УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ РАЗРЕШИМОСТИ ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ ГАУССА

We investigate the well-known Gauss variational problem considered over classes of Radon measures associated with a system of sets in a locally compact space. Under fairly general assumptions, we obtain necessary and sufficient conditions for its solvability. As an auxiliary result, we describe potentials of vague and (or) strong limit points of minimizing sequences of measures. The results obtained are also specified for the Newton kernel in $\mathbb{R}^n$.

Досліджується добре відома варіаційна задача Гаусса над класами мір Радона, асоційованих із системою множин у локально компактному просторі. При досить загальних припущеннях отримано необхідні та достатні умови її розв'язності. Як допоміжний результат, знайдено описи потенціалів широких та (або) сильних граничних точок мінімізуючих послідовностей мір. Отримані результати конкретизовано на випадок ядра Ньютона в $\mathbb{R}^n$.

Введение. Настоящая работа посвящена дальнейшему исследованию хорошо известной вариационной задачи Гаусса (см., например, [1 – 5]), рассматриваемой в локально компактном (отделимом) пространстве $\mathbf{X}$. Необходимые сведения из теории мер и интегрирования содержатся в [6, 7] (см. также обзоры в [8, 9]).

Под *ядром* κ на $\mathbf{X}$ будем понимать неотрицательную полунепрерывную снизу функцию $\kappa = \kappa(x, y)$ на $\mathbf{X} \times \mathbf{X}$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ — линейное пространство всех вещественнозначных мер Радона ν на $\mathbf{X}$, снабженное топологией *широкой* сходимости [6]. *Энергия* меры $\nu \in \mathfrak{M}$ относительно ядра κ определяется равенством [8]

$$\kappa(\nu, \nu) := \int \kappa(x, y) d(\nu \otimes \nu)(x, y),$$

если только этот интеграл определен (как конечное число или $\pm\infty$). Обозначим через $\mathcal{E}$ множество всех $\nu \in \mathfrak{M}$ с конечной энергией.

Пусть f — вещественнозначная функция с областью определения в $\mathbf{X}$. Для каждого $\nu \in \mathcal{E}$ обозначим

$$\mathcal{F}_f(\nu) := \kappa(\nu, \nu) - 2\int f \, d\nu,$$

если только $\int f \, d\nu$ определен. Задача минимизации $\mathcal{F}_f(\nu)$, где ν пробегает заданное подмножество из $\mathcal{E}$, называется (*вариационной*) *задачей Гаусса*. Наряду со своими естественными физическими интерпретациями задача Гаусса имеет многочисленные существенные приложения к задачам теории потенциала и конструктивной теории функций [2].

Пусть I — конечное множество индексов, а $A_i \subset \mathbf{X}$, $i \in I$, — непустые множества, каждому из которых приписан знак $+1$ или -1, причем

$$\overline{A_i} \cap \overline{A_j} = \varnothing, \quad \text{если} \quad \operatorname{sign} A_i \neq \operatorname{sign} A_j. \tag{1}$$

Обозначим

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i.$$

Пусть $a = (a_i)_{i \in I}$ — числовой вектор с $a_i > 0$, $i \in I$, а g — положительная непрерывная функция на $\overline{A}$. Всюду далее под задачей Гаусса понимается задача минимизации функционала $\mathcal{F}_f$ над (вообще говоря, широко некомпактным) классом всех мер μ вида

$$\mu = \sum_{i \in I} (\operatorname{sign} A_i)\, \mu^i, \tag{2}$$

где $\mu^i \geq 0$ — мера, сосредоточенная на A_i и удовлетворяющая условию $\int g\, d\mu^i = a_i$.

В предыдущих работах автора [3, 5] показано, что задача Гаусса, вообще говоря, *не разрешима*. Более подробно, для фиксированных A_i, $i \in I$, κ, g и f, удовлетворяющих достаточно общим предположениям, в [3, 5] указан вектор начальных условий a такой, что соответствующая вариационная задача не имеет решений в классе допустимых мер.

Как продолжение и развитие этих исследований, в настоящей работе при весьма общих предположениях на A_i, $i \in I$, κ, g и f найдено *полное описание* множества всех тех векторов a, для которых имеет место отмеченное явление неразрешимости. Описание дано в терминах экстремалей в надлежащим образом сформулированной вспомогательной вариационной задаче. Полученные результаты конкретизированы для ядра Ньютона в $\mathbb{R}^n$.

1. Постановка основной и вспомогательной вариационных задач. Для заданного множества $Q \subset \mathbf{X}$ пусть $\mathfrak{M}^+(Q)$ обозначает класс всех неотрицательных мер, сосредоточенных на Q. Обозначим $\mathcal{E}^+(Q) := \mathfrak{M}^+(Q) \cap \mathcal{E}$.

Пусть $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ — упорядоченная совокупность множеств A_i, $i \in I$, определенных во введении. Зафиксировав $\mathcal{A}$, обозначим $I^+ := \{ i \in I : \operatorname{sign} A_i = +1 \}$, $I^- := I \setminus I^+$,

$$A^+ := \bigcup_{i \in I^+} A_i, \qquad A^- := A \setminus A^+.$$

Всюду далее предполагаем, что I^+ и I^- не пусты. Осуществляя над множеством A_i теоретико-множественные операции, полагаем $\operatorname{sign} B_i := \operatorname{sign} A_i$ для любого $B_i \subset \overline{A_i}$.

Обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ подмножество из $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$, состоящее из всех *линейных комбинаций* вида (2), где $\mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i)$ для всех $i \in I$. Два элемента из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$,

$$\mu_1 = \sum_{i \in I} (\operatorname{sign} A_i)\, \mu_1^i \quad \text{и} \quad \mu_2 = \sum_{i \in I} (\operatorname{sign} A_i)\, \mu_2^i,$$

будем считать *тождественными* ($\mu_1 \equiv \mu_2$) в том и только в том случае, когда

$$\mu_1^i = \mu_2^i \quad \forall\, i \in I.$$

Обозначим $\mathcal{E}(\mathcal{A}) := \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}$.

Зафиксировав множество индексов J такое, что $I^- \subset J \subset I$, числа $a_i > 0$, $i \in J$, и функции g и f (см. введение), обозначим

$$\mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g) := \left\{ \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}) : \int g\, d\mu^i = a_i \quad \forall i \in J \right\},$$

$$\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a_J, g) := \left\{ \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g) : \int f\, d\mu \ \text{ определен и } \neq -\infty \right\},$$

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a_J, g)} \mathcal{F}_f(\mu).$$

(Инфимум над пустым множеством, как обычно, полагаем равным $+\infty$.)

Задачу о минимизации $\mathcal{F}_f(\mu)$ в классе $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a_J, g)$ назовем $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g)$-*задачей.* $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g)$-задача называется *разрешимой,* если существуют *минимизирующие* меры λ:

$$\lambda \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a_J, g), \qquad \mathcal{F}_f(\lambda) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g).$$

Класс всех таких λ обозначим через $\mathcal{W} = \mathcal{W}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$. Пусть $\mathcal{W}_{bou} = \mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ обозначает его подкласс, состоящий из всех λ с $|\lambda|(\mathbf{X}) < \infty$.

В случае $J = I$ индекс J в принятых обозначениях и определениях будем опускать.

В пп. 4, 9 и 10 (см. теоремы 1 – 5) при достаточно общих предположениях на κ, f и g найдены условия на $\mathcal{A}$ и вектор $a = (a_i)_{i\in I}$, необходимые и (или) достаточные для разрешимости (основной) $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. Условия на a формулируются в терминах экстремальных мер во (вспомогательной) $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g)$-задаче с надлежащим J, $J \neq I$.

В п. 17 (см. теорему 8) некоторые из упомянутых результатов конкретизированы на случай ядра Ньютона $|x-y|^{2-n}$ в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

В качестве вспомогательного результата получены описания потенциалов предельных точек минимизирующих в $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче направленностей (см. теоремы 6 и 7).

2. $\mathcal{A}$-согласованные и $\mathcal{A}$-совершенные ядра. Всюду далее, если не оговорено обратное, ядро κ предполагается *положительно определенным.* Это, напомним, означает, что κ симметрично (т. е. $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всех x, y) и энергия $\kappa(\nu, \nu)$, $\nu \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$, неотрицательна, если только определена. Тогда множество $\mathcal{E}$ образует предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\kappa(\nu_1, \nu_2) := \int \kappa(x, y)\, d(\nu_1 \otimes \nu_2)(x, y)$$

и полунормой $\|\nu\| := \sqrt{\kappa(\nu, \nu)}$ (см., например, [8]). Топология в $\mathcal{E}$, определяемая полунормой $\|\cdot\|$, называется *сильной.* (Положительно определенное) ядро κ называется *строго* положительно определенным, если утверждения $\|\nu\| = 0$, $\nu \in \mathcal{E}$, и $\nu = 0$ эквивалентны.

Известно, что пространство $\mathcal{E}$, вообще говоря, не полно в сильной топологии. Действительно, согласно классическим результатам Картана [10], $\mathcal{E}$ не полно даже в случае ядра Ньютона в $\mathbb{R}^n$. С другой стороны, автором в [11 – 13] доказано, что для ядер Ньютона и Рисса в $\mathbb{R}^n$ желаемое свойство сильной полноты будет иметь место, если ограничиться рассмотрением тех $\nu \in \mathcal{E}$, у которых положительная и отрицательная части сосредоточены на паре заданных замкнутых дизъюнктных множеств (см. также [14, 15], где получены близкие результаты для ядер Грина).

Концепции $\mathcal{A}$-*согласованных* и $\mathcal{A}$-*совершенных* ядер, определенные автором в [16], получены постулированием части упомянутых результатов из [11 – 15] на случай произвольных положительно определенного ядра κ и локально компактного пространства $\mathbf{X}$.

Обозначим $\overline{\mathcal{A}} := (\overline{A}_i)_{i\in I}$. Всюду далее S обозначает направленное множество [17].

Пусть $\mathbb{B}(\mathcal{A})$ — класс всех сильных направленностей[1] Коши $(\mu_s)_{s\in S} \subset \subset \mathcal{E}(\mathcal{A})$ с

$$\sup_{s\in S}|\mu_s|(\mathbf{X}) < +\infty. \tag{3}$$

Определение 1 [16]. *Ядро* κ *называется* $\mathcal{A}$*-совершенным, если для каждого* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *выполняются следующие условия*:

$(\mathcal{A}P_1)$ $(\mu_s)_{s\in S}$ *сильно сходится в* $\mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}})$;

$(\mathcal{A}P_2)$ *если* $\mu \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}})$ — *сильный предел* $(\mu_s)_{s\in S}$, *то* $\mu_s \to \mu$ *широко.*

Определение 2 [16]. *Ядро* κ *называется* $\mathcal{A}$*-согласованным, если для каждого* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *выполняется следующее условие*:

$(\mathcal{A}C)$ *если* μ — *широкая предельная точка* $(\mu_s)_{s\in S}$, *то* $\mu \in \mathcal{E}$ *и* $\mu_s \to \mu$ *сильно.*

Предложение 1 [16]. *Для того чтобы ядро было* $\mathcal{A}$*-совершенным, необходимо и достаточно, чтобы оно было* $\mathcal{A}$*-согласованным и удовлетворяло следующему условию*:

$(\mathcal{A}SD)$ *если* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *сходится сильно к* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}})$, *то* $\gamma_1 = \gamma_2$.

Замечание **1.** Свойство $(\mathcal{A}SD)$, очевидно, необходимо выполняется, если ядро κ строго положительно определено. Обратно, из свойства $(\mathcal{A}SD)$ вытекает строгая положительная определенность сужения κ на любое компактное множество $K \subset A$. Более общо, если κ удовлетворяет условию $(\mathcal{A}SD)$, то для любой ограниченной меры $\nu \in \mathcal{E}$, сосредоточенной на A, утверждения $\|\nu\| = 0$ и $\nu = 0$ эквивалентны [16].

Пример (см. [11 – 15]). В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ядра Рисса $|x-y|^{\alpha-n}$ произвольного порядка $\alpha \in (0, n)$ (и, в частности, ядро Ньютона $|x-y|^{2-n}$) $\mathcal{A}$-совершенны для любого $\mathcal{A}$. Ядро Грина G_D (где $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, а G_D — его обобщенная функция Грина) $\mathcal{A}$-совершенно для любого $\mathcal{A}$, удовлетворяющего условию $\operatorname{dist}(A^+, A^-) > 0$.

Замечание **2.** Концепции $\mathcal{A}$-согласованных и $\mathcal{A}$-совершенных ядер особо эффективны в экстремальных задачах на классах *знакопеременных* мер (см. [3, 5, 16, 18], а также результаты настоящей работы). Напротив, в экстремальных задачах на классах *неотрицательных* мер часто используется свойство *согласованности* ядер, определенное в [8]:

(C) *если* ν — *широкая предельная точка сильной направленности Коши* $(\nu_s)_{s\in S}$ *из* $\mathcal{E}^+(\mathbf{X})$, *то* $\nu_s \to \nu$ *сильно.*

Между концепциями согласованных и $\mathcal{A}$-согласованных ядер имеет место следующее соотношение [19]: *из согласованности* κ *вытекает его* $\mathcal{A}$*-согласованность, если, дополнительно,* κ *ограничено сверху на* $A^+ \times A^-$.

3. Определения, обозначения, предположения. Пусть $C(\cdot)$ обозначает *внутреннюю емкость* множества [8]. Говорят [8], что утверждение $R(x)$, содержащее переменную точку $x \in \mathbf{X}$, справедливо *приблизительно всюду* (пр. вс.) в $Q \subset \mathbf{X}$, если множество всех тех $x \in Q$, для которых $R(x)$ ложно,

[1] Необходимость рассмотрения направленностей (но не последовательностей) обусловлена тем, что пространство $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$, вообще говоря, не удовлетворяет первой аксиоме счетности.

имеет нулевую внутреннюю емкость. Легко показать (ср. с леммой 3 из [5]), что если $R(x)$ справедливо пр. вс. в Q, то $R(x)$ справедливо ν-почти всюду для каждой ограниченной[2] меры $\nu \in \mathcal{E}^+(Q)$.

Потенциал меры $\nu \in \mathfrak{M}$ в точке $x \in \mathbf{X}$ определяется равенством [8]

$$\kappa_\nu(x) := \kappa(x, \nu) := \int \kappa(x, y) d\nu(y)$$

(конечно, если этот интеграл определен). Отметим, что при условии $\nu \in \mathcal{E}$ потенциал $\kappa_\nu(\cdot)$ определен пр. вс. в $\mathbf{X}$ и конечен [8].

Рассмотрим следующее условие на ядро κ:

($\mathbf{X}_\infty$) *для любых $\varepsilon > 0$ и компактного множества $K \subset \mathbf{X}$ существует компактное множество $K' \subset \mathbf{X}$ такое, что*

$$|\kappa(x, y)| < \varepsilon \quad \forall x \in K, \quad y \in \mathbf{X} \setminus K'.$$

В настоящей работе существенно используется следующее утверждение о непрерывности отображения $(x, \nu) \mapsto \kappa(x, \nu)$, $(x, \nu) \in \mathbf{X} \times \mathfrak{M}(\mathbf{X})$.

Предложение 2 [9]. *Пусть ядро κ непрерывно при $x \neq y$ и удовлетворяет условию ($\mathbf{X}_\infty$); $F \subset \mathbf{X}$ — замкнутое множество; $(x_s)_{s \in S} \subset \mathbf{X}$ — направленность точек, сходящаяся к $x_0 \notin F$; $(\nu_s)_{s \in S} \subset \mathfrak{M}^+(F)$ — широко сходящаяся к ν_0 направленность мер таких, что*

$$\sup_{s \in S} \nu_s(\mathbf{X}) < \infty.$$

Тогда справедливо равенство[3]

$$\kappa(x_0, \nu_0) = \lim_{s \in S} \kappa(x_s, \nu_s).$$

Определение 3 (см. [20]). *Ядро κ называется удовлетворяющим обобщенному принципу максимума с постоянной $h \geq 1$, если для каждой меры $\nu \geq 0$ такой, что ее носитель $S(\nu)$ компактен и $\kappa(x, \nu) \leq M$ на $S(\nu)$, выполняется $\kappa(x, \nu) \leq hM$ в $\mathbf{X}$.*

Определение 4 (см. [20]). *Ядро κ называется удовлетворяющим полному принципу максимума, если для всех $\nu \in \mathcal{E}^+(\mathbf{X})$ и $\mu \in \mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$ таких, что $S(\nu)$ компактно и $\kappa(x, \nu) \leq \kappa(x, \mu) + b$ на $S(\nu)$, где $b \geq 0$, выполняется $\kappa(x, \nu) \leq \kappa(x, \mu) + b$ в $\mathbf{X}$.*

***Замечание* 3.** Из полного принципа максимума вытекает обобщенный принцип максимума с постоянной $h = 1$. В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, полному принципу максимума удовлетворяют ядра Ньютона и Грина, а также ядра Рисса с показателем $\alpha \in (0, 2]$ (см. [20]).

Без дополнительных указаний в каждом из пп. 4 – 12 будем считать, что ядро κ $\mathcal{A}$-согласованно, функция f универсально измерима и определена пр. вс. в $\overline{A}$,

$$g_{\min} := \inf_{x \in A} g(x) > 0 \tag{4}$$

и выполнено естественное условие

---

[2] Условие ограниченности меры ν можно опустить, если $\mathbf{X}$ счетно на бесконечности.

[3] Предложение 2 справедливо для произвольного (не обязательно положительно определенного) ядра [9].

$$-\infty < \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < \infty. \tag{5}$$

Кроме того, всюду в пп. 4, 6, 7 и 10 будем предполагать, что множества A_i, $i \in I$, замкнуты, ядро κ непрерывно при $x \neq y$ и удовлетворяет условиям $(\mathcal{A}SD)$, $(\mathbf{X}_\infty)$ и обобщенному принципу максимума с некоторой постоянной $h \geq 1$, а внешнее поле f определяется равенством $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$ — ограниченная мера со свойством

$$S(\chi^+) \cap A^+ = \varnothing, \qquad S(\chi^-) \cap A^- = \varnothing. \tag{6}$$

Совокупности всех указанных условий на ядро κ удовлетворяют, например, ядра Ньютона и Рисса в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, а также ядро Грина G_D, если $\operatorname{dist}(A^+, A^-) > 0$, а открытое множество D регулярно в смысле разрешимости классической задачи Дирихле.

4. Основные результаты. В каждом из пп. 4 – 12 неявно подразумеваются выполненными соответствующие условия, оговоренные в п. 3. В настоящем пункте дополнительно предполагаем, что для некоторого фиксированного $j \in I^+$

$$A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall\, i \neq j. \tag{7}$$

В указанных условиях справедливы следующие критерии разрешимости задачи Гаусса.

Теорема 1. *Предположим, что* κ *ограничено сверху на* $A^+ \times A^-$,

$$C(A_i) < \infty \quad \forall\, i \neq j \tag{8}$$

и для каждого $i \in I$ *либо* g *ограничена сверху на* A_i, *либо существуют* $r = r_i \in (1, \infty)$ *и* $\zeta = \zeta_i \in \mathcal{E}$ *такие, что*

$$g^r(x) \leq \kappa(x, \zeta) \quad \text{пр. вс.} \quad \text{в} \quad A_i. \tag{9}$$

Тогда для разрешимости $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$*-задачи необходимо и достаточно, чтобы выполнялось либо*

$$C(A_j) < \infty, \tag{10}$$

либо

$$a_j \leq \int g\, d\tilde{\lambda}^j, \tag{11}$$

где $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_{I\setminus\{j\}}, g, \kappa_\chi)$ — *любая фиксированная мера* (*она существует*).

Условие ограниченности ядра κ на $A^+ \times A^-$ существенно для справедливости теоремы 1. В теоремах 2 и 3 это условие не предполагается.

Теорема 2. *Пусть существуют меры* σ_1, $\sigma_2 \in \mathcal{E}$ *такие, что*

$$\kappa(x, \sigma_1) = \begin{cases} g(x) & \text{пр. вс. в} \quad A^+ \setminus A_j, \\ 0 & \text{пр. вс. в} \quad A^- \cup A_j, \end{cases} \tag{12}$$

$$\kappa(x, \sigma_2) = \begin{cases} 0 & \text{пр. вс. в} \quad A^+, \\ g(x) & \text{пр. вс. в} \quad A^-. \end{cases} \tag{13}$$

Если, кроме того, $C(A_j) = \infty$, *то* $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$*-задача разрешима тогда и только тогда, когда вектор* $a = (a_i)_{i \in I}$ *удовлетворяет условию* (11), *где* $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_{I\setminus\{j\}}, g, \kappa_\chi)$ — *любая фиксированная мера* (*она существует*).

В случае $g = \mathrm{const}$ задача о существовании мер $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathcal{E}$, удовлетворяющих условиям (12) и (13), сводится к задаче (см. [21]) о существовании *мер конденсаторов* $(A^+ \setminus A_j,\ A^- \bigcup A_j)$ и (A^-, A^+), решенной автором в [18, 22]. Используем соответствующие результаты из [18, 22] в исследовании проблемы разрешимости задачи Гаусса.

Рассматривая упорядоченную пару $\mathcal{B} = (B_1, B_2)$ непустых замкнутых дизъюнктных множеств в $\mathbf{X}$, будем всегда полагать $\operatorname{sign} B_1 := +1$ и $\operatorname{sign} B_2 := -1$. Обозначим

$$w_\kappa(B_1 \,|\, B_2) := \inf \|\nu\|^2,$$

где инфимум берется над множеством всех $\nu \in \mathcal{E}(\mathcal{B})$ таких, что $\nu^+(\mathbf{X}) = 1$.

Теорема 3. *Предположим, что* $g = \mathrm{const}$, *а ядро* κ *согласованно, удовлетворяет полному принципу максимума и* $\mathcal{A}'$*-совершенно, где* $\mathcal{A}' := (A^+ \setminus A_j,$ $A^- \bigcup A_j)$. *Пусть*

$$w_\kappa(A^+ \setminus A_j \,|\, A^- \setminus A_j) \neq 0 \quad \textit{и} \quad w_\kappa(A^- \,|\, A^+) \neq 0. \tag{14}$$

В этих предположениях $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$*-задача разрешима тогда и только тогда, когда либо выполняется соотношение* (10), *либо вектор* $a = (a_i)_{i \in I}$ *удовлетворяет условию* (11), *где* $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_{I \setminus \{j\}}, g, \kappa_\chi)$ — *любая фиксированная мера* (*она существует*).

В случае $I^+ = \{j\}$ условие $\mathcal{A}'$-совершенности и первое условие в (14) опускаются.

5. Предварительные сведения. Приведем в виде замечаний некоторые простые утверждения, непосредственно вытекающие из принятых в п. 3 условий и часто используемые в дальнейшем.

***Замечание* 4.** Учитывая условие (4), из соотношений

$$a_i = \int g\, d\mu^i \geq g_{\min}\, \mu^i(\mathbf{X}), \qquad \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g), \quad i \in J,$$

получаем

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g)} \mu^i(\mathbf{X}) \leq a_i\, g_{\min}^{-1} < \infty, \quad i \in J. \tag{15}$$

Из (15) при $J = I$ следует тождество $\mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a, g, f) = \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, f)$ и утверждение, что $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$ не изменится, если на допустимые в $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g)$-задаче меры наложить дополнительное условие равномерной ограниченности их полных вариаций (ср. с п. 7).

***Замечание* 5.** Вследствие условия (5) необходимо выполняется

$$C(A_i) > 0 \quad \forall\, i \in I, \tag{16}$$

а в случае $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$, соотношения (5) и (16) равносильны (см. [5]).

***Замечание* 6.** Через $\{\mathcal{K}\} = \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ обозначим множество всех $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I}$ таких, что K_i, $i \in I$, компактны и $K_i \subset A_i$. На $\{\mathcal{K}\}$ определим отношение частичного упорядочения $\prec$, где $\mathcal{K}' \prec \mathcal{K}$, $\mathcal{K}' := (K_i')_{i \in I}$, если $K_i' \subset K_i$ для всех $i \in I$. Тогда [4] (лемма 4)

$$\lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}} \mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{17}$$

***Замечание* 7.** В случае $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$, значение функционала $\mathcal{F}_f(\nu)$ определено для всех $\nu \in \mathcal{E}$ и допускает представление

$$\mathcal{F}_\chi(\nu) := \mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\nu) = -\|\chi\|^2 + \|\chi - \nu\|^2. \tag{18}$$

Поэтому находим

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) := \mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a_J, g) = -\|\chi\|^2 + \inf_{\mu\in\mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g)} \|\chi - \mu\|^2. \tag{19}$$

6. Ортогональные проекции мер. Для произвольного $I_0 \subset I$ обозначим

$$CI_0 := I \setminus I_0, \qquad A_{I_0} := \bigcup_{i\in I_0} A_i.$$

Всюду в настоящем пункте $J \neq I$. Для каждого $\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ обозначим

$$\mu_J := \sum_{i\in J} (\operatorname{sign} A_i)\mu^i, \qquad \mu_J^\chi := \chi - \mu_J.$$

Используя (19), получаем

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) = -\|\chi\|^2 + \inf_{\mu\in\mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g)} p(\mu_J^\chi), \tag{20}$$

где

$$p(\mu_J^\chi) := \inf_{\omega\in\mathcal{E}^+(A_{CJ})} \left\| \mu_J^\chi - \omega \right\|^2.$$

Заметим, что класс $\mathcal{E}^+(A_{CJ})$ не пуст и, следовательно, $p(\mu_J^\chi) < \infty$ для каждого фиксированного $\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g)$. Мера $P\mu_J^\chi \in \mathcal{E}^+(A_{CJ})$, удовлетворяющая соотношению

$$\left\| \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi \right\|^2 = p(\mu_J^\chi),$$

называется (*ортогональной*) *проекцией* меры μ_J^χ на выпуклый конус $\mathcal{E}^+(A_{CJ})$ [7]. Из общих результатов (см. [7] (п. 1.12.3)) вытекает, что $P\mu_J^\chi$ существует, если пространство $\mathcal{E}^+(A_{CJ})$ компактно в сильной (индуцированной из $\mathcal{E}$) топологии. Поэтому, применяя следствия 9.2 и 9.5 из [16] (что правомерно вследствие $\mathcal{A}$-совершенности ядра), заключаем, что $P\mu_J^\chi$ заведомо существует, если множество A_{CJ} компактно.

Лемма 1. *Если проекция* $P\mu_J^\chi$ *существует и ограничена, то*

$$\kappa(x, P\mu_J^\chi) \geq \kappa(x, \mu_J^\chi) \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_{CJ}, \tag{21}$$

$$\kappa(x, P\mu_J^\chi) \leq \kappa(x, \mu_J^\chi) \quad \forall x \in S(P\mu_J^\chi) \tag{22}$$

и, следовательно,

$$\kappa(x, P\mu_J^\chi) = \kappa(x, \mu_J^\chi) \quad \textit{пр. вс. в} \quad S(P\mu_J^\chi). \tag{23}$$

Доказательство. Согласно предложению 1.12.4 из [7], справедливы соотношения

$$\kappa(\mu_J^\chi - P\mu_J^\chi, \nu) \leq 0 \quad \forall \nu \in \mathcal{E}^+(A_{CJ}), \tag{24}$$

$$\kappa(\mu_J^\chi - P\mu_J^\chi, P\mu_J^\chi) = 0. \tag{25}$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось в [20] (см. доказательство теоремы 4.16), из (24) выводим соотношение (21). Поскольку согласно предположению мера $P\mu_J^\chi$ ограничена, неравенство в (21) справедливо $P\mu_J^\chi$-почти всюду.

Комбинируя это утверждение с (25), находим, что $\kappa(x,\, \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi) = 0$ $P\mu_J^\chi$-почти всюду в $\mathbf{X}$.

Следовательно, для любого $x \in S(P\mu_J^\chi)$ существует направленность $(x_s)_{s\in S} \subset A_{CJ}$ такая, что $x_s \to x$ и

$$\kappa(x_s,\, \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi) = 0 \quad \forall\, s \in S.$$

Отсюда выводим, что для доказательства соотношения (22) достаточно доказать полунепрерывность сверху $\kappa(x,\, \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi)$ на A_{CJ}. А это непосредственно следует из полунепрерывности снизу $\kappa(x,\, \chi^- + \mu_J^+ + P\mu_J^\chi)$ на $\mathbf{X}$ как потенциала положительной меры [8] и непрерывности $\kappa(x,\, \chi^+ + \mu^-)$ на A_{CJ}; последнее вытекает из предложения 2, применение которого возможно вследствие постулированных свойств ядра κ, условий (1), (6) и ограниченности мер χ и μ^- (см. (15)). Комбинируя (21) и (22), получаем (23).

Лемма 1 доказана.

7. О допустимых мерах. Для каждого $c > 0$ обозначим

$$\mathcal{E}^c(\mathcal{A}, a_J, g) \;:=\; \{\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g) \colon |\mu|(\mathbf{X}) \le c\},$$

$$\mathcal{F}_\chi^c(\mathcal{A}, a_J, g) \;:=\; \inf_{\mu\in\mathcal{E}^c(\mathcal{A}, a_J, g)} \mathcal{F}_\chi(\mu).$$

Справедливо следующее утверждение о непрерывности (ср. с (17)).

Лемма 2. *Если $\mathcal{K}$ пробегает направленное множество $\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$, то*

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K}, a_J, g) \downarrow \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) \quad \text{и} \quad \mathcal{F}_\chi^c(\mathcal{K}, a_J, g) \downarrow \mathcal{F}_\chi^c(\mathcal{A}, a_J, g). \tag{26}$$

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 4 из [4] с применением леммы 1 из [5] к функциям κ, g, $\kappa(\cdot, \chi^+)$ и $\kappa(\cdot, \chi^-)$.

Покажем, что $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g)$ не изменится, если на допустимые в $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A},\, a_J,\, g)$-задаче меры наложить дополнительное условие равномерной ограниченности их полных вариаций.

Лемма 3. *Существует $H > 0$ такое, что $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) = \mathcal{F}_\chi^c(\mathcal{A}, a_J, g)$ для всех $c \ge H$.*

Доказательство. В случае $J = I$ утверждение леммы очевидно вследствие (15). Поэтому пусть $J \ne I$. Обозначим

$$H \;:=\; h\left[\chi^+(\mathbf{X}) + 2\, g_{\min}^{-1} \sum_{i\in J} a_i\right]. \tag{27}$$

Поскольку, очевидно, $\mathcal{E}^H(\mathcal{A}, a_J, g) \subset \mathcal{E}^c(\mathcal{A}, a_J, g) \subset \mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g)$ $\forall\, c \ge H$, доказательство леммы сводится к установлению неравенства

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) \;\ge\; \mathcal{F}_\chi^H(\mathcal{A}, a_J, g). \tag{28}$$

На основании леммы 2, не умаляя общности рассуждений, множества A_i, $i \in I$, при доказательстве неравенства (28) будем считать компактными. Тогда для каждого фиксированного $\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A},\, a_J,\, g)$ проекция $P\mu_J^\chi$ существует, и поэтому

$$\mathcal{F}_\chi(\mu) = -\|\chi\|^2 + \|\chi - \mu\|^2 \;\ge\; -\|\chi\|^2 + \left\|\chi - \mu_{J'} - P\mu_J^\chi\right\|^2.$$

Следовательно, для доказательства соотношения (28) достаточно установить неравенство

$$P\mu_J^\chi(\mathbf{X}) + \sum_{i\in J}\mu^i(\mathbf{X}) \le H. \tag{29}$$

Вследствие $\mathcal{A}$-совершенности ядра и компактности $S(P\mu_J^\chi)$ существует неотрицательная мера $\theta \in \mathcal{E}$, сосредоточенная на $S(P\mu_J^\chi)$ и такая, что

$$\kappa(x,\theta) \ge 1 \quad \text{пр. вс. в} \quad S(P\mu_J^\chi), \tag{30}$$

$$\kappa(x,\theta) \le 1 \quad \forall\, x \in S(\theta). \tag{31}$$

Поскольку меры θ и $P\mu_J^\chi$ ограничены, равенство в (23) и неравенство в (30) справедливы соответственно θ- и $P\mu_J^\chi$-почти всюду. Учитывая условие $\kappa \ge 0$, выводим

$$P\mu_J^\chi(\mathbf{X}) \le \int\kappa(x,\theta)\,dP\mu_J^\chi(x) = \int\kappa(x,\mu_J^\chi)\,d\theta(x) \le \int\kappa(x,\theta)\,d(\chi^+ + \mu^-)(x).$$

Применяя определение 3, вследствие (31) находим $\kappa(x,\theta) \le h \ \ \forall\, x \in \mathbf{X}$, и поэтому

$$P\mu_J^\chi(\mathbf{X}) \le h(\chi^+ + \mu^-)(\mathbf{X}).$$

Комбинируя полученное неравенство с оценкой (15), получаем соотношение (29).

Лемма 3 доказана.

8. Экстремальные меры. Если $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g)$ конечно, то через $\mathbb{M} = \mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ обозначим совокупность всех направленностей $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a_J, g)$, удовлетворяющих условию (3) и соотношению

$$\lim_{s\in S}\mathcal{F}_f(\mu_s) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g). \tag{32}$$

Очевидно, при $J = I$ условие (3) в данном определении выполняется автоматически вследствие (15) и может быть опущено.

Лемма 4. *Для любых $(\mu_s)_{s\in S}$ и $(\nu_t)_{t\in T}$ из $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ справедливо равенство*

$$\lim_{(s,t)\in S\times T}\|\mu_s - \nu_t\| = 0,$$

где $S\times T$ — направленное произведение направленных множеств S и T.

При $J = I$ лемма 4 доказана в [5], а в общем случае доказывается по аналогии.

***Следствие* 1.** *Направленности из $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ сильно фундаментальны.*

Пусть $\mathcal{M} = \mathcal{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ обозначает множество всех сильных предельных точек всех направленностей из $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$. На основании леммы 4 для произвольных $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$ и $\xi \in \mathcal{M}$ находим

$$\mu_s \to \xi \quad \text{сильно.} \tag{33}$$

Поэтому для всех $\xi', \xi'' \in \mathcal{M}$ выполняется

$$\|\xi' - \xi''\| = 0 \tag{34}$$

и, следовательно (см. [8]),

$$\kappa(x,\xi') = \kappa(x,\xi'') \quad \text{пр. вс. в} \quad \mathbf{X}. \tag{35}$$

Определение 5 [16]. *Направленность* $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *называется сходящейся к* $\mu \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ $\mathcal{A}$*-широко, если* $\mu_s^i \to \mu^i$ *широко для всех* $i \in I$.

Определение 6. *Меру* $\gamma \in \mathcal{E}(\overline{\mathcal{A}})$ *назовем экстремальной в* $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a_J, g)$*-задаче, если существует* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$, *сильно и* $\mathcal{A}$*-широко сходящаяся к* γ. *Направленность* $(\mu_s)_{s\in S}$ *назовем направленностью, порождающей экстремальную меру* γ.

Множество всех таких γ обозначим через $\mathcal{W}_* = \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, f)$. При $J = I$ индекс J в принятых в настоящем пункте обозначениях будем опускать.

Из принятых определений непосредственно вытекает включение

$$\mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_J, g, f) \subset \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, f). \tag{36}$$

Всюду далее в настоящем пункте предполагаем, что либо $J = I$, либо выполняются условия из п. 3, относящиеся к пп. 4, 6, 7 и 10.

Лемма 5. *Класс* $\mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ *не пуст и совпадает с множеством всех* $\mathcal{A}$*-широких предельных точек всех направленностей из* $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$. *Если, дополнительно, ядро* κ *имеет свойство* $(\mathcal{A}SD)$, *то*[4] $\gamma_1 = \gamma_2$ *для всех* γ_1, $\gamma_2 \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, f)$.

Доказательство. Вследствие леммы 3, следствия 1 и замечания 4 находим $\mathbb{M} \neq \varnothing$ и

$$\mathbb{M} \subset \mathbb{B}(\mathcal{A}). \tag{37}$$

Зафиксируем $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}$. Из условия (3) находим, что для всех $i \in I$ направленности $(\mu_s^i)_{s\in S}$ широко ограничены, и поэтому [6] широко относительно компактны. А так как конусы мер $\mathfrak{M}^+(\overline{A_i})$, $i \in I$, широко замкнуты [6], из $(\mu_s)_{s\in S}$ можно выделить поднаправленность $(\mu_t)_{t\in T}$, сходящуюся $\mathcal{A}$-широко к некоторому $\gamma \in \mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$. Применяя к $(\mu_t)_{t\in T}$ и γ свойство $(\mathcal{A}C)$, что правомерно в силу соотношения (37), находим $\gamma \in \mathcal{E}$ и $\mu_t \to \gamma$ сильно. Согласно определению 6 это доказывает включение $\gamma \in \mathcal{W}_*$.

Если γ_1, $\gamma_2 \in \mathcal{W}_*$, то в силу (33) $(\mu_s)_{s\in S}$ сходится сильно к γ_1 и γ_2. Предположив дополнительно, что κ удовлетворяет условию $(\mathcal{A}SD)$, вследствие (37) находим $\gamma_1 = \gamma_2$.

Лемма 5 доказана.

Нам понадобятся следующие элементарные свойства экстремальных мер.

Лемма 6. *Для всех* $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ *справедливы соотношения*

$$|\gamma|(\mathbf{X}) < \infty, \tag{38}$$

$$\int g\, d\gamma^i \leq a_i, \quad i \in J. \tag{39}$$

Доказательство. Действительно, пусть $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, f)$ — направленность, порождающая меру $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, f)$. Тогда вследствие широкой сходимости $(\mu_s^i)_{s\in S}$ к γ^i для любой полунепрерывной снизу функции $\psi \geq 0$ на $\overline{A_i}$ имеем (см., например, [8])

[4] При этом, вообще говоря, $\gamma_1 \not\equiv \gamma_2$, что привносит в анализ некоторые дополнительные трудности.

$$\int \psi \, d\gamma^i \;\le\; \liminf_{s\in S} \int \psi \, d\mu_s^i, \quad i \in I. \tag{40}$$

Учитывая (3), из (40) при $\psi = 1$ и $\psi = g$ соответственно получаем (38) и (39).

Лемма 7. *Если* $f = \kappa_\chi$, *где* $\chi \in \mathcal{E}$, *то*

$$\mathcal{F}\chi(\gamma) = \mathcal{F}\chi(\mathcal{A}, a_J, g) \quad \forall\, \gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa_\chi). \tag{41}$$

Доказательство. Подставляя тождество (18) в левую часть соотношения (32), а затем переходя к пределу по $s \in S$ и учитывая при этом (33), приходим к (41).

Лемма 8. *Пусть* $f = \kappa_\chi$, *где* $\chi \in \mathcal{E}$. *Тогда для каждого* $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{K} \succ \succ \mathcal{K}'$, *класс* $\mathcal{W}(\mathcal{K}, a_J, g, \kappa\chi)$ *не пуст. Если* $\lambda_{\mathcal{K}}$ *— элемент этого класса, то*

$$(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi). \tag{42}$$

Доказательство. Выберем $\mathcal{K}' \in \{\mathcal{K}\}$ так, чтобы $C(K_i') > 0$ для всех $i \in \in I$. Тогда (см. замечание 5) для всех $\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'$ величина $\mathcal{F}\chi(\mathcal{K}, a_J, g)$ конечна и в силу леммы 5 существует $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{K}, a_J, g, \kappa\chi)$. Если $(\mu_s)_{s\in S}$ — порождающая γ направленность, то вследствие непрерывности g, компактности K_i, $i \in \in I$, и $\mathcal{K}$-широкой сходимости $(\mu_s)_{s\in S}$ к γ получаем

$$\int g \, d\gamma^i = \lim_{s\in S} \int g \, d\mu_s^i = a_i \quad \forall\, i \in J.$$

Комбинируя это соотношение с (41), находим $\gamma \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a_J, g, \kappa\chi)$.

Зафиксируем меру $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a_J, g, \kappa\chi)$, где $\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'$; обозначим ее временно через μ. Если $J \ne I$, то μ_{CJ} является проекцией меры μ_J^χ на K_{CJ} и, следовательно, для μ выполняется оценка (29), где H определено равенством (27). Замечая, что H от $\mathcal{K}$ не зависит, заключаем, что при условии $J \ne I$ $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'}$ удовлетворяет соотношению (3). Это утверждение справедливо и в случае $J = I$, что очевидно в силу (15).

А так как вследствие (17) и (26) $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K} \succ \mathcal{K}'}$ удовлетворяет также равенству (32), включение (42), а вместе с ним и лемма 8 доказаны.

***Замечание* 8.** Пусть $J = I$. Тогда лемма 8 останется в силе для произвольной функции f такой, что $(\operatorname{sign} A_i) f\big|_{A_i}$, $i \in I$, полунепрерывны сверху (см. [5]).

9. О разрешимости $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. I. Настоящий и следующий пункты содержат необходимые и (или) достаточные условия разрешимости вариационной задачи Гаусса. Условия формулируются в терминах экстремалей во вспомогательной $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a_J, g)$-задаче, где J, $I^- \subset J \subset I$, — некоторое фиксированное множество индексов. Полученные здесь результаты используются в пп. 14 – 16 для доказательств утверждений из п. 4.

В дополнение к условиям, указанным в п. 3, в настоящем пункте предполагаем, что A_i, $i \in I$, замкнуты, κ удовлетворяет условию $(\mathcal{A}SD)$ и $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$.

Теорема 4. *Пусть* $J \ne I$ *и выполняется совокупность следующих условий*:

а) *существует* $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$;

б) $a_i \ge \int g \, d\tilde{\lambda}^i \quad \forall\, i \in CJ$;

в) $C(A_i) = \infty \quad \forall\, i \in CJ$.

Тогда для разрешимости $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$*-задачи необходимо и достаточно, чтобы во всех неравенствах в условии* б) *выполнялись равенства, т. е.*

$$a_i = \int g\, d\tilde{\lambda}^i \quad \forall\, i \in CJ. \tag{43}$$

Кроме того, в предположениях а) – в) *справедливы соотношения*

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g), \tag{44}$$

$$\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi). \tag{45}$$

Доказательство. Для каждого $i \in CJ$ обозначим через τ_n^i, $n \in \mathbb{N}$, единичные меры из $\mathcal{E}^+(A_i)$ с компактным носителем такие, что

$$\tau_n^i \to 0 \quad \text{сильно и широко} \quad (n \to +\infty); \tag{46}$$

они существуют вследствие условия в) и $\mathcal{A}$-совершенности ядра. Тогда в силу (4) имеем

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \int g\, d\tau_n^i > 0. \tag{47}$$

Обозначим

$$\tilde{\tau}_n := \sum_{i\in CJ} \frac{\left[a_i - \int g\, d\tilde{\lambda}^i\right]\tau_n^i}{\int g\, d\tau_n^i},$$

$$\mu_n := \tilde{\lambda} + \tilde{\tau}_n.$$

Из принятых определений, соотношений (46), (47) и условий а) и б) находим

$$\mu_n \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{48}$$

$$\mu_n \to \tilde{\lambda} \quad \text{сильно и } \mathcal{A}\text{-широко} \quad (n \to +\infty). \tag{49}$$

Применяя тождество (18), вследствие (48) получаем

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) \le \mathcal{F}_\chi(\mu_n) = -\|\chi\|^2 + \left\|\chi - \tilde{\lambda} - \tilde{\tau}_n\right\|^2 \le \mathcal{F}_\chi(\tilde{\lambda}) + c_n,$$

где

$$c_n := \|\tilde{\tau}_n\|\left(\|\tilde{\tau}_n\| + 2\left\|\chi - \tilde{\lambda}\right\|\right).$$

Замечая, что

$$\mathcal{F}_\chi(\tilde{\lambda}) = \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) \le \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g)$$

и $c_n = o(n)$, $n \to \infty$, отсюда выводим равенство (44) и соотношение

$$\lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_\chi(\mu_n) = \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g).$$

Комбинируя последнее соотношение с (48) и (49), получаем (45).

Применяя лемму 11 из [5], на основании соотношения (45) находим, что $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима тогда и только тогда, когда $\tilde{\lambda}$ является ее решением, или, что в условиях теоремы равносильно, когда выполняются равенства (43).

Теорема 4 доказана.

10. О разрешимости $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. II. Зафиксировав $j \in I^+$, обозначим $J := I \setminus \{j\}$. В дополнение к условиям, указанным в п. 3, в настоящем пункте предполагаем, что множества A_i, $i \in I$, удовлетворяют условию (7). Тогда в силу утверждения единственности из леммы 5 для любых $\tilde{\gamma}_1$, $\tilde{\gamma}_2 \in$

$\in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$ (их существование вытекает из этой же леммы) находим $\tilde{\gamma}_1^j = \tilde{\gamma}_2^j$. Поэтому характеристика

$$\Lambda_j := \int g\, d\tilde{\gamma}^j, \quad \text{где} \quad \tilde{\gamma} \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi), \tag{50}$$

однозначно определяется заданием κ, $\mathcal{A}$, g, χ и a_i, $i \neq j$; от выбора a_j и $\tilde{\gamma}$ она не зависит.

Теорема 5. *Пусть вектор* $a = (a_i)_{i \in I}$ *удовлетворяет условию*

$$a_j < \Lambda_j \tag{51}$$

и для некоторого $\gamma_0 \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$ *выполняется*

$$\int g\, d\gamma_0^i = a_i \quad \forall\, i \neq j. \tag{52}$$

Тогда $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$*-задача разрешима. Кроме того, в указанных условиях справедливо строгое неравенство* [5]

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) < \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g). \tag{53}$$

11. Сильные предельные точки минимизирующих направленностей. В доказательстве теоремы 5 существенно используется полученное в настоящем и следующем пунктах описание потенциалов $\kappa(x, \gamma)$, где $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, f)$. Соответствующие результаты приведены в предположениях, несколько более общих, чем это необходимо для непосредственных целей данной работы.

Всюду в настоящем пункте предполагаем, что либо $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$, либо функции $(\operatorname{sign} A_i) f\big|_{A_i}$, $i \in I$, полунепрерывны сверху. Тогда в силу леммы 8 и замечания 8 $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g)$-задача разрешима для всех достаточно больших $\mathcal{K} \in \in \{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$, и это существенно используется в формулировке и доказательстве полученного здесь утверждения.

Кроме того, в настоящем и следующем пунктах будем также предполагать, что $\int f\, d\nu$ определен для всех $\nu \in \mathcal{E}^+(A)$ с компактным носителем. (В случае $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$, это условие выполняется автоматически и может быть опущено.)

Теорема 6. *Существует и единствен вектор* (*конечных*) *чисел* η_i, $i \in I$, *таких, что для всех* $\xi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, a, g, f)$ *выполняется*

$$(\operatorname{sign} A_i) a_i \big[\kappa(x, \xi) - f(x)\big] \geq (\operatorname{sign} A_i) \eta_i\, g(x) \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_i,\ i \in I, \tag{54}$$

$$2 \sum_{i \in I} (\operatorname{sign} A_i) \eta_i = \|\xi\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{55}$$

Справедливо представление

$$\eta_i = \lim_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}} \Big[\kappa(\lambda_\mathcal{K}^i, \lambda_\mathcal{K}) - \int f\, d\lambda_\mathcal{K}^i\Big], \quad i \in I, \tag{56}$$

где $\lambda_\mathcal{K} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$ *— произвольная фиксированная мера.*

Для краткости в доказательствах будем использовать обозначение $\alpha_i := := \operatorname{sign} A_i$.

Доказательство. Вследствие (34) и (35) требуемое утверждение достаточно доказать для произвольного фиксированного $\xi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, a, g, f)$.

[5] Ср. с теоремой 4.

Докажем сначала единственность. Пусть η_i, $i \in I$, и η_i', $i \in I$, удовлетворяют соотношениям (54) и (55). Тогда для каждого $i \in I$ имеем

$$\alpha_i a_i \big[\kappa(x,\xi) - f(x)\big] \ \ge\ \max\{\alpha_i\eta_i, \alpha_i\eta_i'\} g(x) \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i. \tag{57}$$

Зафиксировав произвольно $(\mu_t)_{t\in T} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, g, f)$, заметим, что вследствие (15) неравенство в (57) выполняется μ_t^i-почти всюду в $\mathbf{X}$. Интегрируя его относительно μ_t^i, а затем суммируя по $i \in I$, получаем

$$\kappa(\mu_t,\xi) - \int f\,d\mu_t \ \ge\ \sum_{i\in I} \max\{\alpha_i\eta_i, \alpha_i\eta_i'\}, \quad t \in T.$$

Учитывая соотношения (32), (33) и (55), отсюда находим

$$\|\xi\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) \ =\ 2\lim_{t\in T}\Big[\|\mu_t\|^2 - \int f\,d\mu_t\Big] \ =\ 2\lim_{t\in T}\Big[\kappa(\mu_t,\xi) - \int f\,d\mu_t\Big] \ \ge$$

$$\ge\ 2\sum_{i\in I} \max\{\alpha_i\eta_i, \alpha_i\eta_i'\} \ \ge\ 2\sum_{i\in I}\alpha_i\eta_i \ =\ \|\xi\|^2 + \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g),$$

что возможно только в случае, когда

$$\max\{\alpha_i\eta_i, \alpha_i\eta_i'\} \ =\ \alpha_i\eta_i, \quad i \in I. \tag{58}$$

Меняя в проведенных выше рассуждениях η_i и η_i' местами, получаем

$$\max\{\alpha_i\eta_i, \alpha_i\eta_i'\} \ =\ \alpha_i\eta_i', \quad i \in I,$$

что вместе с (58) доказывает искомые тождества $\eta_i = \eta_i'$, $i \in I$.

Докажем теперь существование чисел η_i, $i \in I$, удовлетворяющих (54) и (55).

Через $\mathbb{M}_\sigma^\circ = \mathbb{M}_\sigma^\circ(\mathcal{A}, a, g, f)$ обозначим множество всех тех *последовательностей*

$$(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \ \in\ \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, g, f), \tag{59}$$

для каждой из которых существует *возрастающая* относительно отношения $\prec$ последовательность $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ со свойством

$$\mu_n \ \in\ \mathcal{W}(\mathcal{K}_n, a, g, f), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{60}$$

Отметим, что $\mathbb{M}_\sigma^\circ$ не пусто. Действительно, в силу (17) для каждого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать $\mathcal{K}_n \in \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ так, чтобы выполнялось

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) \ \le\ \mathcal{F}_f(\mathcal{K}_n, a, g) \ \le\ \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) + \frac{1}{n}.$$

Переходя при необходимости от $\mathcal{K}_n = (K_i^n)_{i\in I}$ к $\left(\bigcup_{j=1}^n K_i^j\right)_{i\in I}$, $n \in \mathbb{N}$, вследствие монотонности $\mathcal{F}_f(\cdot, a, g)$ последовательность $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ можно считать возрастающей. Поэтому $(\lambda_{\mathcal{K}_n})_{n\in\mathbb{N}}$, где $\lambda_{\mathcal{K}_n} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}_n, a, g, f)$, — элемент из $\mathbb{M}_\sigma^\circ(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Зафиксируем $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}_\sigma^\circ(\mathcal{A}, a, g, f)$. Переходя при необходимости к подпоследовательности, будем считать, что существует (конечный или бесконечный) предел

$$\eta_i := \lim_{n\in\mathbb{N}} \Big[\kappa(\mu_n^i, \mu_n) - \int f\, d\mu_n^i\Big], \quad i \in I. \tag{61}$$

Кроме того, на основании (33) и [8, с. 166] будем полагать выполненным соотношение

$$\kappa(x, \xi) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \kappa(x, \mu_n) \quad \text{пр. вс. в} \quad \mathbf{X}, \tag{62}$$

где $\xi \in \mathcal{M}(\mathcal{A}, a, g, f)$ произвольно фиксировано.

Согласно определению класса $\mathbb{M}_\sigma^\circ$ существует возрастающая последовательность $(\mathcal{K}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ со свойством (60). Обозначим

$$F_i := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_i^n, \quad i \in I, \tag{63}$$

и $\mathcal{F} := (F_i)_{i\in I}$. Легко видеть, что множество $\{\mathcal{K}_n : n \in \mathbb{N}\}$ *конфинально* (см. [17]) в $\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{F}}$. Поэтому, применяя соотношение (17) к $\mathcal{F}$, получаем

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{F}, a, g) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_f(\mathcal{K}_n, a, g). \tag{64}$$

Отсюда с учетом соотношений (59) и (60) находим

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{F}, a, g) = \lim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_f(\mu_n) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{65}$$

Следовательно, $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}(\mathcal{F}, a, g, f)$, и поэтому

$$\xi \in \mathcal{M}(\mathcal{F}, a, g, f). \tag{66}$$

Применяя теорему 1 из [4] к минимизирующей в $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}_n, a, g)$-задаче мере μ_n, получаем

$$\alpha_i a_i\big[\kappa(x, \mu_n) - f(x)\big] \geq \alpha_i\Big[\kappa(\mu_n^i, \mu_n) - \int f\, d\mu_n^i\Big] g(x) \ \text{пр. вс. в} \ K_i^n, \ n \in \mathbb{N}, \ i \in I.$$

Используя упорядоченность множеств K_i^n, $n \in \mathbb{N}$, и счетную полуаддитивность внутренней емкости на универсально измеримых множествах [8], переходим в последнем соотношении к пределу по $n \in \mathbb{N}$. Тогда вследствие (61) и (62) имеем

$$\alpha_i a_i\big[\kappa(x, \xi) - f(x)\big] \geq \alpha_i \eta_i g(x) \quad \text{пр. вс. в} \quad K_i^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad i \in I.$$

Еще раз применяя свойство счетной полуаддитивности, отсюда в силу (63) находим

$$\alpha_i a_i\big[\kappa(x, \xi) - f(x)\big] \geq \alpha_i \eta_i g(x) \quad \text{пр. вс. в} \quad F_i, \quad i \in I. \tag{67}$$

Вследствие (5) и (65) выполняется $\mathcal{F}_f(\mathcal{F}, a, g) < \infty$, и поэтому (см. лемму 5 из [4]) для каждого $i \in I$ $\alpha_i f(x) \neq -\infty$ на подмножестве из F_i ненулевой внутренней емкости. А так как потенциал $\kappa(x, \xi)$ конечен пр. вс. в $\mathbf{X}$, из (67) находим

$$\alpha_i \eta_i < \infty, \quad i \in I.$$

Следовательно, $\sum_{i\in I} \alpha_i \eta_i$ определена и в силу (32), (33) и (61) удовлетворяет соотношению

$$2\sum_{i\in I}\alpha_i\eta_i \;=\; \lim_{n\in\mathbb{N}}\Big[\|\mu_n\|^2+\mathcal{F}_f(\mu_n)\Big] \;=\; \|\xi\|^2 \;+\; \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g). \tag{68}$$

Это доказывает тождество (55) и конечность чисел $\eta_i,\ i\in I$.

Из (65) – (68) вытекает, что требуемое утверждение существования доказано для $\mathcal{F}$. Для $\mathcal{A}$ оно будет доказано, как только будет доказано (54). Пусть, от противного, существуют $j\in I$ и компактное множество $K_0\subset A_j\setminus F_j$ такие, что

$$C(K_0) \;>\; 0, \tag{69}$$

$$\alpha_j a_j\big[\kappa(x,\xi)-f(x)\big] \;<\; \alpha_j\eta_j g(x) \quad \forall\, x\in K_0. \tag{70}$$

Обозначим $\tilde{\mathcal{K}}_n := (\tilde{K}_i^n)_{i\in I}$, где $\tilde{K}_j^n := K_j^n\cup K_0$ и $\tilde{K}_i^n := K_i^n\ \ \forall\, i\neq j$. Зафиксировав $\lambda_n\in\mathcal{W}(\tilde{\mathcal{K}}_n,a,g,f)$, $n\in\mathbb{N}$, из принятых определений, соотношений (64), (65) и оценок

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g)\;\le\;\mathcal{F}_f(\tilde{\mathcal{K}}_n,a,g)\;\le\;\mathcal{F}_f(\mathcal{K}_n,a,g),\quad n\in\mathbb{N},$$

находим $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{M}^\circ_\sigma(\mathcal{A},a,g,f)$. Повторяя для $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ рассуждения, проделанные выше для $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$, выводим существование чисел η_i', $i\in I$, удовлетворяющих соотношениям

$$2\sum_{i\in I}\alpha_i\eta_i' \;=\; \|\xi\|^2 \;+\; \mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g), \tag{71}$$

$$\alpha_i a_i\big[\kappa(x,\xi)\;-\;f(x)\big] \;\ge\; \alpha_i\eta_i' g(x) \quad \text{пр. вс. в}\ \ F_i',\ i\in I, \tag{72}$$

где $F_j' := F_j\cup K_0$ и $F_i' := F_i$ для всех $i\neq j$. Применяя к $\mathcal{F}$ утверждение о единственности чисел $\eta_i,\ i\in I$, из соотношений (65) – (68), (71) и (72) находим

$$\eta_i \;=\; \eta_i',\quad i\in I.$$

Поэтому ввиду (69) соотношения (70) и (72) находятся в противоречии. Это доказывает требуемое утверждение (54).

Наконец, предполагая, что предельное равенство (56) не верно, выводим существование возрастающего множества $(\mathcal{K}_n^*)_{n\in\mathbb{N}}\subset\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ такого, что $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}_n^*,a,g)$, $n\in\mathbb{N}$, стремится к $\mathcal{F}_f(\mathcal{A},a,g)$, но соответствующая последовательность минимизирующих мер $\lambda_{\mathcal{K}_n^*}\in\mathcal{W}(\mathcal{K}_n^*,a,g,f)$, $n\in\mathbb{N}$, не удовлетворяет (61). А поскольку согласно построению выполняется $(\lambda_{\mathcal{K}_n^*})_{n\in\mathbb{N}}\in$ $\in\mathbb{M}^\circ_\sigma(\mathcal{A},a,g,f)$, в силу доказанного выше это невозможно.

Теорема 6 доказана.

12. $\mathcal{A}$-широкие предельные точки минимизирующих направленностей. Покажем, что при надлежащих дополнительных условиях теорему 6 можно существенно уточнить, если ограничиться рассмотрением $\mathcal{A}$-широких предельных точек направленностей $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$, где $\lambda_{\mathcal{K}}\in\mathcal{W}(\mathcal{K},a,g,f)$.

Теорема 7. *Пусть ядро* κ *непрерывно при* $x\neq y$ *и удовлетворяет условию* $(\mathbf{X}_\infty)$, *а функции* $(\operatorname{sign}A_i)f\big|_{\overline{A_i}}$, $i\in I$, *полунепрерывны сверху. Тогда для каждой меры* γ *из* $\mathcal{W}_*(\mathcal{A},a,g,f)$, *являющейся* $\mathcal{A}$*-широкой предельной точкой направленности* $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$, *где* $\lambda_{\mathcal{K}}\in\mathcal{W}(\mathcal{K},a,g,f)$, *и всех* $i\in I$ *справедливы соотношения*

$$(\operatorname{sign} A_i) a_i \big[\kappa(x,\gamma) - f(x)\big] \geq (\operatorname{sign} A_i)\eta_i\, g(x) \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_i, \tag{73}$$

$$(\operatorname{sign} A_i) a_i \big[\kappa(x,\gamma) - f(x)\big] \leq (\operatorname{sign} A_i)\eta_i\, g(x) \quad \forall\, x \in S(\gamma^i), \tag{74}$$

$$a_i \big[\kappa(x,\gamma) - f(x)\big] = \eta_i\, g(x) \quad \textit{пр. вс. в} \quad A_i \cap S(\gamma^i), \tag{75}$$

где η_i, $i \in I$, *— числа, однозначно определенные теоремой* 6.

Доказательство. Зафиксируем направленность $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$, где $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$; в силу (17) она принадлежит $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a, g, f)$. Переходя при необходимости к поднаправленности, на основании леммы 5 будем считать ее порождающей некоторую $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, f)$. Применяя к γ теорему 6, получаем соотношение (73).

Зафиксировав $i \in I^+$ и $x_0 \in S(\gamma^i)$, докажем соотношение (74). Поскольку $\lambda^i_{\mathcal{K}} \to \gamma^i$ широко, найдется сходящаяся к x_0 направленность $(\zeta_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$ такая, что

$$\zeta_{\mathcal{K}} \in S(\lambda^i_{\mathcal{K}}) \quad \forall\, \mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}.$$

Учитывая оценку (15), на основании предложения 2 и полунепрерывности снизу отображения $(x, \nu) \mapsto \kappa(x, \nu)$ на $\mathbf{X} \times \mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$ (см. лемму 2.2.1 из [8]) соответственно находим

$$\kappa(x_0, \gamma^-) = \lim_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}} \kappa(\zeta_{\mathcal{K}}, \lambda^-_{\mathcal{K}}), \qquad \kappa(x_0, \gamma^+) \leq \lim_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}} \kappa(\zeta_{\mathcal{K}}, \lambda^+_{\mathcal{K}}). \tag{76}$$

В принятых предположениях к мере $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, f)$ применима теорема 2 из [4]; на ее основании для $\zeta_{\mathcal{K}} \in S(\lambda^i_{\mathcal{K}})$, $i \in I^+$, получаем

$$a_i\Big[\kappa(\zeta_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) - f(\zeta_{\mathcal{K}})\Big] \leq \Big[\kappa(\lambda^i_{\mathcal{K}}, \lambda_{\mathcal{K}}) - \int f\, d\lambda^i_{\mathcal{K}}\Big] g(\zeta_{\mathcal{K}}).$$

Переходя в этом неравенстве к пределу по $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$, вследствие соотношений (76), непрерывности g, полунепрерывности сверху $f\big|_{\overline{A_i}}$, $i \in I^+$, и равенства (56) находим (74).

Доказательство соотношения (74) для $i \in I^-$ аналогично. Наконец, комбинируя соотношения (73) и (74), получаем (75).

Теорема 7 доказана.

13. Доказательство теоремы 5. Зафиксируем a и $\gamma_0 \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$, удовлетворяющие условиям (51) и (52). Покажем, что равенства (52) справедливы и для произвольной фиксированной меры $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$, являющейся $\mathcal{A}$-широкой предельной точкой направленности $(\lambda_{\mathcal{K}})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}}$, где $\lambda_{\mathcal{K}} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a, g, \kappa\chi)$.

Действительно, в силу утверждения единственности из леммы 5 выполняется $\gamma^+ = \gamma_0^+$ и $\gamma^- = \gamma_0^-$. Отсюда вследствие условия (7) получаем $\gamma^j = \gamma_0^j$ и, следовательно,

$$\sum_{i\neq j} \int g\, d\gamma^i = \sum_{i\neq j} \int g\, d\gamma_0^i = \sum_{i\neq j} a_i,$$

что ввиду оценок (39) возможно только в случае

$$\int g\, d\gamma^i = a_i \quad \forall\, i \neq j. \tag{77}$$

Поэтому имеем

$$\gamma \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a_J, g). \tag{78}$$

Используя предложение 2, видим, что в условиях теоремы потенциал κ_χ полунепрерывен сверху на A^+ и полунепрерывен снизу на A^-. Поэтому к γ применима теорема 7; пусть η_i, $i \in I$, — числа, фигурирующие в ее формулировке. Покажем, что

$$\eta_i = \kappa(\gamma^i, \gamma - \chi), \quad i \in I, \tag{79}$$

и, следовательно (см. теорему 7),

$$\alpha_i a_i \kappa(x, \gamma - \chi) \geq \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma - \chi) g(x) \quad \text{пр. вс. в } A_i, \quad i \in I. \tag{80}$$

Действительно, интегрируя обе части равенства (75) относительно меры γ^i, вследствие ее ограниченности находим

$$a_i \kappa(\gamma^i, \gamma - \chi) = \eta_i \int g \, d\gamma^i, \quad i \in I. \tag{81}$$

Поскольку для каждого $i \in I$ $a_i \neq 0$, из (77) и (81) вытекает справедливость соотношения (79) для всех $i \neq j$. С другой стороны, комбинируя (41) с (55), получаем

$$2 \sum_{i \in I} \alpha_i \eta_i = \|\gamma\|^2 + \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) = 2\kappa(\gamma, \gamma - \chi) = 2 \sum_{i \in I} \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma - \chi),$$

что вместе с только что доказанным доказывает соотношение (79) и для $i = j$.

Дальнейшие рассуждения разобьем на два этапа.

I. На этом этапе предположим выполненным соотношение

$$\kappa(\gamma^j, \gamma - \chi) = 0. \tag{82}$$

Тогда, очевидно,

$$\kappa(\gamma, \gamma - \chi) = \sum_{i \neq j} \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma - \chi). \tag{83}$$

Для каждого $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$ рассмотрим меру $\tilde{\lambda}_\mathcal{K} \in \mathcal{W}(\mathcal{K}, a_J, g, \kappa_\chi)$ (она существует в силу леммы 8); тогда неравенство в (80) выполняется $\tilde{\lambda}^i_\mathcal{K}$-почти всюду. Проинтегрируем его относительно $\tilde{\lambda}^i_\mathcal{K}$, а затем просуммируем по $i \in I$, воспользовавшись при этом равенствами (82), (83) и соотношением $\int g \, d\tilde{\lambda}^i_\mathcal{K} = a_i$ для всех $i \neq j$. В результате получим

$$\kappa(\gamma - \chi, \tilde{\lambda}_\mathcal{K}) = \sum_{i \in I} \int \alpha_i \kappa(x, \gamma - \chi) \, d\tilde{\lambda}^i_\mathcal{K}(x) \geq$$

$$\geq \sum_{i \in I} \frac{\alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma - \chi)}{a_i} \int g \, d\tilde{\lambda}^i_\mathcal{K} = \sum_{i \neq j} \alpha_i \kappa(\gamma^i, \gamma - \chi) = \kappa(\gamma, \gamma - \chi),$$

и поэтому

$$\kappa(\gamma - \chi, \tilde{\lambda}_\mathcal{K} - \chi) \geq \|\gamma - \chi\|^2.$$

Применяя к левой части полученного соотношения неравенство Коши – Буняковского, а затем переходя к пределу по $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$, вследствие лемм 5 и 8 находим

$$\|\tilde{\gamma}-\chi\| \geq \|\gamma-\chi\| \quad \forall\, \tilde{\gamma} \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi),$$

или, что в силу (18) и (41) равносильно,

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g) \geq \mathcal{F}\chi(\gamma).$$

Последовательно используя соотношения (78) и (38), отсюда выводим

$$\gamma \in \mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$$

и, следовательно (см. (36), (50) и (51)),

$$\int g\, d\gamma^j = \Lambda_j > a_j.$$

Но, с другой стороны, $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$, и поэтому $\int g\, d\gamma^j \leq a_j$. Противоречие.

II. Таким образом, в условиях теоремы возможен только случай

$$\kappa(\gamma^j, \gamma-\chi) \neq 0. \tag{84}$$

Сравнивая соотношения (79) и (81) при $i = j$, вследствие (84) находим $\int g\, d\gamma^j = a_j$. Вместе с (41) и (78) это означает, что γ — минимизирующая в $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$-задаче мера.

Кроме того, согласно (75), (79) и (84) $\kappa(x, \chi-\gamma) \neq 0$ пр. вс. в $S(\gamma^j)$. Учитывая лемму 1, отсюда находим

$$\gamma^j \neq P\gamma_J^\chi, \tag{85}$$

где $P\gamma_J^\chi$ — проекция меры γ_J^χ на $\mathcal{E}^+(A_j)$. Последовательно используя соотношения (41), (18), (85), (78) и (20), получаем цепочку неравенств

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{F}\chi(\gamma) > -\|\chi\|^2 + \inf_{\omega \in \mathcal{E}^+(A_j)} \left\|\gamma_J^\chi - \omega\right\|^2 \geq \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a_J, g),$$

из которой вытекает (53).

Теорема 5 полностью доказана.

14. Доказательство теоремы 1. Обозначим $J := I\setminus\{j\}$. Покажем, что в условиях теоремы вспомогательная $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a_J, g)$-задача разрешима в классе ограниченных мер.

Зафиксировав $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$ (она существует в силу леммы 5), докажем включение $\gamma \in \mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$. Вследствие (38), (39) и (41) для этого достаточно доказать неравенство

$$\int g\, d\gamma^i \geq a_i, \tag{86}$$

где $i \in J$ произвольно фиксировано.

Пусть $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$ — направленность, сходящаяся к γ сильно и $\mathcal{A}$-широко. Переходя при необходимости к поднаправленности, будем считать ее сильно ограниченной. Согласно определению $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$, $(\mu_s)_{s\in S}$ удовлетворяет условию (3). Отсюда вследствие неотрицательности ядра κ и его ограниченности на $A^+ \times A^-$ находим

$$\sup_{s\in S}\left\|\mu_s^i\right\| < \infty. \tag{87}$$

Пусть $\{K\}$ обозначает возрастающее относительно включения семейство всех компактных подмножеств из A_i, а φ_Q — характеристическую функцию множества $Q \subset \mathbf{X}$. Подставляя $\psi = -g\varphi_K$ в (40), вследствие широкой сходимости $(\mu_s^i)_{s\in S}$ к γ^i имеем

$$\int g\varphi_K\, d\gamma^i \;\geq\; \limsup_{s\in S} \int g\varphi_K\, d\mu_s^i \quad \forall\, K \in \{K\}.$$

Используя это неравенство и лемму 1 из [8], получаем

$$\int g\, d\gamma^i \;=\; \lim_{K\in\{K\}} \int g\varphi_K\, d\gamma^i \;\geq\; \limsup_{(s,K)\in S\times\{K\}} \int g\varphi_K\, d\mu_s^i,$$

где $S\times\{K\}$ — направленное произведение направленных множеств S и $\{K\}$. Следовательно, доказательство неравенства (86) сводится к установлению соотношения

$$\liminf_{(s,K)\in S\times\{K\}} \int g\varphi_{A_i\setminus K}\, d\mu_s^i \;=\; 0. \tag{88}$$

Для любого $E \subset A_i$ обозначим через θ_E *внутреннее емкостное распределение,* ассоциированное с E; оно существует и единственно вследствие условия (8) и $\mathcal{A}$-совершенности ядра (см. [8, 16]). Справедливы соотношения [8]

$$\theta_E \in \mathcal{E}^+(E),$$

$$\theta_E(\mathbf{X}) \;=\; \|\theta_E\|^2 \;=\; C(E), \tag{89}$$

$$\kappa(x,\theta_E) \geq 1 \quad \text{пр. вс. в} \quad E, \tag{90}$$

$$\kappa(x,\theta_E) \leq 1 \quad \forall\, x\in S(\theta_E). \tag{91}$$

Рассмотрим меры $\theta_{A_i\setminus K}$, где $K\in\{K\}$. Из результатов работы [8] выводим неравенство

$$\left\|\theta_{A_i\setminus K} - \theta_{A_i\setminus K'}\right\|^2 \;\leq\; \left\|\theta_{A_i\setminus K}\right\|^2 - \left\|\theta_{A_i\setminus K'}\right\|^2 \quad \forall\, K\subset K',$$

а из соотношений (8) и (89) — утверждение, что направленность $\left\|\theta_{A_i\setminus K}\right\|$, $K \in \{K\}$, ограничена и не возрастает, а поэтому фундаментальна в $\mathbb{R}$. Следовательно, $(\theta_{A_i\setminus K})_{K\in\{K\}}$ сильно фундаментальна в $\mathcal{E}$. Еще раз используя (8) и (89), отсюда находим

$$(\theta_{A_i\setminus K})_{K\in\{K\}} \;\in\; \mathbb{B}(\mathcal{A}).$$

А поскольку, очевидно, $(\theta_{A_i\setminus K})_{K\in\{K\}}$ сходится к нулю широко, то вследствие $\mathcal{A}$-совершенности ядра она сходится к нулю и сильно. Поэтому имеем

$$\lim_{K\in\{K\}} \left\|\theta_{A_i\setminus K}\right\| \;=\; 0. \tag{92}$$

Предположим, что для некоторых $r\in(1,\infty)$ и $\zeta\in\mathcal{E}$ выполняется условие (9). Это не приводит к потере общности рассуждений. Действительно, в обратном случае существует число $c<\infty$ такое, что $g(x)\leq c$ на A_i. Комбинируя это соотношение с (90) при $E=A_i$, снова приходим к (9), где $r\in(1,\infty)$ — любое, а ζ определяется равенством $\zeta := c^r\,\theta_{A_i}$.

Обозначим $q := r(r-1)^{-1}$. Комбинируя (9) с (90) при $E = A_i\setminus K$, выводим, что пр. вс. в A_i и, следовательно, μ_s^i-почти всюду в $\mathbf{X}$ выполняется неравенство

$$g(x)\varphi_{A_i\setminus K}(x) \;\leq\; \kappa(x,\zeta)^{1/r}\kappa(x,\theta_{A_i\setminus K})^{1/q}.$$

Интегрируя его относительно μ_s^i, а затем применяя к выражению в правой части неравенство Гельдера и, последовательно, неравенство Коши – Буняковского, находим

$$\int g\varphi_{A_i\setminus K}\,d\mu_s^i \;\leq\; \Big[\int\kappa(x,\zeta)d\mu_s^i(x)\Big]^{1/r}\Big[\int\kappa(x,\theta_{A_i\setminus K})d\mu_s^i(x)\Big]^{1/q} \;\leq\; \|\zeta\|^{1/r}\big\|\theta_{A_i\setminus K}\big\|^{1/q}\big\|\mu_s^i\big\|.$$

Переходя здесь к пределу по $(s, K) \in S\times\{K\}$, в силу (87) и (92) получаем (88).

Следовательно, класс $\mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$ не пуст. Зафиксировав произвольно его элемент $\tilde{\lambda}$, из соотношений (36) и (50) находим $\int g\,d\tilde{\lambda}^j = \Lambda_j$.

Кроме того, в силу леммы 13 из [5] существует мера $\gamma_0 \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$, удовлетворяющая условию (52). Отсюда и из только что доказанной разрешимости (вспомогательной) $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a_J, g)$-задачи вытекает, что в условиях теоремы 1 применимы теоремы 4 и 5. Используя их, находим, что в случае $C(A_j) = \infty$ (основная) $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима тогда и только тогда, когда $a_j \leq \Lambda_j$. А так как в случае $C(A_j) < \infty$ эта задача разрешима согласно теореме 1 из [5], теорема 1 доказана.

15. Доказательство теоремы 2. Обозначим $J := I\setminus\{j\}$. Зафиксировав меру $\tilde{\gamma} \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$ (она существует в силу леммы 5), докажем равенства

$$\int g\,d\tilde{\gamma}^i = a_i \quad \forall\, i \in J. \tag{93}$$

Пусть $(\mu_s)_{s\in S}$ — направленность из $\mathbb{M}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$, а $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathcal{E}$ — меры, удовлетворяющие условиям (12) и (13). Поскольку $\mu_s \to \tilde{\gamma}$ сильно, имеем

$$\lim_{s\in S}\int\kappa(x,\sigma_n)d\mu_s(x) = \int\kappa(x,\sigma_n)d\tilde{\gamma}(x), \quad n = 1, 2.$$

Поэтому вследствие (12), (13) и ограниченности мер μ_s, $s \in S$, и γ (см. п. 8) находим

$$\sum_{i\in J}\int g\,d\tilde{\gamma}^i = \sum_{i\in J} a_i,$$

что в силу неравенств (39) возможно только в случае (93).

Из соотношений (38), (41) и (93) вытекает, что в условиях теоремы 2 (вспомогательная) $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a_J, g)$-задача разрешима в классе ограниченных мер. Зафиксировав произвольно $\tilde{\lambda} \in \mathcal{W}_{bou}(\mathcal{A}, a_J, g, \kappa\chi)$, в силу (36) и (50) находим $\int g\,d\tilde{\lambda}^j = \Lambda_j$.

Кроме того, с помощью рассуждений, аналогичных только что приведенным, убеждаемся в справедливости равенств (93) и для любого $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$.

Поэтому, учитывая условие $C(A_j) = \infty$ и применяя теоремы 4 и 5, выводим, что $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима тогда и только тогда, когда выполняется $a_j \leq \Lambda_j$.

Теорема 2 доказана.

16. Доказательство теоремы 3. Согласно теореме 13.5 из [18], в принятых в теореме 3 условиях существуют меры $\sigma_1,\ \sigma_2 \in \mathcal{E}$, удовлетворяющие соотношениям (12) и (13). Применяя теорему 2, выводим, что в случае $C(A_j) = \infty$ условие (11) необходимо и достаточно для разрешимости $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. Поэтому доказательство теоремы сводится к доказательству достаточности условия $C(A_j) < \infty$.

Заметим, что вследствие (12) и (13) выполняется

$$C(A_i) < \infty \quad \forall\, i \neq j.$$

Действительно, если для некоторого $i \neq j$ (пусть $i \in I^-$) $C(A_i) = \infty$, то найдутся единичные меры $\nu_n \in \mathcal{E}^+(A_i)$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $\|\nu_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Учитывая соотношения

$$0 < g_{\min} \leq \int g\, d\nu_n = \kappa(\sigma_2, \nu_n) \leq \|\sigma_2\|\|\nu_n\|,$$

в результате предельного перехода приходим к противоречию.

Следовательно, $C(A) < \infty$, и поэтому в силу согласованности ядра существует [8] внутреннее емкостное распределение θ_A, ассоциированное с A. Используя полный принцип максимума, из соотношений (90), (91) и условия $g \equiv \equiv c$, где $c = \mathrm{const}$, выводим

$$\kappa(x, c\theta_A) = g(x) \quad \text{пр. вс. в} \quad A.$$

Поэтому для любых $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$ и $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$ имеем

$$\sum_{i\in I} \alpha_i \int g\, d\gamma^i = \kappa(c\theta_A, \gamma) = \lim_{s\in S} \kappa(c\theta_A, \mu_s) = \sum_{i\in I} \alpha_i a_i.$$

А так как вследствие (12) и (13) $\int g\, d\gamma^i = a_i$ для всех $i \neq j$ (см. доказательство теоремы 2), отсюда находим $\int g\, d\gamma^j = a_j$. Следовательно, $\gamma \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, \kappa\chi)$.

Теорема 3 доказана.

17. Пример. Пусть $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$. Применение теорем 1 – 5 позволяет получить ряд новых результатов о разрешимости вариационной задачи Гаусса для ядер Ньютона, Грина или Рисса. Ограничимся формулировкой одного из них.

Пусть $\kappa(x, y) = |x - y|^{2-n}$ — ядро Ньютона, $I^+ = \{1\}$, $I^- = \{2\}$, а A_1 и A_2 — замкнутые множества с ненулевой ньютоновой емкостью $C(\cdot)$. Пусть, для простоты формулировки, $\mathbb{R}^n \setminus A_1$ связно.

Множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ называется *разреженным на бесконечности,* если его образ при преобразовании инверсии относительно единичной сферы разрежен в точке $x = 0$ (см. [20, 23, 24]); совокупность всех таких Q обозначим через $\mathfrak{R}_\infty$.

Если множество не разрежено на бесконечности, то его ньютонова емкость бесконечна, однако обратное утверждение не верно (см. [11]).

Применяя результаты настоящей работы и результаты из [11] об изменении полной массы меры при ее ньютоновом выметании, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* $g \equiv c$ *и* $f = \kappa_\chi$, *где* $c \in (0, \infty)$, *а* $\chi \in \mathcal{E}$ *— неотрицательная ограниченная мера с*

$$S(\chi) \cap A_1 = \varnothing.$$

Пусть емкость A_2 *относительно ядра Грина* $G_{\mathbb{R}^n \setminus A_1}$ *конечна, а* $a = (a_1, a_2)$ *— положительный вектор, удовлетворяющий условию*

$$a_1 \geq a_2 + \chi(\mathbb{R}^n).$$

В этих предположениях $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\mathcal{A}, a, g)$*-задача разрешима тогда и только тогда, когда либо*

$$C(A_1) < \infty,$$

либо выполняется совокупность условий

$$A_1 \notin \mathfrak{R}_\infty, \quad a_1 = a_2 + \chi(\mathbb{R}^n).$$

1. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135–352.
2. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. – Berlin: Springer, 1997. – 505 p.
3. *Zorii N.* On the solvability of the Gauss variational problem // Comput. Methods Funct. Theory. – 2002. – **2**, № 2. – P. 427–448.
4. *Зорий Н. В.* Равновесные потенциалы с внешними полями // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1178–1195.
5. *Зорий Н. В.* Задачи равновесия для потенциалов с внешними полями // Там же. – № 10. – С. 1315–1339.
6. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
7. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
8. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139–215.
9. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168–189.
10. *Cartan H.* Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. Math. France. – 1945. – **73**. – P. 74–106.
11. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 431–437.
12. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов и ядер Рисса // Там же. – 1989. – **41**, № 1. – С. 34–41.
13. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. I, II // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350–1360; 1996. – **48**, № 5. – С. 603–613.
14. *Зорий Н. В.* Задача о минимуме гриновой энергии для пространственных конденсаторов // Докл. АН СССР. – 1989. – **307**, № 2. – С. 265–269.
15. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I, II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 494–500; № 11. – С. 1475–1480.
16. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. II // Там же. – 2001. – **53**, № 4. – С. 466–488.
17. *Келли Дж.* Общая топология. – М.: Наука, 1981. – 431 с.
18. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. III // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 6. – С. 758–782.
19. *Зорий Н. В.* Теория потенциала относительно согласованных ядер: теорема о полноте, последовательности потенциалов // Там же. – 2004. – **56**, № 11. – С. 1513–1526.
20. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
21. *Kishi M.* Sur l'existence des mesures des condensateurs // Nagoya Math. J. – 1967. – **30**. – P. 1–7.
22. *Zorii N.* On existence of a condenser measure // Мат. студії. – 2000. – **13**, № 2. – С. 181–189.
23. *Брело М.* Основы классической теории потенциала. – М.: Мир, 1964. – 212 с.
24. *Брело М.* О топологиях и границах в теории потенциала. – М.: Мир, 1974. – 224 с.

Получено 17.03.2004