, что $\sum_{i=1}^n m_i = nk$. Учитывая это, неравенство (7) и равенство (9), имеем $m_i = k$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Отсюда и из (3) вытекает, что

$$\tilde{\alpha}_{ij}(E_j) = F_i, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{10}$$

Из (10) и равенств $\tilde{\alpha}_{1j} = \tilde{\alpha}_{i1} = I, i, j = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$F_1 = \tilde{\alpha}_{1j}(E_j) = I(E_j) = E_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$F_i = \tilde{\alpha}_{i1}(E_1) = I(E_1) = E_1, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

откуда следует

$$E_i = F_j = F, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{11}$$

где F — подпространство Y. Из (10) и (11), в свою очередь, следует, что $\tilde{\alpha}_{ij}(F) = F$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 2 доказана.

Пусть p — простое число. Элементарной p-группой назовем абелеву группу, каждый элемент которой, за исключением нуля, имеет порядок p. Локально компактная абелева элементарная p-группа топологически изоморфна группе вида $\mathbb{Z}^{\mathfrak{n}}(p) \times \mathbb{Z}^{\mathfrak{m}*}(p)$, где $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{m}$ — кардинальные числа [18] (формула (25.29)).

Лемма 3. *Пусть Y — локально компактная абелева элементарная p-группа и $\hat{\mu}_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — неотрицательные характеристические функции на Y, удовлетворяющие уравнению* (2), *где $\tilde{\alpha}_{ij} \in \mathrm{Aut}(Y)$, $\tilde{\alpha}_{1j} = \tilde{\alpha}_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Предположим, что фактор-группы Y/F_{μ_i} конечны. Тогда $F_{\mu_i} = F$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где F — подгруппа в Y, и $\tilde{\alpha}_{ij}(F) = F$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Отметим, что Y — линейное пространство над полем $\mathbb{Z}(p)$. При этом подгруппы Y — линейные подпространства Y, автоморфизмы группы Y — обратимые линейные операторы. Пусть H — подгруппа Y. Фактор-группа Y/H конечна тогда и только тогда, когда конечна коразмерность H как линейного подпространства в Y.

Пусть π — отображение из Y^n в Y^n, задаваемое формулой

$$\pi(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{1j} u_j, \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{2j} u_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{nj} u_j \right), \tag{12}$$

где $u_j \in Y$. Тогда π — линейный оператор, вообще говоря, не обратимый.

Положим $N = \pi^{-1}(\oplus_{i=1}^{n} F_{\mu_i})$. Очевидно, что

$$\operatorname{codim} \oplus_{i=1}^{n} F_{\mu_i} \geq \operatorname{codim} N, \tag{13}$$

откуда также следует

$$\operatorname{codim} N < \infty. \tag{14}$$

Пусть ϕ_i — проекция на i-е координатное подпространство Y^n. Положим $E_i = \phi_i(N)$. Тогда E_i — подпространство Y. Покажем, что семейства линейных подпространств $\{E_i\}_{i=1}^{n}$, $\{F_{\mu_i}\}_{i=1}^{n}$ удовлетворяют условиям (3), (4). Очевидно, что $N \subseteq (\oplus_{i=1}^{n} E_i)$, и следовательно,

$$\operatorname{codim} N \geq \operatorname{codim} \oplus_{i=1}^{n} E_i. \tag{15}$$

Из (14) и (15) следует, что $\operatorname{codim} E_j < \infty$.

Из (15) и (13) получаем

$$\operatorname{codim} \oplus_{i=1}^{n} F_{\mu_i} \geq \operatorname{codim} \oplus_{i=1}^{n} E_i. \tag{16}$$

Неравенство (16) влечет

$$\sum_{i=1}^{n} \operatorname{codim} F_{\mu_i} \geq \sum_{i=1}^{n} \operatorname{codim} E_i.$$

Положим в (2) $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in N$. Тогда левая часть уравнения (2) равна 1 и мы имеем

$$1 = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij} u_j), \quad (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in N. \tag{17}$$

Зафиксируем j. Тогда для каждого $u \in E_j$ найдется $(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in N$ такой, что $u_j = u$. Отсюда, из (17) и $0 \leq \hat{\mu}_i(y) \leq 1$, $y \in Y$, следует, что $\hat{\mu}_i(\tilde{\alpha}_{ij} u) = 1$, $u \in E_j$. Следовательно, справедливы включения

$$\tilde{\alpha}_{ij}(E_j) \subset F_{\mu_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

В результате получаем, что выполнены условия леммы 3. Следовательно, $F_{\mu_i} = F$, где F — подгруппа Y и $\tilde{\alpha}_{ij}(F) = F$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Лемма 3 доказана.

Следующая лемма непосредственно следует из теоремы 1 и леммы 1.

Лемма 4. *Пусть Y — конечная абелева группа, $\hat{\mu}_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — неотрицательные характеристические функции на Y, удовлетворяющие уравнению* (2), *где $\tilde{\alpha}_{ij} \in \operatorname{Aut}(Y)$, $\tilde{\alpha}_{1j} = \tilde{\alpha}_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $F_{\mu_i} = F$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где F — подгруппа в Y, и $\tilde{\alpha}_{ij}(F) = F$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.*

Следующая лемма при $n = 2$ была доказана в [13] (см. также [15], лемма 13.15). Отметим, что наше доказательство леммы 5 отлично от доказательства соответствующей леммы для $n = 2$ из [13] и не опирается на нее.

Лемма 5. *Пусть X — дискретная абелева группа, а ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями m_{K_i}, где K_i — конечные подгруппы X. Тогда из независимости линейных форм $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_i$, где $\alpha_{ij} \in \operatorname{Aut}(X)$, $\alpha_{i1} = \alpha_{1j} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, следует, что $K_i = K$, где K — некоторая подгруппа группы X, и $\alpha_{ij}(K) = K$.*

Доказательство. Покажем вначале, что задача сводится к случаю, когда X — p-примарная ограниченая группа.

Поскольку все K_i содержатся в периодической части группы X и периодическая часть X является характеристической подгруппой, без ограничения общности можем предполагать, что X — периодическая группа. Пусть N — произведение порядков подгрупп K_i. Тогда $K_i \subset X_{(N)}$. Подгруппа $X_{(N)}$ — ограниченная группа. Кроме того, $X_{(N)}$ — характеристическая подгруппа. Поэтому без ограничения общности можем считать, что X — ограниченная периодическая группа.

Для произвольного $p \in \mathcal{P}$ обозначим через X_p p-примарную компоненту группы X. Отметим, что X — слабое прямое произведение подгрупп X_p и X_p — характеристическая подгруппа группы X.

Для того чтобы доказать утверждение, достаточно показать, что совпадают проекции K_i на X_p для каждого фиксированного p и сужения автоморфизмов α_{ij} на проекции K_i на X_p являются автоморфизмами этих проекций. Пусть ξ_{ip} — проекция случайной величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, на X_p. Случайные величины ξ_{ip} независимы, а их распределения — распределения Хаара на некоторых конечных подгруппах X_p. Положим $L_{jp} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \xi_{ip}$. Из независимости L_j следует, что L_{jp} независимы. Таким образом, задача сводится к случаю, когда $X = X_p$.

Поэтому без ограничения общности будем предполагать, что X — p-примарная ограниченная группа.

Из независимости линейных форм L_j согласно лемме 1 следует, что функции $\hat{\mu}_i(y) = \hat{m}_{K_i}(y)$, $y \in Y$, удовлетворяют уравнению (2). Обозначим $F_i = A(Y, K_i)$. Поскольку аннулятор конечной подгруппы — открытая подгруппа, F_i — открытые подгруппы в Y. Для доказательства леммы достаточно показать, что

$$F_i = F, \quad \tilde{\alpha}_{ij}(F) = F, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{18}$$

где F — некоторая подгруппа группы Y.

Рассмотрим сужение уравнения (2) на подгруппу $Y_{(p)}$. Согласно лемме 3 получаем, что $F_i \cap Y_{(p)} = H$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где H — некоторая подгруппа $Y_{(p)}$, и $\tilde{\alpha}_{ij}(H) = H$.

Принимая во внимание, что характеристические функции $\hat{m}_{K_i}(y)$ H-инвариантны и сужения автоморфизмов $\tilde{\alpha}_{ij}$ группы Y на H являются топологическими автоморфизмами H, рассматриваем уравнение, индуцированное уравнением (2), на фактор-группе Y/H, полагая $f_i\big([y]\big) = \hat{m}_{K_i}\big([y]\big)$ и $\hat{\alpha}_{ij}[y] = [\tilde{\alpha}_{ij} y]$, $y \in [y]$, $[y] \in Y/H$. Отметим, что $\hat{\alpha}_{ij}$ — топологические автоморфизмы группы Y/H.

Повторяя приведенные выше рассуждения и рассматривая при этом вместо группы Y фактор-группу Y/H, получаем индуцированное уравнение на фактор-группе группы Y/H. Поскольку X — дискретная ограниченная p-примарная группа, легко видеть, что за конечное число шагов мы придем к индуцированному уравнению с индуцированными характеристическими функциями $\bar{f}_i(y)$ на некоторой конечной группе $\bar{Y}$. Обозначим соответствующие индуцированные автоморфизмы группы $\bar{Y}$ через $\bar{\alpha}_{ij}$. Согласно лемме 4 получаем $\bar{F}_i = \big\{y \in \bar{Y}\colon \bar{f}_i(y) = 1\big\} = \bar{H}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, где $\bar{H}$ — некоторая подгруппа $\bar{Y}$, и $\bar{\alpha}_{ij}(\bar{H}) = \bar{H}$. Возвращаясь от индуцированного уравнения к исходному, убеждаемся, что F_i совпадают и $\tilde{\alpha}_{ij}(F_i) = F_i$.

Лемма 5 доказана.

Лемма 6 ([15], §13.11). *Пусть X — локально компактная абелева группа, ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n \geq 2$, — независимые случайные величины со значениями в X и распределениями μ_i, а α_i, β_i принадлежат $\mathrm{Aut}(X)$. Предположим, что линейные формы $L_1 = \alpha_1\xi_1 + \ldots + \alpha_n\xi_n$ и $L_2 = \beta_1\xi_1 + \ldots + \beta_n\xi_n$ независимы. Тогда существуют элементы $x_j \in X$, $j = 1, 2, \ldots, n$, такие, что носители распределений μ'_j всех случайных величин $\xi'_j = \xi_j + x_j$ содержатся в подгруппе, топологически изоморфной группе вида $\mathbb{R}^m \times K$, где K — некоторая компактная группа.*

Теперь можно доказать основной результат данного пункта.

Теорема 2. *Пусть X — дискретная абелева группа, а ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i. Тогда из независимости линейных форм $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$, где $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, следует, что $\mu_i = E_{x_i} * m_{G_i}$, где G_i — конечные подгруппы группы X, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$.*

Доказательство. Достаточно доказать теорему при предположении, что $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Действительно, линейные формы $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i, j = 1, 2, \ldots, n$, независимы тогда и только тогда, когда независимы линейные формы $\alpha_{1j}^{-1} L_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Поскольку

$$L_j = \alpha_{1j}\big(\xi_1 + \alpha_{1j}^{-1}\alpha_{2j}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1j}^{-1}\alpha_{nj}\xi_n\big), \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

без потери общности можно предполагать, что $\alpha_{1j} = I, j = 1, 2 \ldots, n$, т. е.

$$L_j = \xi_1 + \alpha_{2j}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nj}\xi_n, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Введем новые случайные величины $\eta_i = \alpha_{i1}\xi_i$ и топологические автоморфизмы $\gamma_{ij} = \alpha_{ij}\alpha_{i1}^{-1}$. Тогда линейные формы (19) в новых обозначениях примут вид

$$L_1 = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_n,$$

$$L_j = \eta_1 + \gamma_{2j}\eta_2 + \ldots + \gamma_{nj}\eta_n, , \quad j = 2, \ldots, n,$$

где случайные величины η_i независимы. Следовательно, можно предполагать, что $\alpha_{i1} = I$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

По лемме 1 функции $\hat{\mu}_i(y)$ удовлетворяют уравнению (2). Положим $\nu_i = \mu_i * \bar{\mu}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $\hat{\nu}_i(y) = \left|\hat{\mu}_i(y)\right|^2$, $y \in Y$, функции $\hat{\nu}_i(y)$ неотрицательны и также удовлетворяют уравнению (2). Покажем, что $\hat{\nu}_i(y) = \hat{m}_G(y)$, $y \in Y$, G — некоторая конечная подгруппа группы X.

По лемме 6 доказательство теоремы сводится к случаю, когда $X = b_X$, т. е. когда группа X является периодической.

Положим $K_i = A(X, F_{\nu_i})$. Тогда $\sigma(\nu_i) \subset K_i$.

Отметим, что для всех натуральных k функции $\hat{\nu}_i(y)$ удовлетворяют уравнению

$$\prod_{i=1}^{n} \hat{\nu}_i^k \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}_{ij} u_j \right) = \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\nu}_i^k (\tilde{\alpha}_{ij} u_j). \tag{20}$$

Очевидно, существуют пределы

$$\tilde{\nu}_i(y) = \lim_{k \to \infty} \hat{\nu}_i^k(y) = \begin{cases} 1, & y \in F_{\nu_i}, \\ 0, & y \notin F_{\nu_i}. \end{cases} \tag{21}$$

Легко проверить, что $\tilde{\nu}_i(y) = \hat{m}_{K_i}(y)$, $y \in Y$. Из (20) следует, что $\tilde{\nu}_i(y)$ также удовлетворяют уравнению (2). Следовательно, $\hat{m}_{K_i}(y)$ удовлетворяют уравнению (2). Пусть ζ_i — независимые случайные величины со значениями в X и распределениями m_{K_i}. Тогда из леммы 1 получаем, что линейные формы $\bar{L}_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\zeta_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимы. Таким образом, выполнены условия леммы 5, из которой вытекает, что $K_i = K$, где K — некоторая подгруппа X, и $\alpha_{ij}(K) = K$. Кроме того, по лемме 6 подгруппа K конечна. Поскольку $\sigma(\nu_i) \subset K$, случайные величины ξ_i принимают значения в конечной группе K. Из условий $\alpha_{ij}(K) = K$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, следует, что $\alpha_{ij} \in \mathrm{Aut}(K)$. Тогда согласно теореме 1 получаем, что $\mu_i = E_{x_i} * m_G$, где G — подгруппа группы K, $x_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 2 доказана.

Теорема 2 является обобщением основной теоремы [11], а именно, превращается в нее при $n = 2$.

Из теоремы 2 вытекает следующее утверждение, которое понадобится нам в дальнейшем.

***Следствие* 1.** *Пусть Y — компактная абелева группа и $\tilde{\alpha}_{ij} \in \mathrm{Aut}(Y)$, $\alpha_{1j} = \alpha_{i1} = I$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда все решения уравнения* (2) *в классе неотрицательных характеристических функций имеют вид*

$$\hat{\mu}_i(y) = \begin{cases} 1, & y \in E, \\ 0, & y \notin E, \end{cases} \tag{22}$$

где E — подгруппа Y, и $\tilde{\alpha}_{ij}(E) = E$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

4. Теорема Скитовича – Дармуа для произведения некоторых групп. Используем теорему 2 для доказательства того, что теорема Скитовича – Дармуа для n независимых линейных форм от n независимых случайных величин справедлива для некоторого достаточно широкого класса групп, включающего в себя дискретные абелевы группы. Нам понадобится следующая лемма.

Лемма 7. *Пусть локально компактная абелева группа H имеет вид $H = F \times S$, где F — дискретная периодическая абелева группа, удовлетворяющая условию*: (i) *для любого p подгруппа $F_{(p)}$ конечна, и S — компактная абелева группа. Тогда для любого элемента $h_0 \in H$ и любого конечного набора автоморфизмов $\beta_i \in \mathrm{Aut}(H)$, $i = 1, 2, \ldots, k$, существует компактная подгруппа Q группы H такая, что $h_0 \in Q$ и $\beta_i(Q) = Q$, $i = 1, 2, \ldots, k$.*

Лемма 7 для случая $k = 1$ была доказана в [13], и доказательство почти без изменений переносится на случай, когда k произвольно. Поэтому мы его опускаем.

Основным результатом статьи является следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть группа X имеет вид*

$$X = \mathbb{R}^m \times K \times D, \tag{23}$$

где $m \geq 0$, K — компактная вполне несвязная абелева группа, топологически изоморфная группе вида

$$\mathbf{P}_{p \in \mathcal{P}}(\triangle_p^{n_p} \times G_p), \tag{24}$$

n_p — некоторые целые неотрицательные числа, G_p — конечные p-примарные группы, а D — дискретная абелева группа. Пусть ξ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_k. Тогда из независимости линейных форм $L_j = \sum_{k=1}^n \alpha_{kj}\xi_k$, где $\alpha_{kj} \in \mathrm{Aut}(X)$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$, следует, что $\mu_k \in \Gamma(X) * I(X)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Доказательство. Теорема 3 при $n = 2$ была доказана в [13]. Мы будем следовать схеме доказательства, предложенной в [13]. Использовав те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 2, сведем задачу к случаю, когда $\alpha_{1j} = \alpha_{k1} = I$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$. Учитывая лемму 6, без ограничения общности можем предполагать, что группа D является периодической.

Пусть $G = K \times D$, $H = G^*$. Тогда $Y \cong \mathbb{R}^m \times H$. Чтобы избежать введения новых обозначений, будем предполагать, что $Y = \mathbb{R}^m \times H$. Пусть $y = (s, h)$, $s \in \mathbb{R}^m$, $h \in H$, — элементы Y. Рассмотрим группы характеров $F = K^*$ и $S = D^*$. Поскольку K — компактная вполне несвязная группа, F — дискретная периодическая группа. Поскольку D — дискретная периодическая группа, S — компактная вполне несвязная группа. Следовательно, $H \cong F \times S$ — вполне несвязная группа, состоящая из компактных элементов. Поскольку H — вполне несвязная группа, $\mathbb{R}^m$ — связная компонента нуля группы Y. Следовательно, сужения $\tilde{\alpha}_{kj} \in \mathrm{Aut}(Y)$ на $\mathbb{R}^m$ будут топологическими автоморфизмами $\mathbb{R}^m$. Обозначим эти сужения через $\tilde{\alpha}'_{kj}$. Так как $H = b_Y$, сужения $\tilde{\alpha}_{kj} \in \mathrm{Aut}(Y)$ на H будут топологическими автоморфизмами H. Обозначим это сужение через $\tilde{\alpha}''_{kj}$. Имеем $\tilde{\alpha}_{kj}(s, h) = (\tilde{\alpha}'_{kj}s, \tilde{\alpha}''_{kj}h)$.

По лемме 1 из независимости линейных форм L_j следует, что характеристические функции $\hat{\mu}_k(y)$ удовлетворяют уравнению (2), которое в введенных обозначениях принимает вид

$$\prod_{k=1}^{n} \hat{\mu}_k \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}'_{kj} s_j, \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}''_{kj} h_j \right) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_k(\tilde{\alpha}'_{kj} s_j, \tilde{\alpha}''_{kj} h_j), \tag{25}$$

где $(s_j, h_j) \in Y$. Полагая $s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$ в (25), получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \hat{\mu}_k \left(0,\ \sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}''_{kj} h_j \right) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \hat{\mu}_k(0, \tilde{\alpha}''_{kj} h_j), \quad h_j \in H. \tag{26}$$

Решим уравнение (26). Для этого рассмотрим распределения $\nu_k = \mu_k * \bar{\mu}_k$ и отметим, что сужения на H характеристических функций $\hat{\nu}_k(y)$ также удовлетворяют уравнению (26).

Из (24) легко видеть, что группа F удовлетворяет условию (i) леммы 7. Следовательно, условия леммы 7 выполнены для группы H. Пусть $h_0 \in H$. По лемме 7 найдется компактная подгруппа $Q \subset H$ такая, что $h_0 \in Q$ и $\tilde{\alpha}_{kj}(Q) = Q$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим сужение уравнения (26) для функций $\hat{\nu}_k(y)$ на Q. Мы можем это сделать, так как $\tilde{\alpha}''_{kj}(Q) = Q$. Из следствия 1 следует, что характеристические функции $\hat{\nu}_k(0, h)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, совпадают при $h \in Q$ и принимают на Q значения 0 или 1. Поскольку элемент h_0 является произвольным, характеристические функции $\hat{\nu}_k(0, h)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, совпадают при $h \in H$ и принимают на H значения 0 или 1. Положим

$$E = \big\{ h \in H \colon \hat{\nu}_k(0, h) = 1, k = 1, 2, \ldots, n \big\}.$$

Мы имеем

$$\hat{\nu}_k(0, h) = \begin{cases} 1, & h \in E, \\ 0, & h \notin E. \end{cases} \tag{27}$$

Отметим, что E — открытая подгруппа в H. Положим $M = A(G, E)$. Тогда M — компактная подгруппа в G. Очевидно, что

$$\hat{\nu}_k(0, h) = \hat{m}_M(h), \quad h \in H,$$

откуда легко следует равенство

$$\hat{\mu}_k(0, h) = \hat{m}_M(h)(g_k, h), \qquad h \in H, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

где $g_k \in G$. Заменяя распределения μ_k их сдвигами, можем предполагать, что в (28) $g_k = 0$. Тогда

$$\hat{\mu}_k(0, h) = \begin{cases} 1, & h \in E, \\ 0, & h \notin E, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{cases} \tag{29}$$

Из (29) следует, что характеристические функции $\hat{\mu}_k(y)$ E-инвариантны.

Проверим выполнение следующих соотношений:

$$\tilde{\alpha}''_{kj}(E) = (E), \quad k, j = 1, 2, \ldots, n. \tag{30}$$

Если бы подгруппа H была компактной, то (30) непосредственно вытекало бы из следствия 1. В общем случае мы получаем равенства (30), используя лемму 7. Учитывая равенства (30), мы можем перейти от уравнения (25) на группе Y к индуцированному уравнению на фактор-группе $Y/E \cong \mathbb{R}^m \times (H/E)$, полагая $\varphi_k\big([y]\big) = \hat{\mu}_k\big([y]\big)$, $\hat{\alpha}_{kj}[y] = [\tilde{\alpha}_{kj}y]$. Отметим, что гомоморфизмы $\hat{\alpha}_{kj}$, индуцированные автоморфизмами $\tilde{\alpha}_{kj}$, являются топологическими автоморфизмами фактор-группы Y/E. Положим $L = H/E$. Очевидно, сужения $\hat{\alpha}_{kj}$ на L являются топологическими автоморфизмами L. Обозначим эти сужения через $\hat{\alpha}''_{kj}$. Элементы группы $Y/E \cong \mathbb{R}^m \times L$ обозначим через (s,l), $s \in \mathbb{R}^m$, $l \in L$. В введенных обозначениях $\hat{\alpha}_{kj}(s,l) = (\tilde{\alpha}'_{kj}s, \hat{\alpha}''_{kj}l)$. Уравнение, индуцированное уравнением (25), принимает вид

$$\prod_{k=1}^{n} \varphi_k \left(\sum_{j=1}^{n} \tilde{\alpha}'_{kj} s_j, \sum_{j=1}^{n} \hat{\alpha}''_{kj} l_j \right) = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \varphi_k (\tilde{\alpha}'_{kj} s_j, \hat{\alpha}''_{kj} l_j), \tag{31}$$

где $(s_j, l_j) \in \mathbb{R}^m \times L$. Легко видеть, что для решений уравнения (31) справедливо равенство

$$\big\{ l \in L \colon \varphi_k(0,l) = 1 \big\} = \{0\}, \quad k = 1,2,\ldots,n. \tag{32}$$

Рассмотрим эндоморфизм $\pi\colon L^n \to L^n$, заданный формулой

$$\pi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{\alpha}''_{1j} l_j, \sum_{j=1}^{n} \hat{\alpha}''_{2j} l_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \hat{\alpha}''_{nj} l_j \right), \tag{33}$$

где $l_j \in L$. Покажем, что $\operatorname{Ker}\pi = \{0\}$. Действительно, пусть $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots, \bar{l}_n) \in \operatorname{Ker}\pi$, $(\bar{l}_1, \bar{l}_2, \ldots$ $\ldots, \bar{l}_n) \neq (0,0,\ldots,0)$. Положим в (31) $s_j = 0$, $l_j = \bar{l}_j$, $j = 1,2,\ldots,n$, и получим

$$1 = \prod_{k=1}^{n} \prod_{j=1}^{n} \varphi_k(0, \hat{\alpha}''_{kj} \bar{l}_j).$$

Отсюда следует, что существует такое k_0, что $l_{k_0} \neq 0$ и $\varphi_{k_0}(0, l_{k_0}) = 1$. Но это противоречит (32).

Поскольку M — компактная подгруппа вполне несвязной группы G, M — компактная вполне несвязная группа. Отметим, что так как $L = H/E = G^*/E$, $M = A(G,E)$ и $G^*/E \cong A(G,E)$, то $L \cong M^*$. Следовательно, L — дискретная периодическая группа. Можно показать, что L удовлетворяет условию (i) леммы 7. Отсюда получаем, что и L^n удовлетворяет условию (i) леммы 7. Нетрудно показать, что любой мономорфизм, действующий на дискретной группе, удовлетворяющей условию (i) леммы 7, является автоморфизмом. Следовательно,

$$\pi \in \operatorname{Aut}(L^n). \tag{34}$$

Из равенств (32) и определения $\varphi_k(s,l)$ получаем, что сужения функций $\varphi_k(s,l)$ на подгруппу L фактор-группы Y/E имеют вид

$$\varphi_k(0,l) = \begin{cases} 1, & l = 0, \\ 0, & l \neq 0. \end{cases} \tag{35}$$

Положим в (31) $l_j = 0$, $j = 1,2,\ldots,n$. Тогда по лемме 1 и теореме Гурье – Олкина [17] (аналог теоремы Скитовича – Дармуа для пространства $\mathbb{R}^m$) получим

$$\varphi_k(s,0) = \exp\left\{-\langle A_k s, s\rangle + i\langle t_k, s\rangle\right\}, \quad s \in \mathbb{R}^m, \tag{36}$$

где A_k — симметрические неотрицательно определенные матрицы, $t_k \in \mathbb{R}^m$ и $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^m$.

Положим в (31) $s_1 = s_3 = s_4 = \ldots = s_n = 0$, $s_2 = s$, $l_1 = l$, $l_2 = l_3 = \ldots = l_n = 0$. Тогда, учитывая, что $\tilde{\alpha}_{k1} = I$, $k = 1, 2, \ldots, n$, получаем

$$\prod_{k=1}^{n} \varphi_k\left(\tilde{\alpha}'_{k2} s, l\right) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_k(\tilde{\alpha}'_{k2} s, 0)\varphi_k(0, l). \tag{37}$$

Из (35) заключаем, что правая часть (37) равна 0 при $l \neq 0$. Следовательно, имеем

$$\prod_{k=1}^{n} \varphi_k\left(\tilde{\alpha}'_{k2} s, l\right) = 0, \qquad s \in \mathbb{R}^m, \quad l \neq 0. \tag{38}$$

Поскольку $\varphi_k(s,0)$ — целые функции от s, $\varphi_k(s,l)$ — целые функции от s при произвольном $l \in H$ (см. [16]). Отсюда и из (38) получаем, что для любого фиксированного $l \neq 0$ найдется k такой, что $\varphi_k\left(\tilde{\alpha}'_{k2} s, l\right) \equiv 0$, $s \in \mathbb{R}^m$. Так как $\tilde{\alpha}'_{k2} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^m)$, последнее равносильно $\varphi_k\left(s,l\right) \equiv 0$, $s \in \mathbb{R}^m$, для некоторого k. Следовательно, если $l_j \neq 0$ для некоторого j, то правая часть (31) тождественно равна нулю.

Выберем и зафиксируем k_0 и $l_0 \in L$, $l_0 \neq 0$, и найдем l_j, удовлетворяющие уравнению

$$\pi(l_1, l_2, \ldots, l_n) = (0, \ldots, 0, l_0, 0, \ldots, 0), \tag{39}$$

где l_0 находится на k_0 месте. Из (34) следует, что уравнение (39) имеет единственное решение. Очевидно, что все l_j не равны нулю одновременно. Подставляя найденные решения l_j в (31) и принимая во внимание (36), получаем $\varphi_{k_0}(s, l_0) \equiv 0$, $s \in \mathbb{R}^m$. В результате, учитывая, что l_0 и k_0 выбирались произвольно, получаем представление

$$\varphi_k(s,l) = \begin{cases} \exp\left\{-\langle A_k s, s\rangle + i\langle t_k, s\rangle\right\}, & s \in \mathbb{R}^m, \quad l = 0, \\ 0, & s \in \mathbb{R}^m, \quad l \neq 0, \end{cases} \tag{40}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$. Возвращаясь от функций $\varphi_k(s,l)$ к характеристическим функциям $\hat{\mu}_k(s,h)$, из (40) находим

$$\hat{\mu}_k(s,h) = \begin{cases} \exp\left\{-\langle A_k s, s\rangle + i\langle t_k, s\rangle\right\}, & s \in \mathbb{R}^m, \quad h \in E, \\ 0, & s \in \mathbb{R}^m, \quad h \notin E, \end{cases}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$.

Пусть γ_k — распределение на X с характеристической функцией $\hat{\gamma}_k(s,h) = \exp\left\{-\langle A_k s, s\rangle + i\langle t_k, s\rangle\right\}$, $k = 1, 2, \ldots, n$, и λ — распределение на X с характеристической функцией

$$\hat{\lambda}(s,h) = \begin{cases} 1, & h \in E, \\ 0, & h \notin E. \end{cases}$$

Очевидно, что $\hat{\mu}_k(s,h) = \hat{\gamma}_k(s,h)\hat{\lambda}(s,h)$. Кроме того, легко видеть, что $\gamma_k \in \Gamma(X)$, а $\lambda = m_K$, где $K = A(X, \mathbb{R}^m \times E)$. Следовательно, $\mu_k \in \Gamma(X) * I(X)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 3 доказана.

5. Теорема Скитовича – Дармуа для компактных вполне несвязных абелевых групп. Из условий теоремы 3 следует, что для компактных вполне несвязных абелевых групп, изоморфных группе вида (24), справедлива теорема Скитовича – Дармуа для n независимых линейных форм от n независимых случайных величин. Оказывается, что в классе компактных вполне несвязных групп теорема Скитовича – Дармуа справедлива только для таких групп. Чтобы доказать этот факт, нам понадобятся некоторые леммы. Следующая лемма обобщает лемму, доказанную ранее Фельдманом.

Лемма 8 ([15], §13.21)**.** *Пусть X — компактная абелева группа. Предположим, что найдутся автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(X)$ и элемент $\tilde{y} \in Y$ такие, что выполняются следующие условия*:

i) $\mathrm{Ker}(I - \tilde{\delta}) = \{0\}$;

ii) $(I - \tilde{\delta})Y \cap \{0; \pm\tilde{y}, \pm 2\tilde{y}\} = \{0\}$;

iii) $\tilde{\delta}\tilde{y} \neq -\tilde{y}$.

Тогда для любого $n \geq 2$ существуют независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, со значениями в группе X и распределением $\mu \notin I(X)$ и автоморфизмы $\delta_{ij} \in \mathrm{Aut}(X)$ такие, что линейные формы $L_j = \xi_1 + \sum_{i=2}^{n} \delta_{ij}\xi_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимы.

Доказательство. Рассмотрим на группе X функцию

$$\rho(x) = 1 + (1/2)\,\mathrm{Re}(x, \tilde{y}).$$

Тогда $\rho(x) > 0$, $x \in X$, и

$$\int\limits_X \rho(x) dm_X(x) = 1.$$

Обозначим через μ распределение на X с плотностью $\rho(x)$ относительно меры Хаара m_X. Пусть ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, $n \geq 2$, — независимые одинаково распределенные случайные величины с распределением μ. Мы покажем, что линейные формы $L_j = \xi_1 + \sum_{i=2}^{n} \delta_{ij}\xi_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $\delta_{ij} = I$, $i \neq j$, $\delta_{jj} = \delta$, независимы.

Положим $f(y) = \hat{\mu}(y)$. По лемме 1 достаточно показать, что функция $f(y)$ удовлетворяет уравнению

$$f(u_1 + \ldots + u_n) f(u_1 + \tilde{\delta}u_2 + \ldots + u_n) \ldots f(u_1 + \ldots + \tilde{\delta}u_n) =$$

$$= f(u_1) \prod_{i=1}^{n} f^{n-1}(u_i) \prod_{i=2}^{n} f(\tilde{\delta}u_i). \tag{41}$$

Пусть $a(\tilde{y}) = \dfrac{1}{4}$, если $2\tilde{y} \neq 0$, и $a(\tilde{y}) = \dfrac{1}{2}$, если $2\tilde{y} = 0$. Легко видеть, что

$$f(y) = \begin{cases} 1, & y = 0, \\ a(\tilde{y}), & y = \pm\tilde{y}, \\ 0, & y \notin \{0, \pm\tilde{y}\}. \end{cases} \tag{42}$$

Из (42) следует, что $\mu \notin I(X)$. Очевидно, что если $u_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$, то уравнение (41) выполнено. Поэтому будем предполагать, что $u_i \neq 0$ для некоторого $i \neq 1$.

Из условий i) и iii) следует, что $\tilde{\delta}\tilde{y} \neq \pm\tilde{y}$. Следовательно, правая часть (41) равна 0, если $u_i \neq 0$ для некоторого $i \neq 1$.

Докажем теперь, что и левая часть уравнения (41) равна нулю, если $u_i \neq 0$ для некоторого $i \neq 1$. Предположим, что при некоторых u_i, не равных одновременно нулю, левая часть уравнения (41) отлична от 0. Тогда u_i удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{gathered} u_1 + u_2 + \ldots + u_n = b_1, \\ u_1 + \tilde{\delta}u_2 + \ldots + u_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_1 + u_2 + \ldots + \tilde{\delta}u_n = b_n, \end{gathered} \tag{43}$$

где $b_i \in \{0; \pm\tilde{y}\}$. Из системы (43) следует, что

$$\begin{gathered} (\tilde{\delta} - I)u_2 = b_2 - b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (\tilde{\delta} - I)u_n = b_n - b_1. \end{gathered} \tag{44}$$

Поскольку $b_i \in \{0; \pm\tilde{y}\}$, легко видеть, что $b_i - b_1 \in \{0; \pm\tilde{y}; \pm 2\tilde{y}\}$, $i = 2, \ldots, n$. Отсюда и из (44) получаем $(\tilde{\delta} - I)u_i \in \{0; \pm\tilde{y}; \pm 2\tilde{y}\}$, $i = 2, \ldots, n$. Из условия ii) следует, что $(\tilde{\delta} - I)u_i = 0$. Из условия i) имеем $u_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$. Полученное противоречие показывает, что левая часть (41) равна 0, если $u_i \neq 0$ для некоторого $i \neq 1$.

Лемма 8 доказана.

Теорема 4. *Пусть X — компактная вполне несвязная абелева группа, ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, — независимые случайные величины со значениями в группе X и распределениями μ_i, $\alpha_{ij} \in \in \mathrm{Aut}(X)$. Из независимости линейных форм $L_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, следует, что все μ_i принадлежат $I(X)$ тогда и только тогда, когда группа X топологически изоморфна группе вида* (24).

Доказательство. Поскольку на вполне несвязных абелевых группах гауссовские распределения вырождены, то *достаточность* непосредственно следует из теоремы 3.

Докажем *необходимость*. Пусть X топологически не изоморфна группе вида (24). Тогда для некоторого простого p существует замкнутая подгруппа K группы X, являющаяся прямым топологическим сомножителем в X и топологически изоморфная либо группе $\triangle_p^{\aleph_0}$, либо группе вида

$$\mathbf{P}_{k=1}^{\infty}\mathbb{Z}(p^{m_k}), \qquad m_k \leq m_{k+1}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Кроме того, K удовлетворяет условиям леммы 5.1 [10]. По лемме 8 найдутся независимые одинаково распределенные случайные величины ξ_i со значениями в K и распределением $\mu \notin I(K)$ и $\delta \in \mathrm{Aut}(K)$ такие, что линейные формы $L_j = \xi_1 + \sum_{i=2}^{n} \delta_{ij}\xi_i$, $j = 1, 2, \ldots, n$, где $\delta_{ij} = I$, $i \neq j$, $\delta_{ii} = \delta$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, независимы. Мы можем рассматривать ξ_i как случайные величины со значениями в X. Кроме того, поскольку K — топологический прямой сомножитель группы X, автоморфизм $\delta \in \mathrm{Aut}(K)$ может быть продолжен до топологического автоморфизма группы X. Сохраним для продолженного автоморфизма обозначение δ. В результате получим, что линейные формы L_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, независимы, и при этом $\mu_i \notin I(X)$.

Теорема 4 доказана.

Отметим, что теорема 4 для случая $n = 2$ была доказана в [10].

1. *Скитович В. П.* Об одном свойстве нормального распределения // Докл. АН СССР. – 1953. – **89**. – С. 217 – 219.
2. *Darmois G.* Analyse generale des liasions stochastiques. Etude particuliere de l'analyse factorielle lineaire // Rev. Inst. Int. Statist. – 1953. – **21**. – P. 2 – 8.
3. *Каган А. М., Линник Ю. В., Рао С. Р.* Характеризационные задачи математической статистики. – М.: Наука, 1972.
4. *Krakowiak W.* The theorem of Darmois – Skitovich for Banach valuedrandom variables // Ann. Inst. H. Poincare B. – 1975. – **11**, № 4. – P. 397 – 404.
5. *Feldman G. M.* On the Skitovich – Darmois theorem for finite abelian groups // Theory Probab. Appl. – 1992. – **37**. – P. 621 – 631.
6. *Baryshnikov Y., Eisenberg B., Stadje W.* Independent variables with independent sum and difference: $S1$-case // J. Multivar. Anal. – 1993. – **45**. – P. 161 – 170.
7. *Фельдман Г. М.* Теорема Скитовича – Дармуа для компактных групп // Теория вероятностей и ее применения. – 1996. – **41**. – С. 901 – 906.
8. *Фельдман Г. М.* Теорема Скитовича – Дармуа для дискретных периодических абелевых групп // Теория вероятностей и ее применения. – 1997. – **42**, вып. 4. – С. 747 – 756.
9. *Neuenschwander D., Schott R.* The Bernstein and Skitovich – Darmois characterization theorems for Gaussian distributions on groups, symmetric spaces and quantum groups // Expos. Math. – 1997. – **15**. – P. 289 – 314.
10. *Feldman G. M., Graczyk P.* On the Skitovich – Darmois theorem on compact Abelian groups // J. Theor. Probab. – 2000. – **13**. – P. 859 – 869.
11. *Фельдман Г. М., Грачик П.* К теореме Скитовича – Дармуа на дискретных абелевых группах // Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – **49**. – С. 596 – 601.
12. *Миронюк М. В.* О теоремах Скитовича – Дармуа и Хейде в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 10. – С. 1437 – 1447.
13. *Feldman G. M., Graczyk P.* The Skitovich – Darmois theorem for locally compact Abelian groups // J. Austral. Math. Soc. – 2010. – **88**. – P. 339 – 352.
14. *Мазур И. П.* Теорема Скитовича – Дармуа для конечных абелевых групп (случай n линейных форм от n независимых случайных величин) // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 11. – С. 1512 – 1523.
15. *Фельдман Г.* Характеризационные задачи математической статистики на локально компактных абелевых группах. – Киев: Наук. думка, 2010.
16. *Fel'dman G. M.* Arithmetic of probability distributions and characterization problems on Abelian groups // AMS transl. Math. Monogr. – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1993.
17. *Ghurye S. G., Olkin I.* A characterization of the multivariate normal distribution // Ann. Math. Statist. – 1962. – **33**. – P. 533 – 541.
18. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. – М.: Наука, 1975. – Т. 1.
19. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces. – New York: Acad. Press, 1967.

Получено 06.06.12,
после доработки — 21.01.13