УДК 517.95

**В. Н. Павленко, Е. А. Чиж** (Челябин. нац. ун-т, Россия)

# ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИЛЬНО РЕЗОНАНСНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

We consider the Dirichlet problem for an elliptic-type equation with nonlinearity discontinuous with respect to a phase variable in the resonance case. It is not necessary that this nonlinearity satisfy the Landesman – Lazer condition. Using the regularization of the initial equation, we establish the existence of generalized solution of the problem considered.

Розглянуто задачу Діріхле для рівняння еліптичного типу з розривною за фазовою змінною нелінійністю в резонансному випадку, причому нелінійність може не задовольняти умову Ландесмана – Лазера. За допомогою регуляризації початкового рівняння встановлено існування узагальненого рівняння вказаної задачі.

**1. Введение.** Пусть $\Omega$ — ограниченная область в $R^m$ с границей $\Gamma$ класса $C^{2,\mu}$, $0<\mu<1$,

$$Au(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\left( a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + c(x)u(x)$$

— равномерно эллиптический дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$ с коэффициентами $a_{ij} \in C^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x)=a_{ji}(x)$, $c\in C^{0,\mu}(\overline{\Omega})$, $c(x)\geq 0$ в $\Omega$.

Рассмотрим задачу

$$Au(x) - \lambda_1 u(x) + g(x, u(x)) = h(x), \quad x\in\Omega, \tag{1}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где $\lambda_1$ — наименьшее собственное значение оператора $A$ с граничным условием (2), $h\in L^q(x)$, $q>m$. Нелинейность $g(x,\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $g:\Omega\times R\to R$ борелева $(\bmod 0)$ [1], т. е. существует борелева функция $\tilde{g}:\Omega\times R\to R$, отличающаяся от $g$ лишь на подмножестве $l\subset\Omega\times R$, проекция которого на $\Omega$ имеет меру нуль;

2) для почти всех $x\in\Omega$ функция $g(x,\cdot)$ имеет разрывы только первого рода, $g(x,\xi)\in[g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]$ для любого $\xi\in R$, где

$$g_-(x,\xi) = \underline{\lim}_{\eta\to\xi}\, g(x,\eta), \qquad g_+(x,\xi) = \overline{\lim}_{\eta\to\xi}\, g(x,\eta).$$

Кроме того, предположим, что существует функция $a\in L^q(\Omega)$, для которой справедлива оценка

$$\left|g(x,\xi)\right| \leq a(x) \quad \forall\,\xi\in R \quad \text{и почти всех} \quad x\in\Omega. \tag{3}$$

**Определение 1.** *Обобщенным решением задачи* (1), (2) *будем называть функцию* $u\in W_q^2(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$, *удовлетворяющую для почти всех* $x\in\Omega$ *включению*

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \in [g_-(x,u(x)), g_+(x,u(x))].$$

Известно [2], что подпространство решений задачи

$$Au(x) = \lambda_1 u(x), \quad x \in \Omega, \tag{4}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{5}$$

одномерно, причем базисную функцию $\varphi$ этого подпространства можно считать положительной в $\Omega$ и $\left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial n}\right|_\Gamma < 0$, где $\dfrac{\partial}{\partial n}$ — производная по внешней нормали к границе $\Gamma$. Положим $Lu = Au - \lambda_1 u$, а через $\mathrm{Ker}(L)$ обозначим пространство решений задачи (4), (5). Поскольку $\mathrm{Ker}(L) \neq \{0\}$, а для нелинейности $g$ верна оценка (3), задача (1), (2) является резонансной.

Систематическое исследование резонансных краевых задач эллиптического типа началось с работы Е. Ландесмана и А. Лазера [3] в 1970 г. В указанной статье предполагалось, что нелинейность $g(x, \xi) \equiv g(\xi)$ непрерывна на $R$ и существуют $\lim_{\xi\to\pm\infty} g(\xi) = g(\pm\infty)$. При таких допущениях было показано, что задача (1), (2) имеет решение, если $h$ удовлетворяет неравенству

$$g(-\infty)\int_\Omega \varphi(x)dx \;<\; \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx \;<\; g(+\infty)\int_\Omega \varphi(x)dx. \tag{6}$$

Здесь и далее $\varphi$ — базисная функция $\mathrm{Ker}(L)$, $\varphi > 0$ в $\Omega$. Кроме того, если $g(-\infty) < g(\xi) < g(+\infty)$ для любых $\xi \in R$, то условие Ландесмана – Лазера (6) является и необходимым для существования решения исследуемой задачи.

В дальнейшем появилось большое число статей по этой тематике, в которых авторы накладывали на нелинейность, входящую в уравнение, условия типа Ландесмана – Лазера. Для задач с разрывными по фазовой переменной нелинейностями наиболее общие результаты были получены N. Basile, M. Mininni [4], I. Massabo [5], K. C. Chang [6] и В. Н. Павленко, В. В. Винокуром [7, 8]. В последнее время большой интерес вызывает изучение краевых задач эллиптического типа в случае сильного резонанса, т. е. когда условия Ландесмана – Лазера не выполняются. Отметим работу P. Bartolo, V. Benci, D. Fortunato [9] для уравнений с гладкой нелинейностью и R. Iannacci, M. N. Nkashama, J. R. Ward [10] для уравнений с каратеодориевой нелинейностью. В [11] доказано существование обобщенного решения задачи (1), (2) с разрывной нелинейностью в предположении, что для почти всех $x \in \Omega$ и для любого $\xi \in R$

$$g(x, \xi)\xi \le 0 \tag{7}$$

и функция $h(x)$ ортогональна $\mathrm{Ker}(L)$ в $L^2(\Omega)$.

В данной работе получены условия разрешимости задачи (1), (2), обобщающие результаты работ [10, 11].

**Определение 2.** *Будем говорить, что для нелинейности* $g$ *и функции* $h$ *в уравнении* (1) *выполнено* (i)-*условие, если верно либо неравенство*

$$\int_\Omega \sup_{\xi\in R^+} g(x, \xi)\varphi(x)dx \;\le\; \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx \;\le\; \int_\Omega \inf_{\xi\in R^-} g(x, \xi)\varphi(x)dx, \tag{8}$$

*либо неравенство*

$$\int_\Omega \sup_{\xi\in R^-} g(x, \xi)\varphi(x)dx \;\le\; \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx \;\le\; \int_\Omega \inf_{\xi\in R^+} g(x, \xi)\varphi(x)dx, \tag{9}$$

*где* $R^\pm = \{\xi \in R : \pm\xi > 0\}$, *а* $\varphi$ — *базисная функция* $\mathrm{Ker}(L)$, $\varphi > 0$ *в* $\Omega$.

Как будет показано ниже, если выполнено (i)-условие, то задача (1), (2) имеет, по крайней мере, одно обобщенное решение.

***Замечания.*** **1.** Если $g(x, \xi) \equiv g(\xi)$ и

$$\sup_{\xi\in R^-} g(\xi) = g(-\infty), \qquad \inf_{\xi\in R^+} g(\xi) = g(+\infty),$$

то неравенство (9) в (i)-условии дает более широкое, чем условие Ландесмана – Лазера (6), множество функций $h \in L^q(x)$, для которых задача (1), (2) имеет решение.

**2.** Если функция $h(x)$ ортогональна $\mathrm{Ker}(L)$, то из неравенства (8) в (i)-условии имеем

$$\int\limits_{\Omega} \sup_{\xi \in R^+} g(x, \xi)\varphi(x)dx \ \le\ 0\ \le\ \int\limits_{\Omega} \inf_{\xi \in R^-} g(x, \xi)\varphi(x)dx,$$

что, в частности, выполняется, если верно (7).

**2. Основные результаты.**

**Теорема.** *Предположим, что*:

1) *функция* $g(x, \xi)$ *удовлетворяет условиям* 1, 2;

2) *верна оценка* (3) *с* $q > m$;

3) *для нелинейности* $g$ *и функции* $h \in L^q(\Omega)$ *в уравнении* (1) *выполнено* (i)-*условие*.

*Тогда задача* (1), (2) *имеет, по крайней мере, одно обобщенное решение*.

***Доказательство.*** Рассмотрим аппроксимирующую задачу

$$Au - (\lambda_1 + \delta_n)u + g(x, u) = h, \quad x \in \Omega, \tag{10}$$

$$u|_{\Gamma} = 0, \tag{11}$$

где $\delta_n \to 0$ — параметр регуляризации.

Определим оператор $G: L^p(\Omega) \to (L^p(\Omega))^* = L^q(\Omega)$, $1/q + 1/p = 1$, равенством $Gu = g(x, u(x))$, а линейный дифференциальный оператор $L_n: D(L_n) \subset \subset L^p(\Omega) \to L^q(\Omega)$ равенством $L_n u = Au - (\lambda_1 + \delta_n)u$, где $D(L_n) = = \left\{ u \in W_q^2(\Omega) | u|_{\Gamma} = 0 \right\} \subset L^p(\Omega)$. Тогда задачу (10), (11) можно записать в операторной форме

$$L_n u + Gu = h. \tag{12}$$

Рассмотрим $L_n$ как оператор из $E = W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ с нормой пространства $W_q^2(\Omega)$ в $L^q(\Omega)$. Известно [12], что $\lambda_1$ — изолированная точка спектра $L_n$ как оператора в $L^2(\Omega)$ с областью определения $W_2^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$. Поэтому найдется натуральное число $n_0$ такое, что при $n > n_0$ оператор $L_n$ непрерывно обратим. Из этого заключаем о биективности $L_n: E \to L^q(\Omega)$ (с учетом теорем о регулярности решений эллиптических краевых задач [2] и вложения $L^q(\Omega) \subset \subset L^2(\Omega)$). Отсюда и из замкнутости $L_n$ следует ограниченность $L_n^{-1}: L^q(\Omega) \to E$. Поскольку $W_q^2(\Omega)$ компактно вложено в $L^p(\Omega)$, $L_n^{-1}: L^q(\Omega) \to \to L^p(\Omega)$ компактен.

Оператор $G$ ограничен на всем $L^p(\Omega)$ в силу условия (3). Рассмотрим его секвенциальное замыкание $SG: L^p(\Omega) \to 2^{L^q(\Omega)}$ [13] (значение $SGu$ для $u \in \in L^p(\Omega)$ определяется как замкнутая выпуклая оболочка множества всех слабо предельных точек в $L^q(\Omega)$ последовательностей вида $\{Gu_n\}$, где $u_n \to u$ в $L^p(\Omega)$).

Согласно [13], $SG$ совпадает с $G^{\square}$ [1], где $G^{\square}$ — овыпукливание оператора $G$, т. е. отображение из $L^p(\Omega)$ в $2^{L^q(\Omega)}$, значением которого в произвольной точке $u \in L^p(\Omega)$ является

$$G^{\square}u = \bigcap_{\varepsilon>0} \overline{\mathrm{conv}}\{ z = Gy \colon \| y - u \| < \varepsilon \},$$

а $\overline{\mathrm{conv}}\, M$ $(M \subset L^q(\Omega))$ обозначает замкнутую выпуклую оболочку множества $M$.

В [1] показано, что включение $z \in G^{\square}u$ равносильно тому, что $z(x) \in \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))]$ почти всюду на $\Omega$. Отсюда получаем, что если $u \in D(L_n)$ удовлетворяет включению $h - L_n u \in SGu$, то $u$ — обобщенное решение (10), (11). Верно и обратное.

Таким образом, существование обобщенного решения задачи (10), (11) при $n > n_0$ равносильно существованию $u \in L^p(\Omega)$, удовлетворяющему включению $u \in L_n^{-1}(h - SGu)$. Рассмотрим отображение

$$\Phi_n(u) = L_n^{-1}(h - SGu), \quad n > n_0,$$

и докажем, что существует замкнутый шар $\overline{B}_n \subset L^p(\Omega)$, который $\Phi_n$ отображает в себя и является на этом шаре многозначным компактным оператором.

Последнее означает, что $\Phi_n \colon \overline{B}_n \to K\overline{B}_n$ полунепрерывен сверху на $\overline{B}_n$ $(K\overline{B}_n$ — семейство всех непустых выпуклых компактных подмножеств $\overline{B}_n)$ и образ шара $\overline{B}_n$ предкомпактен в $L^p(\Omega)$ [14].

Действительно, для любого $u \in L^p(\Omega)$ в силу свойств секвенциального замыкания [13] и ограниченности оператора $G$ множество $B = h - SGu$ — замкнутое, выпуклое и ограниченное в $L^q(\Omega)$. Поскольку линейный оператор выпуклые множества переводит в выпуклые, то $\Phi_n(u)$ — выпуклое множество в $L^p(\Omega)$. Покажем, что $L_n^{-1}(B)$ — замкнуто. Пусть $(y_k)$ — некоторая последовательность в $L_n^{-1}(B)$, т. е. $y_k = L_n^{-1} x_k$, где $x_k \in B$, и пусть $y_k \to y$. Последовательность $(x_k)$ содержится в ограниченном множестве $B$, и поэтому она ограничена. Отсюда в силу рефлексивности пространства $L^q(\Omega)$ следует, что существует подпоследовательность $\left(x_{k_l}\right)$, слабо сходящаяся в $L^q(\Omega)$ к некоторой точке $x$. Выпуклость и замкнутость множества $B$ влечет его слабую замкнутость, откуда получаем, что $x \in B$. Далее, так как оператор $L_n$ замкнутый, $x_{k_l} = L_n y_{k_l} \rightharpoonup x$ и $y_{k_l} \to y$, то $y \in D(L_n)$ и $x = L_n y$. Следовательно, $y = L_n^{-1}(x) \in L_n^{-1}(B)$, что и доказывает замкнутость множества $L_n^{-1}(B)$. Оператор $L_n^{-1}$ компактен, и поэтому он ограниченное множество $B$ переводит в предкомпактное множество $L_n^{-1}(B)$. Отсюда и из замкнутости $L_n^{-1}(B)$ следует компактность этого множества в $L^p(\Omega)$. Таким образом, для любого $u \in L^p(\Omega)$ значение $\Phi_n(u)$ является непустым компактным выпуклым подмножеством в $L^p(\Omega)$. Поскольку оператор $G$ в силу оценки (3) ограничен на всем пространстве $L^p(\Omega)$, найдется замкнутый шар $\overline{B}_n$, содержащий

$$\Phi_n(L^p(\Omega)) = \bigcup_{u \in L^p(\Omega)} \Phi_n(u).$$

Предкомпактность $\Phi_n(\overline{B}_n)$ следует из компактности оператора $L_n^{-1}$. Таким образом, $\Phi_n(\overline{B}_n) \subset \overline{B}_n$ и множество $\Phi_n(\overline{B}_n)$ предкомпактно в $L^p(\Omega)$.

Установим полунепрерывность сверху на $L^p(\Omega)$ отображения $\Phi_n$. Достаточно показать, что оператор $L_n^{-1}(SG)$ полунепрерывен сверху. Предположим, что это не так, тогда найдутся $u \in L^p(\Omega)$ и открытое множество $V \supset \supset L_n^{-1}(SG)(u)$ такие, что для произвольного натурального $k$ существуют $u_k$ с $\|u_k - u\| < 1/k$ и $w_k \in L_n^{-1}(SG)(u_k)$, но $w_k \notin V$. Элемент $w_k = L_n^{-1} b_k$, где $b_k \in SG(u_k)$. Из ограниченности отображения $SG$ следует ограниченность последовательности $(b_k)$ в $L^q(\Omega)$. Отсюда и из рефлексивности $L^q(\Omega)$ заключаем о существовании подпоследовательности $(b_{k_l})$, слабо сходящейся к некоторому $b$ в $L^q(\Omega)$. В силу свойств секвенциального замыкания [13] $b \in \in SG(u)$. Поскольку $L_n^{-1}$ линейный компактный, последовательность $w_{k_l} = = L_n^{-1} b_{k_l} \to L_n^{-1} b \in L_n^{-1}(SG)(u) \subset V$ в $L^p(\Omega)$. Из этого и открытости $V$ заключаем, что для достаточно больших $l$ элемент $w_{k_l} \in V$, но это противоречит выбору $w_k$.

Таким образом, отображение $\Phi_n$ при $n > n_0$ является многозначным компактным оператором, отображающим замкнутый шар $\overline{B}_n$ в себя. Отсюда следует, что для любого $n > n_0$ отображение $\Phi_n$ имеет неподвижную точку $u_n \in \overline{B}_n$ [14], а это равносильно существованию обобщенного решения задачи (10), (11).

Заметим, что, согласно определению обобщенного решения, при любом $n > > n_0$ существуют функции $u_n \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ и $z_n \in L^q(\Omega)$ такие, что для почти всех $x \in \Omega$ значение $z_n(x) \in [\, g_-(x, u_n(x)), g_+(x, u_n(x)) \,]$ и

$$A u_n(x) - (\lambda_1 + \delta_n) u_n(x) + z_n(x) = h(x). \tag{13}$$

Поскольку $q > m$, $W_q^2(\Omega)$ компактно вкладывается в $C^1(\overline{\Omega})$, и, значит, $u_n \in C^1(\overline{\Omega})$. Докажем ограниченность в $C^1(\overline{\Omega})$ последовательности $(u_n)$ обобщенных решений задачи (10), (11). Предположим противное. Тогда существует подпоследовательность, которую, по-прежнему, будем обозначать $(u_n)$, такая, что $\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to +\infty$, $\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \neq 0$. Обозначим $v_n = u_n / \|u_n\|_{C^1}$. Заметим, что $\|v_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} = 1$ и $v_n$ является решением задачи

$$A v_n - (\lambda_1 + \delta_n) v_n + \frac{z_n}{\|u_n\|_{C^1}} = \frac{h}{\|u_n\|_{C^1}}, \qquad x \in \Omega, \tag{14}$$

$$v_n|_\Gamma = 0. \tag{15}$$

Обозначим $g_n(x) = \dfrac{z_n(x)}{\|u_n\|_{C^1}}$, $\tilde{h}_n = \dfrac{h}{\|u_n\|_{C^1}}$ и $f_n = \left(\tilde{h}_n + (\lambda_1 + \delta_n) v_n - g_n\right) \in \in L^q(\Omega)$. Тогда задача (14), (15) примет вид

$$A v_n = f_n,$$

$$v_n|_\Gamma = 0.$$

Поскольку $\|v_n\|_{C^1} = 1$, существует положительная константа $M_0$ такая, что

$$\|f_n\|_{L^q} \le \left\|\tilde{h}_n\right\|_{L^q} + (\lambda_1 + \delta_n)M_0 + \|g_n\|_{L^q} \le$$

$$\le \frac{\|h\|_{L^q}}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}} + (\lambda_1 + \delta_n)M_0 + \frac{\|a\|_{L^q}}{\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})}}. \tag{16}$$

Далее, так как $\delta_n \to 0$ и $\|u_n\|_{C^1(\overline{\Omega})} \to +\infty$, найдется константа $M > 0$ такая, что $\|f_n\|_{L^q(\Omega)} \le M$ для любого $n \in N$.

Отсюда и из теорем об оценке сильных решений задачи Дирихле для уравнений эллиптического типа [2] следует, что существует константа $C > 0$ такая, что $\|v_n\|_{W_q^2(\Omega)} \le C$ при любом натуральном $n$. Поскольку $W_q^2(\Omega)$ рефлексивно, из ограниченности последовательности $(v_n)$ в этом пространстве вытекает существование подпоследовательности, слабо сходящейся к некоторому $v$ в $W_q^2(\Omega)$. Эту подпоследовательность, по-прежнему, будем обозначать $(v_n)$. Из компактности вложения $W_q^2(\Omega)$ в $C^1(\overline{\Omega})$ при $q > m$ следует сильная сходимость $(v_n)$ к $v$ в $C^1(\overline{\Omega})$. Кроме того, $Av_n \rightharpoonup Av$ в $L^q(\Omega)$.

Учитывая, что

$$\|g_n\|_{L^q(\Omega)} = \frac{\|z_n\|_{L^q}}{\|u_n\|_{C^1}} \le \frac{\|a\|_{L^q}}{\|u_n\|_{C^1}} \to 0,$$

$$\frac{\|h\|_{L^q}}{\|u_n\|_{C^1}} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

и переходя в (14), (15) к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$Av = \lambda_1 v, \tag{17}$$

$$v|_{\Gamma} = 0. \tag{18}$$

Заметим, что $v \not\equiv 0$, так как $\|v\|_{C^1} = 1$. Следовательно, $v$ является собственной функцией оператора $A$, соответствующей собственному значению $\lambda_1$. Таким образом, $v = K\varphi(x)$, где $K \ne 0$ — некоторая константа. Возможны два случая:

а) $K > 0$ и, следовательно, $v > 0$ в $\Omega$, а $\dfrac{\partial v}{\partial n} < 0$ на $\Gamma$;

б) $K < 0$ и, следовательно, $v < 0$ в $\Omega$, а $\dfrac{\partial v}{\partial n} > 0$ на $\Gamma$.

Сходимость последовательности $(v_n)$ к $v$ в $C^1(\overline{\Omega})$ с учетом а) и б) влечет существование номера $n_1 \in N$ такого, что для всех $n > n_1$ выполняется неравенство $v_n(x) > 0$ на $\Omega$, если $K > 0$, и $v_n(x) < 0$ на $\Omega$, если $K < 0$. Поскольку $u_n = v_n\|u_n\|_{C^1}$, для всех $n$, больших $n_1$, получаем, что $u_n(x) > 0$ на $\Omega$ ($u_n(x) < 0$ на $\Omega$ соответственно).

Возьмем $n > n_1$, тогда, домножив на $v$ обе части уравнения (13) и проинтегрировав по $\Omega$, получим

$$\int_\Omega Au_n v\,dx - \int_\Omega (\lambda_1 + \delta_n)u_n v\,dx + \int_\Omega z_n v\,dx = \int_\Omega hv\,dx.$$

В первом интеграле дважды применим формулу интегрирования по частям и с учетом того, что $v|_{\Gamma} = 0$ и $u_n|_{\Gamma} = 0$, будем иметь

$$\int_\Omega (Av - \lambda_1 v) u_n \, dx \;-\; \delta_n \int_\Omega u_n v \, dx \;+\; \int_\Omega z_n v \, dx \;=\; \int_\Omega hv \, dx.$$

Поскольку $v$ — собственная функция оператора $A$, соответствующая собственному значению $\lambda_1$, первый интеграл равен нулю. Поэтому

$$\int_\Omega z_n v \, dx \;=\; \delta_n \| u_n \|_{C^1} \int_\Omega v_n v \, dx \;+\; \int_\Omega hv \, dx.$$

Пусть в (i)-условии выполняется неравенство (8) (неравенство (9)), тогда возьмем $\delta_n \to +0$ ($\delta_n \to -0$ соответственно). Так как $v_n \to v$ в $C^1(\overline{\Omega})$, то

$$\int_\Omega v_n v \, dx \to \int_\Omega v^2 \, dx \;>\; 0$$

и, следовательно, для достаточно больших $n \in N$

$$\int_\Omega z_n v \, dx \;>\; \int_\Omega hv \, dx \tag{19}$$

$$\left( \int_\Omega z_n v \, dx \;<\; \int_\Omega hv \, dx \right). \tag{20}$$

Рассмотрим два случая:

1. Предположим, что $K > 0$. Тогда $v(x) > 0$ и при $n > n_1$ функции $u_n(x) > 0$ на $\Omega$. Из неравенства (8) (неравенства (9)) получаем

$$\int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega hv \, dx \;\le\; \int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega \sup_{\xi \in R^+} g(x,\xi) v \, dx \;\le\; 0$$

$$\left( \int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega hv \, dx \;\ge\; \int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega \inf_{\xi \in R^+} g(x,\xi) v \, dx \;\ge\; 0 \right),$$

так как $u_n(x) > 0$ и

$$z_n(x) \;\le\; g_+(x, u_n(x)) \;=\; \overline{\lim}_{\eta \to u_n(x)} g(x,\eta) \;\le\; \sup_{\xi \in R^+} g(x,\xi)$$

$$\left( z_n(x) \;\ge\; g_-(x, u_n(x)) \;=\; \underline{\lim}_{\eta \to u_n(x)} g(x,\eta) \;\ge\; \inf_{\xi \in R^+} g(x,\xi) \right).$$

Получили противоречие с (19) ((20)).

2. Если предположить, что $K < 0$, то $v$, $u_n$, $n > n_1$, отрицательны в $\Omega$. Из неравенства (8) (неравенства (9)) получаем

$$\int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega hv \, dx \;\le\; \int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega \inf_{\xi \in R^-} g(x,\xi) v \, dx \;\le\; 0$$

$$\left( \int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega hv \, dx \;\ge\; \int_\Omega z_n v \, dx \;-\; \int_\Omega \sup_{\xi \in R^-} g(x,\xi) v \, dx \;\ge\; 0 \right),$$

так как $u_n(x) < 0$ и

$$z_n(x) \;\ge\; g_-(x, u_n(x)) \;=\; \underline{\lim}_{\eta \to u_n(x)} g(x,\eta) \;\ge\; \inf_{\xi \in R^-} g(x,\xi)$$

$$\left( z_n(x) \le g_+(x, u_n(x)) = \overline{\lim}_{\eta \to u_n(x)} g(x, \eta) \le \sup_{\xi \in R^-} g(x, \xi) \right),$$

что противоречит (19) ((20)).

Таким образом, мы приходим к выводу о том, что последовательность $(u_n)$ обобщенных решений аппроксимирующей задачи (10), (11) ограничена в $C^1(\overline{\Omega})$. В силу (13) $Au_n = f_n$, где $f_n = (\lambda_1 + \delta_n)u_n - z_n + h \in L^q(\Omega)$. Учитывая ограниченность $(u_n)$ в $C^1(\overline{\Omega})$, заключаем о существовании константы $\beta > 0$, для которой $\| f_n \|_{L^q(\Omega)} \le \beta$. Отсюда и из теорем об оценке сильных решений эллиптических краевых задач [2] следует ограниченность $(u_n)$ в $W_q^2(\Omega)$. Из рефлексивности $W_q^2(\Omega)$ заключаем о существовании подпоследовательности $(u_{n_k})$ последовательности $(u_n)$, слабо сходящейся в $W_q^2(\Omega)$ к $u$. Следовательно, $u_{n_k} \to u$ в $C^1(\overline{\Omega})$, $Au_{n_k} \rightharpoonup Au$ и $(\lambda_1 + \delta_{n_k})u_{n_k} \to \lambda_1 u$ в $L^q(\Omega)$. Из (13) получаем, что $z_{n_k} \rightharpoonup z$ в $L^q(\Omega)$ и

$$z(x) = -Au(x) + \lambda_1 u_n(x) + h(x).$$

В силу слабой замкнутости $SG$ [13] заключаем, что $z \in SGu$, из чего следует, что

$$z(x) \in [\, g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x)) \,]$$

для почти всех $x \in \Omega$. Следовательно, $u$ — обобщенное решение задачи (1), (2).

Теорема доказана.

***Замечания.*** **3.** Интересно отметить, что если для функции $h \in L^q(\Omega)$ выполнено (i)-условие, то оно выполнено и для $h + h_1$, где $h_1 \in L^q(\Omega)$ — произвольная функция, ортогональная $\operatorname{Ker}(L)$ в $L^2(\Omega)$. Таким образом, теорема дает достаточные условия существования решения задачи (1), (2) сразу для целого класса функций

$$\left\{ h + h_1 : h \quad \text{удовлетворяет (i)-условию, а} \quad \int_\Omega h_1 \varphi\, dx = 0 \right\}.$$

**4.** Как показывает следующий контрпример, (i)-условие нельзя ослабить, заменив его существованием положительного числа $r$, для которого выполняется либо неравенство

$$\int_\Omega \sup_{\xi > r} g(x, \xi) \varphi(x)\, dx \le \int_\Omega h(x) \varphi(x)\, dx \le \int_\Omega \inf_{\xi < -r} g(x, \xi) \varphi(x)\, dx, \tag{21}$$

либо неравенство

$$\int_\Omega \sup_{\xi < -r} g(x, \xi) \varphi(x)\, dx \le \int_\Omega h(x) \varphi(x)\, dx \le \int_\Omega \inf_{\xi > r} g(x, \xi) \varphi(x)\, dx. \tag{22}$$

Действительно, в ограниченной области $\Omega \subset R^m$ с достаточно гладкой границей $\Gamma$ рассмотрим задачу

$$-\Delta u(x) - \lambda_1 u(x) + g(u(x)) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{23}$$

$$u|_\Gamma = 0, \tag{24}$$

где $\lambda_1$ — наименьшее собственное значение оператора $-\Delta$ с граничным условием (24), а нелинейность

$$g(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty), \\ 1, & \xi \in (-1, 1). \end{cases}$$

Очевидно, что для функций $g$ и $h$ выполнены условия (21), (22). Предположим, что существует $u \in W_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_q^1(\Omega)$ — решение задачи (23), (24). Тогда, умножив обе части уравнения (23) на собственную функцию $\varphi$ оператора $-\Delta$ с граничным условием (24), соответствующую $\lambda_1$, и проинтегрировав по частям, получим

$$\int_\Omega g(u(x))\varphi(x)\,dx = 0.$$

Поскольку функция $g$ неотрицательна, а $\varphi$ либо положительна, либо отрицательна на $\Omega$, то $g(u(x)) = 0 \quad \forall\, x \in \Omega$. Следовательно, $|u(x)| > 1$ для любого $x \in \Omega$, что невозможно в силу непрерывности $u$ в $\overline{\Omega}$ и граничного условия (24).


1. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Системы с гистерезисом. – М.: Наука, 1983. – 272 с.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
3. *Landesman E., Lazer A.* Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance // J. Math. and Mech. – 1970. – **19**, № 7. – P. 609–623.
4. *Basile N., Mininni M.* Some solvability results for elliptic boundary value problems in resonance at the first eigenvalue with discontinuous nonlinearities // Boll. Unione math. ital. – 1980. – **17**-B, № 3. – P. 1023–1033.
5. *Massabo I.* Elliptic boundary value problems at resonance with discontinuous nonlinearities // Ibid. Ser 5. – 1980. – **17**-B, № 3. – P. 1302–1320.
6. *Chang K.-C.* Variational methods for nondifferentiable function and their applications to partial differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1981. – **80**, № 1. – P. 102–129.
7. *Павленко В. Н., Винокур В. В.* Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 5. – С. 43–58.
8. *Павленко В. Н., Винокур В. В.* Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 3. – С. 349–363.
9. *Bartolo P., Benci V., Fortunato D.* Abstract critical point theorems and applications to some nonlinear problems with strong resonance at infinity // Nonlinear Anal. – 1983. – **7**, № 9. – P. 981–1012.
10. *Iannacci R., Nkashama M. N., Ward J. R.* Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance // Proc. Amer. Math. Soc. – 1989. – **311**, № 2. – P. 711–725.
11. *Павленко В. Н., Чиж Е. А.* Задача Дирихле для уравнения Лапласа с разрывной нелинейностью без условия Ландесмана – Лазера // Вестн. Челябин. ун-та. Сер. 3. Математика. Механика. Информатика. – 2002. – № 1(6). – С. 120–126.
12. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н,* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 540 с.
13. *Павленко В. Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 729–736.
14. *Ma T. W.* Topological degree for set valued compact vector fields in locally convex spaces // Rozprawy Mat. – 1972. – **92**. – P. 3–47.


Получено 17.08.2003