УДК 517.53

М. В. Заболоцький, канд. фіз.-мат. наук (Львів. ун-т)

Про нижні типи δ-субгармонічних функцій нецілого порядку

Показано, що нижні типи функцій $T(r, u)$ і $N(r, u) = N(r, u_1) + N(z, u_2)$ відносно уточненого порядку $\rho(r)$ δ-субгармонічної в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функції $u = u_1 - u_2$ нецілого порядку ρ співпадають, тобто одночасно мінімальні або середні. У випадку довільного уточненого порядку $\rho(r)$ твердження, взагалі кажучи, хибне.

Показано, что нижние типы функций $T(r, u)$ и $N(r, u) = N(r, u_1) + N(r, u_2)$ относительно уточненного порядка $\rho(r)$ δ-субгармонической в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функции $u = u_1 - u_2$ нецелого порядка ρ совпадают, т. е. одновременно минимальны или средние. В случае произвольного уточненного порядка $\rho(r)$ утверждение, вообще говоря, ложно.

Нехай u — δ-субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функція, тобто функцію u можна зобразити в вигляді $u = u_1 - u_2$, де u_1 і u_2 — субгармонічні в $\mathbb{R}^m$ функції. Позначимо через μ_1, μ_2 рісівські маси функцій u_1 і u_2. Будемо вважати, що ці маси зосереджені на множинах, які не перетинаються. Як випливає з відомої теореми Хана [1, с. 350], це не зменшує загальності, але дозволяє спростити викладки. Не зменшуючи загальності, припускаємо також, що порядки функцій u_1 і u_2 не перевищують порядку функції u, функції u_1 і u_2 — гармонічні в одиничному околі нуля і $u_1(0) = u_2(0) = 0$.

Нехай

$$c(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| \leqslant r\}, \quad S(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^m : |x - a| = r\},$$

$$n(t, u_i) = \mu_i(c(0, t)),\ d_m = m - 2,\ m \geqslant 3,\ d_2 = 1,$$

$$N(r, u_i) = d_m \int_0^r n(t, u_i)\, t^{1-m} dt, \quad i = 1, 2,$$

$$T(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0,r)} u^+(x)\, d\sigma(x) + N(r, u_2), \tag{1}$$

де $d\sigma(x)$ — елемент площі на $S(0, r)$, $c_m = 2\pi^{m/2}/\Gamma(m/2)$, $u^+(x) = \max\{u(x), 0\}$.

Нехай $N(r, u) = N(r, u_1) + N(r, u_2)$, $\underline{\Delta}(T)$ і $\overline{\Delta}(T)$ — відповідно нижня і верхня границі функції $T(r, u)/r^{\rho(r)}$ при $r \to \infty$, де $\rho(r)$ — уточнений порядок (див., наприклад, [2, с. 69]). Величини $\overline{\Delta}(T)$ і $\underline{\Delta}(T)$ називають типом і нижнім типом функції u (або $T(r, u)$) відносно уточненого порядку $\rho(r)$. Аналогічно $\overline{\underline{\Delta}}(N) = \overline{\underline{\lim}}_{r \to \infty} N(r, u)/r^{\rho(r)}$ (це тип і нижній тип функції $N(r, u)$). Будемо говорити, що тип (нижній тип) максимальний, середній або мінімальний, в залежності від того, $\overline{\Delta}(T) = +\infty$, $0 < \overline{\Delta}(T) < +\infty$ чи $\overline{\Delta}(T) = 0$ ($\underline{\Delta}(T) = +\infty$, $0 < \underline{\Delta}(T) < \infty$ або $\underline{\Delta}(T) = 0$).

Відомо [2, с. 81], що для мероморфних функцій нецілого порядку ρ типи функцій $T(r, f)$ і $N(r, 0, \infty, f) = N(r, 0, f) + N(r, \infty, f)$ відносно довільного уточненого порядку $\rho(r)$ співпадають, тобто обидва одночасно максимальні, середні або мінімальні.

В даній статті показано, що справедливе аналогічне твердження для δ-субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функцій u, а також досліджується для цих функцій співвідношення між нижніми типами $T(r, u)$ і $N(r, u)$.

Теорема 1. *Нехай u — δ-субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функція порядку ρ, ρ — неціле число. Тоді типи функцій $T(r, u)$ і $N(r, u)$ відносно довільного уточненого порядку $\rho(r)$ співпадають.*

Доведення. Враховуючи, що [3, с. 145, 146]

$$N(r, u_2) = \int_{C(0,r)} g(0, \xi)\, d\mu_2(\xi) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0,r)} u_2(x)\, d\sigma(x),$$

де $g(0, \xi) = \ln|r/\xi|$ при $m = 2$ і $g(0, \xi) = |\xi|^{2-m} - r^{2-m}$ при $m \geqslant 3$, з (1) одержуємо

$$T(r, u) = \frac{1}{c_m r^{m-1}} \int_{S(0,r)} \max\{u_1(x), u_2(x)\}\, d\sigma(x). \tag{2}$$

Нехай $|x| = r$, $q = [\rho]$, $B(r, u_i) = \sup_{|x|=r} u_i(x)$, $i = 1, 2$. Тоді з (2) і леми 4.4 з [3] маємо

$$T(r, u) \leqslant \max\{B(r, u_1), B(r, u_2)\} \leqslant C(q, m)\, r^q \Big(\int_1^r N(t, u)\, t^{-q-1} dt + $$
$$ + r \int_r^\infty N(t, u)\, t^{-q-2} dt \Big), \tag{3}$$

де $C(q, m)$ — постійна, що залежить тільки від q і m. Надалі такі постійні будемо позначати через $C_j(q, m)$.

Припустимо, що $\overline{\Delta}(N) = \Delta < +\infty$. Тоді $N(r, u) \leqslant (\Delta + \varepsilon) r^{\rho(r)}$ для $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ і

$$r^q \int_1^r N(t, u) t^{-q-1} dt \leqslant N(r_0, u)/qr^q + (\Delta + \varepsilon) \int_{r_0}^r t^{\rho(t)-q-1} dt r^q \leqslant O(r^q) +$$

$$+ (\Delta + \varepsilon) r^q \int_{r_0}^r t^{\rho(t)-q-1} dt.$$

Враховуючи, що

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_{r_0}^r t^{\rho(t)-q-1} \partial t}{r^{\rho(r)-q}} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{\rho(r) - q + r\rho'(r) \ln r} = \frac{1}{\rho - q},$$

одержуємо

$$r^q \int_{r_0}^r N(t, u) t^{-q-1} dt \leqslant C_1(q, m)(\Delta + \varepsilon) r^{\rho(r)}.$$

Отже, для $r \geqslant r_0(\varepsilon)$ з (3) маємо

$$T(r, u)/r^{\rho(r)} \leqslant C_2(q, m)(\Delta + \varepsilon)\Big(1 + r^{q+1-\rho(r)} \int_r^\infty t^{\rho(t)-q-2} dt\Big) = C_3(q, m)(\Delta + \varepsilon).$$

З останньої нерівності і з співвідношення $\overline{\Delta}(N) \leqslant 2\overline{\Delta}(T)$ одержуємо $0{,}5\overline{\Delta}(N) \leqslant \overline{\Delta}(T) \leqslant C_3(q, m)\overline{\Delta}(N)$, що доводить теорему.

Нехай $\rho^*(r)$ — уточнений порядок функції u, тобто, $\rho^*(r)$ є уточненим порядком і $0 < \varlimsup\limits_{r\to\infty} T(r, u)/r^{\rho^*(r)} < +\infty$. У цьому випадку нижні типи функцій $T(r, u)$ і $N(r, u)$ будемо позначати відповідно $\underline{\Delta}^*(T)$ і $\underline{\Delta}^*(N)$. Очевидно, що $\underline{\Delta}^*(T) < +\infty$, $\underline{\Delta}^*(N) < +\infty$.

Теорема 2. *Нехай u — δ-субгармонічна в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функція порядку ρ, ρ — неціле число. Тоді $\underline{\Delta}^*(T) = \underline{\Delta}^*(N) = 0$ або $0 < \underline{\Delta}^*(T) < +\infty$ і $0 < \underline{\Delta}^*(N) < +\infty$.*

Зауваження. В [4] для δ-субгармонічних в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, функцій порядку ρ, $0 < \rho < 1$, знайдено точну оцінку зверху величини $\underline{\Delta}^*(T)$ через величини $\overline{\Delta}(N_0)$ і $\underline{\Delta}^*(N_0)$, де $N_0(r, u) = \max\{N(r, u_1), N(r, u_2)\}$. При цьому $\underline{\Delta}(N)$ і $\underline{\Delta}(N_0)$ одночасно дорівнюють нулю. З цієї оцінки випливає $\underline{\Delta}^*(T) = 0$, якщо $\underline{\Delta}^*(N_0) = 0$. Тому теорему 2 доведемо для $\rho > q \geqslant 1$.

Доведення. Враховуючи, що $\underline{\Delta}^*(N) \leqslant 2\underline{\Delta}^*(T) < +\infty$, досить показати, що $\underline{\Delta}^*(T) = 0$, якщо $\underline{\Delta}^*(N) = 0$. Нехай $\rho^*(r) \equiv \rho$, $q \geqslant 1$, $\overline{\Delta}(N) = \Delta$, $0 < \Delta < +\infty$, $N(r_k, u) = \varepsilon_k^\rho r_k^\rho$, де (r_k), (ε_k) — послідовності додатніх чисел, $r_k \to +\infty$, $\varepsilon_k \to 0$, при $k \to \infty$. Тоді $\underline{\Delta}^*(N) = 0$. Нехай $\Delta_1 = \Delta + \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$, $s_k = \sqrt{\varepsilon_k}\, r_k$. З (3) для $k \geqslant k_0(\varepsilon)$ одержуємо

$$T(s_k, u) \leqslant C(q, m) s_k^q \Big(\Delta_1 \int_1^{\sqrt{\varepsilon_k} s_k} t^{\rho-q-1} dt + N(s_k, u) \int_{\sqrt{\varepsilon_k} s_k}^{s_k} t^{-q-1} dt +$$

$$+ s_k N(r_k, u) \int_{s_k}^{r_k} t^{-q-2} dt + \Delta_1 s_k \int_{r_k}^\infty t^{\rho-q-2} dt\Big) \leqslant C_1(q, m) s_k^q (\Delta_1 s_k^{\rho-q} \varepsilon_k^{(\rho-q)/2} +$$

$$+ N(r_k, u) \varepsilon_k^{-q/2} s_k^{-q} + \varepsilon_k^\rho r_k^\rho s_k^{-q} + \Delta_1 s_k r_k^{\rho-q-1}) = C_1(q, m) s_k^\rho (\Delta_1 \varepsilon_k^{(\rho-q)/2} +$$

$$+\varepsilon_k^{\rho-q/2}(r_k/s_k)^\rho+\varepsilon_k^\rho(r_k/s_k)^\rho+\Delta_1(s_k/r_k)^{q+1-\rho})=C_1(q,m)\,s_k^\rho(\Delta_1\varepsilon_k^{(\rho-q)/2}+$$
$$+\varepsilon_k^{(\rho-q)/2}+\varepsilon_k^{\rho/2}+\Delta_1\varepsilon_k^{(q+1-\rho)/2}).$$

З останньої нерівності маємо $\underline{\Delta}^*(T)=0$. Перехід від $\rho^*(r)\equiv\rho$ до загального випадку здійснюється, як в [5].

Покажемо, що у випадку довільного уточненого порядку $\rho(r)$ твердження теореми 2, взагалі кажучи, хибне, тобто можливий випадок $\underline{\Delta}(N)=0$, $\underline{\Delta}(T)>0$.

Розглянемо субгармонічну в $\mathbb{R}^m$, $m\geqslant 2$, функцію порядку ρ, $0<\rho<1$, $v(0)=0$, гармонічну всюди, за винятком півосі $x_1\geqslant 1$, $x_2=0,\ \ldots,\ x_m=0$, таку, що

$$n(r,v)=\begin{cases}\rho r^{\rho+m-2}, & r'_{k-1}\leqslant r\leqslant r_k;\\ \rho r_k^{\rho+m-2}, & r_k\leqslant r<r_k\ln r_k;\\ \rho r_k^{\rho+m-2}\ln^{m-1+\rho}r_k, & r_k\ln r_k\leqslant r\leqslant r'_k,\end{cases}$$

де (r_k) — послідовність додатніх чисел, $r_{k+1}/r_k\to\infty$ при $k\to\infty$, $r'_k=r_k\ln^{1+1/(m-2+\rho)}r_k$, $r'_0=1$. Легко бачити, що $N(r,v)\leqslant d_m r^\rho\ln^{m-1+\rho}r$, звідки одержуємо, що порядок функції v дорівнює ρ. Враховуючи, що при $m=2$

$$N(r_k\ln r_k,v)=\rho r_k^\rho\ln\ln r_k(1+o(1)),\quad k\to\infty,$$

а при $m\geqslant 3$

$$N(r_k\ln r_k,v)=O(r_k^\rho)+\rho d_m r_k^{m-2+\rho}\int_{r_k}^{r_k\ln r_k}t^{1-m}dt=O(r_k^\rho),\quad k\to\infty,$$

маємо $\underline{\Delta}(N)=0$ для $\rho(r)\equiv\rho$. Покажемо, що для $\rho(r)\equiv\rho$ виконується $\underline{\Delta}(T)>0$.

Нехай $r_k\leqslant r\leqslant 2r_k\ln r_k$. За лемою 4.6 з [3] при $m=2$

$$B(r,v)\geqslant r\int_{r_k\ln r_k}^{2r_k\ln r_k}\frac{n(t,v)}{t(t+r)}dt\geqslant\frac{rn(r_k\ln r_k,v)}{1+\dfrac{r}{r_k\ln r_k}}\int_{r_k\ln r_k}^{2r_k\ln r_k}t^{-2}dt\geqslant$$
$$\geqslant\frac{n(r_k\ln r_k,v)\,r}{6\ln r_k\cdot r_k}=(\rho/6)\,r\cdot r_k^{\rho-1}\ln^\rho r_k,$$

а при $m\geqslant 3$

$$B(r,v)\geqslant d_m\int_{r_k\ln r_k}^{2r_k\ln r_k}n(t,v)\,((t+r)^{m-1}-t^{m-1})/(t^{m-1}(t+r)^{m-1})\,dt\geqslant$$
$$\geqslant d_m n(r_k\ln r_k,v)\int_{r_k\ln r_k}^{2r_k\ln r_k}(m-1)\,t^{m-2}r/(t^{2m-2}(1+r/t)^{m-1})\,dt\geqslant$$
$$\geqslant C_1(0,m)\,rn(r_k\ln r_k,v)(r_k\ln r_k)^{1-m}=C_1(0,m)\,rr_k^{\rho-1}\ln^\rho r_k.$$

Звідси

$$\frac{B(r,v)}{r^\rho}\geqslant C_1(0,m)\left(\frac{r_k}{r}\right)^{\rho-1}\rho\ln^\rho r_k\geqslant C_1(0,m)\,\rho\ln^\rho r_k. \tag{4}$$

Нехай $2r_k\ln r_k\leqslant r\leqslant r'_k$. Тоді для $m=2$ маємо

$$\frac{B(r,v)}{r^\rho}\geqslant r^{1-\rho}\int_{r_k\ln r_k}^{r}\frac{n(t,v)}{t(t+r)}dt\geqslant\frac{n(r_k\ln r_k,v)}{2r^\rho}\ln\frac{r}{r_k\ln r_k}\geqslant$$
$$\geqslant\rho\left(\frac{r}{r_k\ln r_k}\right)^{-\rho}\ln r_k\ln\frac{r}{r_k\ln r_k}=\rho\ln r_k\tau^{-\rho}\ln\tau,$$

а при $m \geqslant 3$

$$\frac{B(r,v)}{r^{\rho}} \geqslant \frac{d_m}{r^{\rho}} \int_{r_k \ln r_k}^{r} n(t,v) \frac{(t+r)^{m-1} - t^{m-1}}{t^{m-1}(t+r)^{m-1}} dt \geqslant \frac{d_m r(m-1)}{2^{m-1} r^{m-1+\rho}} \times$$

$$\times \int_{r_k \ln r_k}^{r} n(t,v)/t\,dt \geqslant C_1(0,m) \frac{n(r_k \ln r_k, v)}{r^{m-2+\rho}} \ln \frac{r}{r_k \ln r_k} =$$

$$= C_1(0,m)\,\rho \ln r_k \tau^{-\rho+2-m} \ln \tau,$$

де $\tau = r/(r_k \ln r_k)$, $2 \leqslant \tau \leqslant (\ln r_k)^{1/(m-2+\rho)}$.

Функція $\psi(\tau) = \tau^{-\rho+2-m} \ln \tau$ є зростаючою при $2 \leqslant \tau < \exp(1/(m-2+\rho))$ і спадною при $\tau > \exp(1/(m-2+\rho))$. Отже,

$$B(r,v)/r^{\rho} \geqslant C_1(0,m)\,\rho \ln r_k \min\{\psi(2), \psi(\ln^{1/(m-2+\rho)} r_k)\} \geqslant$$

$$\geqslant C_1(0,m)\,\rho/(m-2+\rho) \ln\ln r_k. \tag{5}$$

Для $r'_k \leqslant r \leqslant r_{k+1}$ маємо

$$B(r,v)/r^{\rho} \geqslant N(r,v)/r^{\rho} \geqslant 1. \tag{6}$$

З (4)—(6) одержуємо $\varliminf_{r\to\infty} B(r,v)/r^{\rho} \geqslant 1$. Враховуючи, що [3, с. 162] $T(r,v) \leqslant B(r,v) \leqslant 3 \cdot 2^{m-2} T(r,v)$, маємо $\underline{\Delta}(T) > 0$.

1. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М. : Наука, 1981.— 544 с.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций.— М. : Наука, 1970.— 592 с.
3. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции.— М. : Мир, 1980.— 304 с.
4. *Заболоцкий Н. В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик δ-субгармонических функций порядка <1 // Теория функций, функцион. анализ и их прил.— 1983.— Вып. 39.— С. 49—56.
5. *Кондратюк А. А.* Экстремальный индикатор для целых функций с положительными нулями // Лит. мат. сб.— 1967.— 7, № 1.— С. 79—117.

Одержано 23.03.92