УДК 517.5

Р. А. Ласурия (Абхаз. ун-т, Сухум)

СИЛЬНАЯ СУММИРУЕМОСТЬ РЯДОВ ФАБЕРА И ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ ГРУППЫ УКЛОНЕНИЙ В ЗАМКНУТОЙ ОБЛАСТИ С КУСОЧНО-ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

We establish estimates of groups of deviations of the Faber series in closed domains with a piecewise smooth boundary.

Встановлено оцінки груп відхилень рядів Фабера в замкнених областях із кусково-гладкою межею.

1. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — расширенная комплексная плоскость, G — ограниченная область с жордановой границей ψ, D — внешность в $\overline{\mathbb{C}}$ единичного круга: $D = \{w \in \overline{\mathbb{C}} : |w| > 1\}$, $\overline{D}$ — замыкание D, $\Gamma_e = \{w : |w| = 1\}$ — единичная окружность, $z = \psi(w)$ — функция Римана, отображающая $\overline{D}$ на $\mathbb{C} \backslash G$ и нормированная условием

$$\lim_{w \to \infty} \frac{\psi(w)}{w} = \alpha > 0,$$

$w = \Phi(z)$ — функция, обратная к $z = \psi(w)$,

$$\Gamma_{1+1/n} = \{z : |\Phi(z)| = 1 + 1/n\}$$

— n-я линия уровня области G,

$$\rho_{1+1/n}(z) = \min_{\zeta \in \Gamma_{1+1/n}} \{|\zeta - z|\}, \quad z \in \Gamma,$$

— расстояние от точки $z \in \Gamma$ до n-й линии уровня $\Gamma_{1+1/n}$. Пусть, далее, $C_A(\overline{G})$ — множество функций $f(z)$, аналитических в G и непрерывных в $\overline{G}$.

Ограниченная жорданова область G называется областью типа (C) (см., например, [1]), если для функции $z = \psi(w)$ выполняются условия: существуют $r \in \mathbb{N}$, $w_j \in \Gamma_e$ и $\alpha_j \in (0, 2)$, $j = 1, 2, \ldots, r$, такие, что имеет место равенство

$$\psi'(w) = \lambda(w) \prod_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{w_j}{w}\right)^{\alpha_j - 1} \quad \forall\, w \in D,$$

где $\lambda(w)$ — непрерывная и отличная от нуля на $\overline{D}$ функция, модуль непрерывности которой удовлетворяет условию $\omega(\lambda; t) \leq Kt$, где K — некоторая положительная постоянная. Как известно [1 – 4], области типа (C) включают в себя кроме многоугольников и области с жордановыми границами, состоящими из конечного числа окружностей или аналитических дуг.

Будем говорить, что G — область типа (C') (см., например, [5]), если она является областью типа (C), а числа α_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, r$, из определения области типа (C) удовлетворяют условиям

$$\alpha_\nu \geq \frac{1}{2} \max \left\{1;\ \max_{j=\overline{1,r}} \alpha_j \right\}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, r.$$

Пусть

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z) \tag{1}$$

— ряд Фабера функции $f(z)$, заданной на $\overline{G}$,

$$c_k = c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\psi(e^{it}))e^{-ikt}dt, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

— коэффициенты Фабера функции $f(z)$, $S_n(f; z)$ — частичная сумма ряда (1).

2. Введем в рассмотрение сильные средние степени $q > 0$ ряда (1)

$$H_{n,q}(f; z) = \left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} |f(z) - S_k(f; z)|^q\right\}^{1/q}. \tag{2}$$

Сформулируем вначале утверждение, содержащее оценку величины (2) в точках границы области типа (C').

Теорема 1. *Пусть* G *— область типа* (C'), $f(z) \in C_A(\overline{G})$, $1 < p \le 2$ *и при некотором* $\gamma > 2/p - 1$

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\omega(\rho_{1+\delta}(z))}{\delta^{1/p-\gamma}} = \infty, \quad z \in \Gamma, \tag{3}$$

монотонно возрастая, где $\omega(f; t) = \omega(t)$ *— модуль непрерывности* $f(z)$ *на* $\overline{G}$. *Тогда для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $q_1 \in (0, q]$, $q = \dfrac{p}{p-1}$, *в точке* $z \in \Gamma$

$$H_{n,q_1}(f; z) \le K\omega(\rho_{1+1/n}(z)), \qquad K = K(q, \gamma). \tag{4}$$

Доказательство. На основании известных рассуждений [1] имеем представление

$$\rho_k(f; z) = f(z) - S_k(f; z) =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{-\pi}^{\pi} D_k(t)\left\{\int_{\Gamma}\frac{f(\zeta) - f(\zeta\langle t\rangle)}{\zeta - z}d\zeta\right\}dt =$$

$$= \frac{1}{4\pi^2 i}\int_{0}^{\pi} D_k(t)\left\{\int_{\Gamma}\frac{F(\zeta) - F(\zeta\langle t\rangle)}{\zeta - z}d\zeta\right\}dt, \tag{5}$$

где

$$\zeta\langle t\rangle = \psi(\Phi(\zeta)e^{-it}), \qquad F(\zeta) = f(\zeta) - f(\zeta\langle -t\rangle),$$

$D_k(t)$ — ядро Дирихле.

Положим

$$I(z; t) = \int_{\Gamma}\frac{F(\zeta) - F(\zeta\langle t\rangle)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Тогда, принимая во внимание (5), находим

$$H_{n,q}(f;z) \le \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{1/n} D_k(t)\, I(z;t)\, dt \right|^q \right\}^{1/q} +$$

$$+ \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{1/n}^{\pi} D_k(t)\, I(z;t)\, dt \right|^q \right\}^{1/q} =$$

$$= I_{n,1}^{(q)}(z) + I_{n,2}^{(q)}(z). \tag{6}$$

Известно [2, с. 38], что

$$|I(z;t)| \le K\,\omega(\rho_{1+t}(z)). \tag{7}$$

В силу (7) имеем

$$I_{n,1}^{(q)}(z) \le \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{1/n} n\, |I(z;t)|\, dt \right)^q \right\}^{1/q} \le$$

$$\le Kn \int_0^{1/n} \omega(\rho_{1+t}(z))\, dt \le K\omega(\rho_{1+1/n}(z). \tag{8}$$

Оценивая слагаемое $I_{n,2}^{(q)}(z)$, представим ядро $D_k(\cdot)$ в виде

$$D_k(t) = \frac{\sin kt}{2\,\mathrm{tg}\,(t/2)} + \frac{1}{2}\cos kt.$$

В этом случае

$$I_{n,2}^{(q)}(z) = \frac{1}{4\pi^2} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left| \int_{1/n}^{\pi} \frac{I(z;t)}{2\,\mathrm{tg}\,(t/2)} \sin kt\, dt \right. \right. +$$

$$\left. \left. + \int_{1/n}^{\pi} \frac{1}{2} I(z;t) \cos kt\, dt \right|^q \right\}^{1/q}.$$

Введем вспомогательные функции

$$\Phi^{(1)}(z,t,n) = \begin{cases} \dfrac{I(z;t)}{2\,\mathrm{tg}\,(t/2)}, & t \in [1/n, \pi], \\ 0, & t \in [-\pi,\pi] \backslash [1/n,\pi], \end{cases}$$

$$\Phi^{(2)}(z,t,n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} I(z;t), & t \in [1/n, \pi], \\ 0, & t \in [-\pi,\pi] \backslash [1/n,\pi], \end{cases}$$

$$\Phi^{(i)}(z, t+2\pi, n) = \Phi^{(i)}(z, t, n), \qquad i = 1, 2.$$

В принятых обозначениях получаем равенства

$$I_{n,2}^{(q)}(z) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi^{(1)}(z,t,n)\sin kt\,dt\ + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\Phi^{(2)}(z,t,n)\cos kt\,dt\right|^q\right\}^{1/q} =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k(\Phi^{(1)}) + a_k(\Phi^{(2)})\right|^q\right\}^{1/q},$$

где $a_k(\varphi)$, $b_k(\varphi)$ — коэффициенты Фурье функции $\varphi(\cdot)$.

Используя неравенство Минковского, имеем

$$I_{n,2}^{(q)}(z) \le \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k(\Phi^{(1)})\right|^q\right\}^{1/q} +$$

$$+ \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left|a_k(\Phi^{(2)})\right|^q\right\}^{1/q} = i_{n,1}^{(q)}(z) + i_{n,2}^{(q)}(z). \qquad (9)$$

Учитывая неравенство

$$2\operatorname{tg}\frac{t}{2} \ge t, \quad 0 \le t < \pi,$$

соотношение (7) и условие (3), в силу теоремы Хаусдорфа – Юнга [6, с. 153] находим

$$i_{n,1}(z) = \frac{1}{4\pi n^{1/q}}\left\{\sum_{k=0}^{n-1}\left|b_k(\Phi^{(1)})\right|^q\right\}^{1/q} \le$$

$$\le \frac{1}{4\pi n^{1/q}}\left\{\int_{1/n}^{\pi}\left|\frac{I(z;t)}{2\operatorname{tg}(t/2)}\right|^p dt\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \frac{K}{n^{1/q}}\left\{\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(\rho_{1+t}(z))}{t^p}dt\right\}^{1/p} =$$

$$= \frac{K}{n^{1/q}}\left\{\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega^p(\rho_{1+t}(z))t^{1-p\gamma}}{t^p t^{1-p\gamma}}dt\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \frac{K}{n^{1/q}}\left\{\frac{\omega^p(\rho_{1+1/n}(z))}{n^{p\gamma-1}}\int_{1/n}^{\pi}t^{1-p\gamma-p}\,dt\right\}^{1/p} \le$$

$$\le \frac{K(q,\gamma)}{n^{1/q}}\omega(\rho_{1+1/n}(z))n^{1/p-\gamma}\left\{n^{-2+p\gamma+p}\right\}^{1/p} =$$

$$= \frac{K(q,\gamma)}{n^{1/q}}\omega(\rho_{1+1/n}(z))n^{1-1/p} =$$

$$= K(q,\gamma)\,\omega(\rho_{1+1/n}(z)), \quad q = \frac{p}{p-1}. \tag{10}$$

Аналогично

$$i_{n,2}^{(q)}(z) \le K\omega(\rho_{1+1/n}(z)). \tag{11}$$

Принимая во внимание (10), (11), из (9) получаем

$$I_{n,2}^{(q)}(z) \le K\omega(\rho_{1+1/n}(z)), \quad z \in \Gamma, \tag{12}$$

$$K = K(q,\gamma).$$

Учитывая (12), (8), (6), а также неравенство для средних [7]

$$H_{n,q_1}(f;z) \le H_{n,q}(f;z), \quad 0 < q_1 \le q,$$

приходим к требуемому соотношению (4).

3. Положим теперь

$$H_{n,q}^{(\lambda)}(f;z) = \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k(u)|\rho_k(f;z)|^q, \quad q > 0, \tag{13}$$

где $\lambda = (\lambda_k(u))$, $k \in \mathbb{N}$, — некоторая последовательность неотрицательных функций, заданных на некотором множестве U, имеющая хотя бы одну предельную точку.

Теорема 2. *Пусть выполняются все условия теоремы* 1 *и* $\lambda = (\lambda_k(u))$ — *некоторая последовательность неотрицательных функций такая, что при каждом фиксированном* $u \in U$ *последовательность чисел* $\lambda_k(u)$ *не возрастает относительно* $k \in \mathbb{N}$. *Тогда для любого* $n \in \mathbb{N}$ *в точке* $z \in \Gamma$, *определяемой равенством* (3),

$$H_{n,q}^{(\lambda)}(f;z) \le K\left\{n\lambda_n(u)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z)) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k(u)\,\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\}, \tag{14}$$

$$q = \frac{p}{p-1}, \quad K = K(q,\gamma).$$

Доказательство. Представляя величину (13) в виде

$$H_{n,q}^{(\lambda)}(f;z) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1} \lambda_k(u)|\rho_k(f;z)|^q,$$

а также учитывая, что в силу (4)

$$\frac{1}{n}\sum_{k=n}^{2n-1}|\rho_k(f;z)|^q \le 2K^q\omega^q(\rho_{1+1/n}(z)),$$

получаем

$$H_{n,q}^{(\lambda)}(f;z) \le \sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{2^i n}(u)\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1}|\rho_k(f;z)|^q \le$$

$$\le K\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{2^i n}(u)2^i n\,\omega^q(\rho_{1+1/2^i n}(z)) =$$

$$= K\left\{n\lambda_n(u)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z)) + \sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{2^i n}(u)2^i n\,\omega^q(\rho_{1+1/2^i n}(z))\right\} \le$$

$$\le K\left\{n\lambda_n(u)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\lambda_{2^i n}(u)\omega^q(\rho_{1+1/2^i n}(z))\right\} \le$$

$$\le K\left\{n\lambda_n(u)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z)) + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\lambda_k(u)\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\} =$$

$$= K\left\{n\lambda_n(u)\omega^q(\rho_{1+1/n}(z)) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k(u)\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\},$$

$$K = K(q,\gamma).$$

Полагая в (14) $n = 1$, находим

$$H_{1,q}^{(\lambda)}(f;z) \le K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u)\omega^q(\rho_{1+1/k}(z))\right\}, \tag{15}$$

$$q = \frac{p}{p-1}.$$

Исходя из неравенства (15), можно получить оценки для достаточно широкого спектра сильных средних λ-методов суммирования рядов, в частности для сильных средних Абеля, Фейера, логарифмических, Валле Пуссена и др.

4. Установим оценки скорости сходимости групп уклонений, определяемых равенствами

$$D_n^{(\lambda)}(f;z) = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\lambda_k(u)\rho_k(f;z)\right|, \tag{16}$$

$$G_n^{(\lambda)}(f;z) = \left|\sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k(u)\rho_k(f;z)\right|, \tag{17}$$

$$n \in \mathbb{N}.$$

Теорема 3. *Пусть* G *— область типа* (C') *и последовательность* $\lambda = (\lambda_k(u))$, $k \in \mathbb{N}$, $u \in U$, *такая, что при каждом фиксированном* $u \in U$ *числа* $\lambda_k(u)$ *не возрастают. Тогда для любой* $f(z) \in C_A(G)$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $z \in \Gamma$ *выполняется неравенство*

$$D_n^{(\lambda)}(f;z) \le K\frac{\lambda_n(u)}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt, \tag{18}$$

где K *— положительная постоянная, не зависящая от* n *и* $f \in C_A(\overline{G})$.

Замечание. Полагая

$$V_m^{2m}(f;z) = \frac{1}{m+1}\sum_{k=m}^{2m}S_k(f;z),$$

видим, что $V_m^{2m}(f;z)$, $m \in \mathbb{N}$, есть сумма Валле Пуссена $V_{n-p}^{n}(f;z)$, в которой $n = 2m$, $p = m$. Тогда в условиях теоремы 3, в силу (18), при $\lambda_k(u) \equiv 1$ для любой $f(z) \in C_A(\overline{G})$ и $z \in \Gamma$

$$\left|f(z) - V_m^{2m}(f;z)\right| \le \frac{K}{m}\int_{1/m}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt. \tag{19}$$

Оценка (19) ранее установлена в [5].

***Доказательство теоремы* 3.** Как и прежде, для величины (16) имеем представление

$$D_n^{(\lambda)}(f;z) = \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{\lambda_k(u)}{4\pi^2 i}\int_0^{\pi}D_k(t)\left\{\int_\Gamma\frac{F(\zeta)-F(\zeta\langle t\rangle)}{\zeta - z}d\zeta\right\}dt\right| \le$$

$$\le \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{\lambda_k(u)}{4\pi^2 i}\int_0^{1/n}D_k(t)I(z;t)dt\right| +$$

$$+ \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\frac{\lambda_k(u)}{4\pi^2 i}\int_{1/n}^{\pi}D_k(t)I(z;t)dt\right| =$$

$$= D_{n,1}^{(\lambda)}(f;z) + D_{n,2}^{(\lambda)}(f;z). \tag{20}$$

Используя оценку (7), находим

$$D_{n,1}^{(\lambda)}(f;z) \;\le\; \frac{K}{n+1}\sum_{k=n}^{2n}\lambda_k(u)\int_0^{1/n} n\,\omega(\rho_{1+t}(z))\,dt \;\le$$

$$\le\; K\lambda_n(u)\,\omega(\rho_{1+1/n}(z))\,. \tag{21}$$

Применяя преобразование Абеля

$$\left|\sum_{k=n}^{2n}\lambda_k(u)\sin(k+1/2)t\right| \;\le\; \frac{K\lambda_n(u)}{t}, \tag{22}$$

с учетом (7) получаем

$$D_{n,2}^{(\lambda)}(f;z) \;=\; \frac{1}{4\pi^2(n+1)}\left|\int_{1/n}^{\pi}\frac{I(z;t)}{2\sin(t/2)}\sum_{k=n}^{2n}\lambda_k(u)\sin(k+1/2)t\,dt\right| \;\le$$

$$\le\; \frac{K\lambda_n(u)}{n+1}\int_{1/n}^{\pi}\omega(\rho_{1+t}(z))\left|\sum_{k=n}^{2n}\lambda_k(u)\sin(k+1/2)t\right|dt \;\le$$

$$\le\; \frac{K\lambda_n(u)}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}\,dt\,. \tag{23}$$

Согласно (21) и (23) из (20) находим

$$D_n^{(\lambda)}(f;z) \;\le\; K\lambda_n(u)\left[\omega(\rho_{1+1/n}(z)) + \frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}\,dt\right]. \tag{24}$$

Замечая, что

$$\frac{1}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}\,dt \;\ge\; \frac{1}{n}\omega(\rho_{1+1/n}(z))\int_{1/n}^{\pi}t^{-2}\,dt \;\ge$$

$$\ge\; \frac{\pi-1}{\pi}\,\omega(\rho_{1+1/n}(z)),$$

из (24) окончательно выводим

$$D_n^{(\lambda)}(f;z) \;\le\; \frac{K\lambda_n(u)}{n}\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}\,dt\,.$$

Введем в рассмотрение следующую величину:

$$\Omega_k(z) \;=\; \sup_{m\ge k}\frac{1}{m}\int_{1/m}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}\,dt\,. \tag{25}$$

Исходя из теоремы 3, докажем справедливость такого утверждения.

Теорема 4. *Пусть* G *— область типа* (C') *и последовательность* $\lambda = (\lambda_k(u))$ *при каждом фиксированном* $u \in U$ *не возрастает. Тогда для любой* $f(z) \in C_A(\overline{G})$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $z \in \Gamma$ *выполняется неравенство*

$$G_n^{(\lambda)}(f;z) \leq K\left\{n\lambda_n(u)\Omega_n(z) + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k(u)\Omega_k(z)\right\}, \tag{26}$$

где K — *положительная постоянная, не зависящая от* $z \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N}$, $u \in U$ *и* $f \in C_A(\overline{G})$, *а* $G_n^{(\lambda)}(f;z)$ — *величина, определяемая равенством* (17).

Доказательство. Заметим, что при каждом фиксированном $z \in \Gamma$ величина $\Omega_k(z)$ не возрастает по $k \in \mathbb{N}$. Далее, используя соотношение (18), имеем

$$G_n^{(\lambda)}(f;z) = \left|\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1}\lambda_k(u)\rho_k(f;z)\right| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty}\left|\sum_{k=2^i n}^{2^{i+1}n-1}\lambda_k(u)\rho_k(f;z)\right| \leq$$

$$\leq K\left\{\sum_{i=0}^{\infty}(2^i n)\frac{\lambda_{2^i n}(u)}{2^i n}\int_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\} =$$

$$= K\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\lambda_{2^i n}(u)\int_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\} =$$

$$= K\left\{\lambda_n(u)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \right.$$

$$\left. + 2\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_{2^i n}(u)2^{i-1}n\frac{1}{2^i n}\int_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\} \leq$$

$$\leq K_1\left\{\lambda_n(u)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\lambda_{2^i n}(u)\frac{1}{2^i n}\int_{1/2^i n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\}.$$

Учитывая определение (25) величины $\Omega_k(z)$, получаем

$$G_n^{(\lambda)}(f;z) \leq K\left\{\lambda_n(u)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\lambda_{2^i n}(u)\sup_{m \geq 2^i n}\frac{1}{m}\int_{1/m}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt\right\} =$$

$$= K\left\{\lambda_n(u)\int_{1/n}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=2^{i-1}n}^{2^i n-1}\lambda_{2^i n}(u)\Omega_{2^i n}(z)\right\} \leq$$

$$\leq K\left\{n\lambda_n(u)\sup_{m\geq n}\frac{1}{m}\int\limits_{1/m}^{\pi}\frac{\omega(\rho_{1+t}(z))}{t^2}dt + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=n}^{\infty}\lambda_k(u)\Omega_k(z)\right\}.$$

Теорема 4 доказана.

Полагая в (26) $n = 1$, имеем

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u)\rho_k(f;z)\right| \leq K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u)\Omega_k(z)\right\}. \tag{27}$$

Пусть

$$U^{(\lambda)}(f;z) = U^{(\lambda)}(f;z;u) = \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u)S_k(f;z)$$

и дополнительно выполнено условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u) = 1 \qquad \forall\, u \in U.$$

Тогда в условиях теоремы 4 с учетом оценки (27) получаем неравенство

$$\left|f(z) - U^{(\lambda)}(f;z)\right| \leq K\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u)\Omega_k(z)\right\}, \qquad z \in \Gamma. \tag{28}$$

На основании соотношения (28) можно получить оценки уклонений некоторых линейных средних сумм Фабера, в том числе порождаемых бесконечными прямоугольными матрицами $\lambda = \left(\lambda_k^{(n)}\right)$, $k, n \in \mathbb{N}$, неотрицательных чисел. Полагая, например, $\lambda_k^{(r)} = (1-r)r^{k-1}$, $0 < r < 1$, получаем оценку уклонения средних Абеля

$$A_r(f;z) = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty}r^{k-1}S_k(f;z),$$

при

$$\lambda_k^{(n)} = \left(k\ln(n+1)\right)^{-1}, \qquad 1 \leq k \leq n, \quad \lambda_k^{(n)} = 0, \quad k > n,$$

— оценку уклонения логарифмических средних

$$L_n(f;z) = \frac{1}{\ln(n+1)}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}S_k(f;z)$$

и т. д.

1. *Дзядык В. К.* Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1966. – 672 с.

2. *Дзядык В. К., Алибеков Г. А.* Суммирование рядов Фабера линейными методами Рисса и Фейера в областях с кусочно-гладкой границей. – Киев, 1989. – 54 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 89.41).
3. *Маркушевич А. И.* Теория аналитических функций: В 2 т. – М.: Наука, 1968. – Т. 2. – 624 с.
4. *Лебедев Н. А., Широков Н. А.* О равномерном приближении функций на замкнутых множествах, имеющих конечное число угловых точек с ненулевыми внешними углами // Изв. АН АрмССР. – 1971. – **6**, № 47. – С. 311 – 341.
5. *Алибеков Г. А., Трофименко В. И.* Суммирование рядов Фабера методами Валле Пуссена, Рогозинского и Джексона в областях с кусочно-гладкой границей // Исследования по теории приближения функций. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1991. – С. 4 – 12.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 537 с.
7. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.

Получено 17.09.2003