УДК 512.723

І. І. Бурбан (Ун-т П'єра та Марії Кюрі, Париж, та Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
І. М. Бурбан (Ін-т теорет. фізики НАН України, Київ)

ФУНКТОРИ СКРУТУ ТА *D*-БРАНИ

We discuss the categorical approach to the study of topological *D*-branes. We investigate twist functors and their induced action on the cohomology ring of a manifold. We construct a nontrivial spherical object of a derived category of coherent sheaves of reduced plane singular curve of degree three.

Обговорюється категорний підхід до вивчення топологічних *D*-бран. Вивчаються функтори скруту та їх індукована дія на когомологічному кільці многовиду. Побудовано нетривіальний сферичний об'єкт похідної категорії когерентних пучків звідної плоскої особливої кривої третього степеня.

1. Вступ. Відомо, що багато питань, пов'язаних із вивченням многовидів, вимагають дослідження властивостей категорії когерентних пучків на цих многовидах. Виявляється, що мовою гомологічної алгебри зручно також формулювати і розв'язувати багато задач теоретичної фізики. Протягом останнього десятиріччя спостерігається інтенсивне проникнення алгебраїчних методів, зокрема, теорії похідних категорій, у теорію суперструн.

Однією з перших, якщо не першою, роботою у цьому напрямку була стаття Е. Заслова [1], у якій було звернуто увагу на широкий спектр зв'язків найновіших результатів алгебраїчної геометрії і гомологічної алгебри з результатами, одержаними в $N = 2$ суперконформній теорії поля (теорія перебудов виняткових наборів на многовидах Фано). А втім, справжній резонанс викликала робота М. Концевича [2], в якій пропонувалося формулювати дзеркальну симетрію суперструнних теорій типу IIA та IIB як еквівалентність двох триангульованих категорій. А саме, струнна теорія типу IIB повністю характеризується похідною категорією когерентних пучків на гладкому комплексному многовиді Калабі – Яу X. Дзеркальна до неї теорія типу IIA описується, в свою чергу, похідною категорією Фукаї на дзеркальному многовиді Калабі – Яу $\hat{X}$. Кількома роками пізніше Ж. Польчинський [3] відкрив існування D-бран у струнних теоріях, що спричинило вибух нових досліджень у теорії суперструн.

З того часу відбулася кардинальна зміна поглядів на самі струнні теорії як з теоретичної, так і з феноменологічної точок зору. Робота Ж. Польчинського [3] стала початком другої суперструнної революції.

Концепція D-бран гармонійно доповнила теорію гомологічної дзеркальної симетрії М. Концевича. Два підходи до вивчення D-бран, супергравітаційний та відкритосуперструнний, виявились еквівалентними. В рамках останнього підходу теорія D-бран формулюється мовою похідних категорій. Будучи синтезом двох культур, фізичної та математичної, теорія D-бран, у свою чергу, вказала на альтернативний шлях вивчення геометричних категорій.

На підтвердження ефективності ідеї категорного підходу вивчення D-бран можна навести такі аргументи:

1. D-брани типу IIB досліджувалися на рівні їх топологічних зарядів [4]. Топологічний заряд є елементом кільця парних когомологій $H^{2*}(X, \mathbb{C})$. Якщо $\mathcal{F}^{\bullet} \in D^b(\mathrm{Coh}_X)$— топологічна брана, то її топологічний заряд визначається за формулою

$$Q(\mathcal{F}^{\bullet}) := \mathrm{ch}(\mathcal{F}^{\bullet})\sqrt{\mathrm{td}_X} \in H^{2*}(X, \mathbb{C}).$$

Цей топологічний інваріант (вектор Мукаї) було вперше знайдено у роботі [5] незалежно від гомологічної теорії D-бран.

2. Формалізм похідних категорій дозволяє описати зв'язні стани, маргінальну стабільність, розсіяння і анігіляцію D-бран. Якщо $\mathcal{F}^{\bullet}$ і $\mathcal{G}^{\bullet}$ — брана й антибрана, які за допомогою струни $f\colon \mathcal{F}^{\bullet} \to \mathcal{G}^{\bullet}$ утворюють зв'язний стан, то цей зв'язний стан описується як конус $\operatorname{Cone}(f)$ морфізму f у похідній категорії когерентних пучків. Зауважимо, що ми одержуємо коректну формулу для топологічного заряду зв'язного стану:

$$Q(\operatorname{Cone}(f)) = Q(\mathcal{F}^{\bullet}) - Q(\mathcal{G}^{\bullet}).$$

3. Для теорії D-бран у струнній теорії типу IIB важливу роль відіграє струнний простір модулів келерових структур $\operatorname{K\ddot{a}h}(X)$ многовиду X. У випадку, коли X є повним перетином дивізорів у торичному многовиді, $\operatorname{K\ddot{a}h}(X)$ можна визначити за допомогою склейки келерових конусів певних біраціональних перебудов (флопів) многовиду X [6] (розділ 6.2). За теоремами О. Бондала і Д. Орлова [7] (теорема 3.6) та Т. Бріджеланда [8] (теорема 1.1) флопи не змінюють похідну категорію. Це означає, що струнний простір модулів келерових структур визначається похідною категорією многовиду.

У цій роботі ми розглядатимемо топологічні БПЗ (Богомольного – Прасада – Зоммерфельда) D-брани в суперструнних теоріях типу IIB. Математично вони ототожнюються з об'єктами похідної категорії когерентних пучків $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ на компактифікуючому многовиді Калабі – Яу X. Вивчення топологічних D-бран за допомогою похідних категорій можна розглядати як узагальнення K-теорного опису топологічних зарядів D-бран у геометричній фазі. Методи похідних категорій дозволяють вивчати такі фізичні характеристики D-бран, як стабільність та монодромію при обході контура навколо особливої точки струнного простору модулів келерових структур многовиду X. Перетворення монодромії на об'єктах похідної категорії визначається деяким функтором скруту Зайделя – Томаса [9]. Мета роботи — більш детальне вивчення структури похідних категорій когерентних пучків на деяких проективних многовидах, зокрема, побудова їх автоеквівалентностей та сферичних об'єктів. У роботі також побудовано новий тип автоеквівалентностей похідних категорій, які узагальнюють функтори скруту Зайделя – Томаса [9] та телескопні функтори Ленцінга – Мельтцера [10]. Ми також даємо ствердну відповідь на запитання роботи О. Поліщука [11] про існування відмінних від структурних пучків гладких точок кривої та простих розшарувань сферичних об'єктів у категорії $D^b(\mathrm{Coh}_X)$, де X — плоска кубічна крива, яка є трансверсальним перетином коніки та прямої.

Похідним категоріям та перетворенню Фур'є – Мукаї присвячено оглядову роботу [12]. У даній роботі ми акцентуємо увагу на аспектах похідних категорій когерентних пучків, які не розглянуті у роботі Д. Орлова, та деяких питаннях гомологічної теорії D-бран.

2. Похідні категорії. Нагадаємо деякі властивості похідних категорій когерентних пучків на проективних многовидах. За визначенням та основними властивостями похідних та триангульованих категорій можна звернутися до монографії [3].

Складність похідної категорії $D^b(\mathcal{A})$ абелевої категорії $\mathcal{A}$ характеризується її гомологічною розмірністю $\operatorname{gl.dim}(\mathcal{A})$. У найпростішому випадку, коли $\operatorname{gl.dim}(\mathcal{A}) = 0$, категорія $\mathcal{A}$ є напівпростою, будь-який об'єкт $\mathcal{A}$ є проективним і похідна категорія $D^b(\mathcal{A})$ еквівалентна прямій сумі категорій $\oplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathcal{A}_i$, де $\mathcal{A}_i = \mathcal{A}$ для $i \in \mathbb{Z}$. У випадку $\operatorname{gl.dim}(\mathcal{A}) = 1$ класифікація нерозкладних об'єктів похідної категорії $D^b(\mathcal{A})$ також зводиться до класифікації нерозкладних об'єктів самої категорії $\mathcal{A}$.

Нагадаємо, що символ $[n]$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, є стандартним позначенням зсуву даного комплексу на n позицій ліворуч.

Теорема 1. *Нехай X — гладка проективна крива. У похідній категорії когерентних пучків $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ існують два типи нерозкладних об'єктів*:

1) *зсуви хмарочосів* $0 \to \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^k \to 0$, $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$;

2) *зсуви нерозкладних розшарувань* $0 \to \mathcal{E} \to 0$.

Доведення. Внаслідок того, що $\mathrm{Ext}^2(-, -) = 0$, категорія когерентних пучків Coh_X має гомологічну розмірність 1 і за теоремою А. Дольда [12] $\mathcal{F}^\bullet \cong$ $\cong (H^\bullet(\mathcal{F}^\bullet), 0)$ для всіх $\mathcal{F}^\bullet \in \mathrm{Ob}(D^b(\mathrm{Coh}_X))$. Це означає, що

$$\mathcal{F}^\bullet \;\cong\; \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \left(0 \to H^i\left(\mathcal{F}^\bullet\right) \to 0\right)[-i].$$

Таким чином, будь-який об'єкт похідної категорії є ізоморфним прямій сумі зсувів когерентних пучків. Тому класифікація нерозкладних комплексів зводиться до класифікації когерентних пучків.

Нехай $\mathcal{F}$ — когерентний пучок на X. Маємо коротку точну послідовність

$$0 \to \mathrm{tor}(\mathcal{F}) \to \mathcal{F} \to \mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F}) \to 0,$$

де $\mathrm{tor}(\mathcal{F})$ — скрут пучка $\mathcal{F}$. Пучок $\mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F})$ є пучком без скруту. Оскільки крива є гладкою, то він є локально вільним. Тому $\mathrm{Ext}^1\left(\mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F}), \mathrm{tor}(\mathcal{F})\right) = 0$. Функтори $\mathcal{E}\mathrm{xt}^1$ і Ext^1 пов'язані спектральною послідовністю Ж. Лере. А саме, $\mathrm{Hom}(-, -) = \Gamma \circ \mathcal{H}\mathrm{om}(-, -)$, тому $H^p\left(\mathcal{E}\mathrm{xt}^q(\mathcal{F}, \mathcal{G})\right) \Rightarrow \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Із цієї локально глобальної спектральної послідовності одержуємо точну послідовність

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1 \to E_2^{0,1} \to E_2^{0,2} \to H^2 \to \ldots ,$$

або більш конкретно,

$$0 \to H^1(\mathcal{H}\mathrm{om}) \to \mathrm{Ext}^1 \to H^0(\mathcal{E}\mathrm{xt}^1) \to 0.$$

Але носій пучка $\mathcal{H}\mathrm{om}\left(\mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F}), \mathrm{tor}(\mathcal{F})\right)$ є підмножиною носія пучка $\mathrm{tor}(\mathcal{F})$. Тому функтор $\mathrm{tor}(\mathcal{F})$ також є хмарочосом і

$$H^1\left(\mathcal{H}\mathrm{om}\left(\mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F}),\ \mathrm{tor}(\mathcal{F})\right)\right) \;=\; 0.$$

Звідси одержуємо

$$\mathrm{Ext}^1\left(\mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F}), \mathrm{tor}(\mathcal{F})\right) \;=\; H^0\left(\mathcal{E}\mathrm{xt}^1\left(\mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F}), \mathrm{tor}(\mathcal{F})\right)\right) \;=\; 0.$$

Таким чином, $\mathcal{F} = \mathrm{tor}(\mathcal{F}) \oplus \mathcal{F} / \mathrm{tor}(\mathcal{F})$ є когерентним пучком на гладкій кривій, ізоморфним прямій сумі хмарочосів та розшарувань. Залишилося зауважити, що нерозкладні хмарочоси — це $\mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^k$. Це випливає із факту, що категорія когерентних пучків із носієм у точці x еквівалентна категорії скінченновимірних модулів над локальним кільцем $\mathcal{O}_x$, яке у випадку гладкої кривої є кільцем дискретного нормування для будь-якої точки $x \in X$.

***Приклад* 1.** Нерозкладними об'єктами $D^b(\mathrm{Coh}_{\mathbb{P}^1})$ є зсуви хмарочосів

$$0 \to \mathcal{O}_x / \mathfrak{m}_x^k \to 0,$$

де $x \in \mathbb{P}^1$, $k \in \mathbb{N}$, та зсуви лінійних розшарувань

$$0 \to \mathcal{O}(n) \to 0, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

Лема 1 (див. [13], гл. III.5). *Нехай $\mathcal{A}$ — абелева категорія. Розглянемо функтор $\mathcal{A} \to D^b(\mathcal{A})$, який відображає об'єкт $\mathcal{F}$ у комплекс* $0 \to \to \underbrace{\mathcal{F}}_{0\text{-ве місце}} \to 0.$

1. *Цей функтор є повним і строгим.*

2. *Якщо комплекс $\mathcal{F}^\bullet \in D^b(\mathrm{Coh}_X)$ має лише одну нетривіальну когомологію $H^0(\mathcal{F}^\bullet)$, то*

$$\mathcal{F}^\bullet \cong \left(0 \to H^0\left(\mathcal{F}^\bullet\right) \to 0\right).$$

3. *Нехай $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in \mathrm{Coh}_X$. Має місце ізоморфізм*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}[i]) = \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

Це означає, що категорія когерентних пучків є еквівалентною повній підкатегорії похідної категорії, яка складається з комплексів, у яких лише нульова гомологія не дорівнює нулю.

***Приклад* 2.** Нехай $X = \mathbb{P}^1$. Тоді $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}(2), \mathcal{O}) = H^1(\mathcal{O}(-2)) = \mathbf{k}$. Проінтерпретуємо цей ізоморфізм мовою похідних категорій. Має місце коротка точна послідовність Ейлера

$$0 \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}(1)^{\oplus 2} \to \mathcal{O}(2) \to 0.$$

Тому одержуємо морфізм із $\mathcal{O}(2)[-1]$ в $\mathcal{O}$:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \to & 0 & \to & \mathcal{O}(2) & \to & 0 \\
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O} & \to & \mathcal{O}(1)^{\oplus 2} & \to & 0 \\
 & & {\scriptstyle\mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O} & \to & 0 & \to & 0.
\end{array}$$

Цей морфізм є композицією морфізму, оберненого до квазіізоморфізму, та звичайного морфізму комплексів.

Із теореми 1 та леми 1 отримуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай X — гладка проективна крива. Похідна категорія когерентних пучків $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ має внутрішній опис у термінах категорії когерентних пучків*:

1) *нерозкладними об'єктами є зсуви когерентних пучків $\mathcal{F}[i]$*;
2) *має місце ізоморфізм* $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}[i], \mathcal{G}[j]) = \mathrm{Ext}^{j-i}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$;
3) *композиція морфізмів задається добутком Йонеди.*

У випадку особливих кривих та многовидів вищої розмірності ця теорема не має місця. Для многовидів вищої розмірності в похідній категорії існують комплекси, які не ізоморфні сумі своїх когомологій. Внаслідок цього похідна категорія когерентних пучків є складним алгебро-геометричним об'єктом.

3. Функтори скруту. При вивченні дзеркальної симетрії природно виникло питання встановлення еквівалентності похідних категорій когерентних пучків [2]. Як відомо [4], така еквівалентність для гладких проективних многовидів X та Y встановлюється перетворенням Фур'є – Мукаї

$$\Phi^{\mathcal{P}}_{X\to Y}(\mathcal{F}) \;=\; \mathbf{R}\pi_{Y*}\left(\pi_X^*(\mathcal{F})\overset{\mathbf{L}}{\otimes}\mathcal{P}\right),$$

де $\mathcal{P}\in D(X\times Y)$, π_X, π_Y — задані проекції $X\xleftarrow{\pi_X} X\times Y\xrightarrow{\pi_Y} Y$, $\mathbf{R}\pi_{Y*}(-)$ — правий похідний функтор прямого образу відображення π_Y. У випадку, коли многовиди X та Y збігаються, а ядро перетворення Фур'є – Мукаї має вигляд

$$\mathcal{P} \;=\; \mathrm{Cone}\left\{\mathcal{E}^\vee\boxtimes\mathcal{E}\to j_*\mathcal{O}_X\right\},$$

$j\colon X\to X\times X$ — діагональне вкладення, $\mathcal{E}\in D(\mathrm{Coh}_X)$, функтор Фур'є – Мукаї зводиться до *функтора скруту* $T_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ [9].

Цей клас функторів є зручним для дослідження зв'язку між появою безмасових B-типу D-бран для деяких точок келерового простору модулів многовиду та монодромією навколо цих точок, а також для обчислення в довільній точці простору модулів комплексифікованих келерових форм спектра БПЗ солітонів деяких суперсиметричних теорій Янга – Мілса.

Нехай X — проективний алгебраїчний многовид із щонайбільш горенштейновими особливостями. Нехай $\mathfrak{R}$ — повна підкатегорія гомотопічної категорії ін'єктивних квазікогерентних пучків $K_{\mathrm{I}}^+(\mathcal{Q}\mathrm{Coh}_X)$, яка складається із комплексів із скінченною кількістю нетривіальних гомологій, які є когерентними пучками. Тоді $\mathfrak{R}$ еквівалентна похідній категорії $D^b(\mathrm{Coh}_X)$.

Нехай $\mathcal{E}\in\mathfrak{R}$ — об'єкт, ізоморфний обмеженому комплексу ін'єктивних модулів. Оскільки многовид X горенштейновий, це еквівалентно тому, що $\mathcal{E}$ є перфектним комплексом.

Означення 1 [9] (означення 2.5). *Визначимо функтор скруту* $T_{\mathcal{E}}\colon\mathfrak{R}\to\mathfrak{R}$ *за правилом*

$$T_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \;=\; \left\{\mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathcal{E}\xrightarrow{\mathrm{ev}}\mathcal{F}\right\}.$$

Таке означення дозволяє коректно визначити $T_{\mathcal{E}}$ *на морфізмах. Більш конкретно, на об'єктах* $T_{\mathcal{E}}$ *визначається таким чином*:

$$T_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \;:=\; \mathrm{Cone}\left(\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(\mathcal{E}[i],\mathcal{F})\overset{\mathrm{End}(\mathcal{E})}{\otimes}\mathcal{E}[i]\xrightarrow{\mathrm{ev}}\mathcal{F}\right),$$

де ev — *морфізм евалюації.*

Лема 2 [9] (лема 2.8). *Функтор скруту* $T_{\mathcal{E}}$ *має лівий спряжений функтор* $T'_{\mathcal{E}}$, *який визначається за правилом*

$$T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \;=\; \{\mathrm{ev}'\colon\mathcal{F}\to\mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E})\}.$$

На об'єктах категорії функтор $T'_{\mathcal{E}}$ *визначається таким чином*:

$$T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \;:=\; \mathrm{Cone}\left(\mathcal{F}\xrightarrow{\mathrm{ev}'}\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}[i])^\vee\overset{\mathrm{End}(\mathcal{E})}{\otimes}\mathcal{E}[i]\right).$$

Позначимо через $\tau\colon D^b_{\mathrm{perf}}(\mathrm{Coh}_X)\to D^b_{\mathrm{perf}}(\mathrm{Coh}_X)$ функтор Серра похідної категорії перфектних комплексів $D^b_{\mathrm{perf}}(\mathrm{Coh}_X)$.

Теорема 2. *Припустимо, що* $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m$ — *набір об'єктів* $D^b_{\mathrm{perf}}(\mathrm{Coh}_X)$ *такий, що*:

1) $\tau(\mathcal{E}_i) = \mathcal{E}_{i+1}[N]$, *де* $N = \dim(X)$, $\mathcal{E}_{m+1} = \mathcal{E}_1$;

2) $\mathrm{Hom}\big(\mathcal{E}_i, \mathcal{E}_j[s]\big) = \begin{cases} \mathbf{k}, & \textit{якщо } i = j \textit{ та } s = 0, \textit{ або } i = j+1 \textit{ та } s = N, \\ 0 - \textit{у решті випадків.} \end{cases}$

Нехай $\mathcal{E} = \bigoplus_{i=1}^{m} \mathcal{E}_i$. *Тоді функтор* $T_{\mathcal{E}}$ *є еквівалентністю категорії* $D^b_{\mathrm{perf}}(\mathrm{Coh}_X)$ *і* $T'_{\mathcal{E}}$ *є квазіоберненим до* $T_{\mathcal{E}}$.

Доведення. Зауважимо, що коли набір $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots, \mathcal{E}_m$ із наведеними властивостями складається з одного елемента $\mathcal{E}$, то $\mathcal{E}$ буде сферичним [9]. Доведення цієї теореми є аналогічним доведенню теореми 2.10 з [9]. Має місце така комутативна діаграма:

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathcal{E} & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{hom}(\mathcal{E}, \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}))\otimes\mathcal{E} & \to & \mathrm{hom}\big(\mathcal{E}, T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})\big)\otimes\mathcal{E} \\ \alpha\downarrow & & \gamma\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E})) & \to & T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}) \\ & & & & \downarrow \\ & & & & T_{\mathcal{E}}\, T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F}). \end{array}$$

Оскільки конус морфізму комплексів $f\colon \mathcal{K} \to \mathcal{T}$ є тотальним комплексом відповідного бікомплексу, то $T_{\mathcal{E}}\, T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ є тотальним комплексом 3-вимірного комплексу

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathcal{E} & \xrightarrow{\delta} & \mathrm{hom}(\mathcal{E}, \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}))\otimes\mathcal{E} \\ \alpha\downarrow & & \gamma\downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}) \end{array}\right\}.$$

Мономорфізм комплексів

$$\mathrm{hom}(\mathcal{E}, \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}))\otimes\mathcal{E} \hookrightarrow \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}), \mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathcal{E})$$

є квазіізоморфізмом. Більш того, має місце комутативна діаграма

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}(\mathcal{E}, \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}))\otimes\mathcal{E} & \longrightarrow & \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}), \mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathcal{E}) \\ \gamma\downarrow & & \bar{\gamma}\downarrow \\ \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}) & \xrightarrow{=} & \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}), \end{array}$$

де морфізм $\bar{\gamma}$ індукований морфізмом $\mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathcal{E} \to \mathcal{E}$. Тому $T_{\mathcal{E}}\, T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ є тотальним комплексом 3-вимірного комплексу

$$\left\{\begin{array}{ccc} \mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathcal{E} & \xrightarrow{\bar{\delta}} & \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}), \mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathcal{E}) \\ \alpha\downarrow & & \bar{\gamma}\downarrow \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\beta} & \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E}) \end{array}\right\}.$$

Тепер зауважимо, що морфізм комплексів $\bar{\gamma}\colon \mathrm{lin}(\mathrm{hom}(\mathcal{F},\mathcal{E}),\ \mathrm{hom}(\mathcal{E},\mathcal{E})\otimes\mathcal{E}) \to$

$\to \operatorname{lin}(\hom(\mathcal{F},\mathcal{E}),\mathcal{E})$ розщеплюється, тому $T_{\mathcal{E}}\,T'_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})$ є тотальним комплексом 3-вимірного комплексу

$$\left\{\begin{array}{ccc} \hom(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathcal{E} & \xrightarrow{\delta'} & \operatorname{lin}\left(\hom(\mathcal{F},\mathcal{E}), \dfrac{\hom(\mathcal{E},\mathcal{E})}{\hom^0(\mathcal{E},\mathcal{E})}\otimes\mathcal{E}\right) \\ \alpha\downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \end{array}\right\}.$$

Залишилося зауважити, що відображення

$$\delta':\ \hom(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes\mathcal{E}\to\operatorname{lin}\left(\hom(\mathcal{F},\mathcal{E}), \frac{\hom(\mathcal{E},\mathcal{E})}{\hom^0(\mathcal{E},\mathcal{E})}\otimes\mathcal{E}\right)$$

є квазіізоморфізмом, тому що

$$H^*(\delta'):\ \operatorname{Hom}^*_{\mathfrak{R}}(\mathcal{E},\mathcal{F})\otimes H^*(\mathcal{E})\to$$

$$\to\operatorname{Hom}^*_{\mathfrak{R}}(\mathcal{F},\mathcal{E})^{\vee}\overset{\operatorname{End}(\mathcal{E})}{\otimes}\frac{\operatorname{Hom}^*_{\mathfrak{R}}(\mathcal{E},\mathcal{E})}{\operatorname{Hom}^0_{\mathfrak{R}}(\mathcal{E},\mathcal{E})}\otimes H^*(\mathcal{E})$$

є ізоморфізмом.

Відображення $H^i(\delta')$ є ізоморфізмом для всіх $i\in\mathbb{Z}$, оскільки згідно із двоїстістю Серра відображення

$$\operatorname{Hom}^i(\mathcal{E},\mathcal{F})\times\operatorname{Hom}^{N-i}(\mathcal{F},\mathcal{E})\to\operatorname{Hom}^N(\mathcal{E},\mathcal{E})$$

є ізоморфізмом і усі ендоморфізми $\mathcal{E}$ мають степінь 0 або N.

Розглянемо деякі приклади.

***Приклад* 3.** Нехай X — гладка проективна $K3$-поверхня. За означенням дуалізуючий пучок X є тривіальним: $\omega_X=\mathcal{O}$ і, крім того, $H^1(\mathcal{O})=0$. Тоді структурний пучок $\mathcal{O}$ є сферичним: $\mathcal{O}=\tau(\mathcal{O})[-2]$ і $\operatorname{Hom}(\mathcal{O},\mathcal{O}[s])=\mathbf{k}$ для $s=0$ і 0 для $s\neq0$. Відповідний функтор

$$T_{\mathcal{O}}:\ D^b(\mathrm{Coh}_X)\to D^b(\mathrm{Coh}_X)$$

вперше розглянуто у роботі С. Мукаї [16] під назвою „функтор відбиття”.

***Приклад* 4.** Нехай X — поверхня Енріквеса. За означенням квадрат канонічного пучка є тривіальним: $\omega_X^{\otimes2}=\mathcal{O}$, і, крім того, виконуються такі умови для когомологій цієї поверхні:

	H^0	H^1	H^2
$\mathcal{O}$	$\mathbf{k}$	0	0
ω	0	0	$\mathbf{k}$

Оскільки функтор Серра τ похідної категорії $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ дорівнює $-\otimes\omega_X[2]$, то пара $(\mathcal{O},\omega_X)$ задовольняє умови теореми 2. Функтор $T_{\mathcal{O}\oplus\omega_X}$ у неявному вигляді було розглянуто у роботі С. Зубе [17]. Зауважимо, що будь-яка поверхня Енріквеса є орбіфолдним фактором певної $K3$-поверхні відносно дії групи $\mathbb{Z}_2$.

***Приклад* 5.** Нехай X — зважена проективна пряма віртуального роду 1 [10]. Колчан Ауслендера – Райтен похідної категорії когерентних пучків

$D^b(\mathrm{Coh}_X)$ складається лише із труб, і тому орбіта будь-якого нерозкладного когерентного пучка відносно трансляції Ауслендера – Райтен є скінченною. Нехай $\mathcal{A}_1 = \mathcal{O}$, $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_m$ — орбіта Ауслендера – Райтен структурного пучка прямої X. Тоді набір $\{\mathcal{A}_i \,|\, 1 \le i \le m\}$ задовольняє умови теореми 2. Функтори $T_{\mathcal{A}}$, де $\mathcal{A} = = \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{A}_m$, розглядались у роботі Х. Мельтцера і Х. Ленцінга під назвою „телескопні функтори" [10], які дали змогу класифікувати всі нерозкладні об'єкти категорії $D^b(\mathrm{Coh}_X)$.

4. Топологічний заряд D-бран типу IIB. Відомо, що категорія топологічних D-бран типу IIB збігається з похідною категорією когерентних пучків на многовиді Калабі – Яу X. У цьому розділі ми розглянемо поняття топологічного заряду топологічної B-брани та проілюструємо його на прикладі квінтики — гіперповерхні 5-го степеня в $\mathbf{P}^4$.

Розглянемо розшарування $\mathcal{E}$ на многовиді Калабі – Яу X. Воно характеризується його топологічними інваріантами, класами Чженя $c_i(\mathcal{E}) \in H^{2i}(X; \mathbb{C})$. Нагадаємо їхні основні властивості:

a) $c_i(\mathcal{E}^\vee) = (-1)^i c_i(\mathcal{E})$;

b) $c_i\big(f^*(\mathcal{E})\big) = f^*(c_i(\mathcal{E}))$ для будь-якого морфізму $f\colon X \to Y$ комплексних многовидів X, Y;

c) повний клас Чженя лінійного розшарування $\mathcal{E} = \mathcal{L}(D)$, асоційованого із дивізором Вейля D, обчислюється за формулою $c(\mathcal{E}) = 1 + [D]$.

Зауважимо, що D є підмноговидом дійсної корозмірності 2, тому двоїстий за Пуанкаре коцикл належить $H^2(X; \mathbb{C})$. Із многовидом X асоціюється кільце Гротендика $K(X)$.

Означення 2. *Як абелева група, $K(X)$ породжується класами ізоморфізму векторних розшарувань $[\mathcal{E}]$ та співвідношеннями*

$$[\mathcal{E}] = [\mathcal{E}'] + [\mathcal{E}''],$$

де $0 \to \mathcal{E}' \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}'' \to 0$ — коротка точна послідовність розшарувань. Добуток в $K(X)$ індукується тензорним добутком векторних розшарувань $[\mathcal{E}] \cdot \cdot [\mathcal{E}'] = [\mathcal{E} \otimes \mathcal{E}']$.

Характер Чженя $\mathrm{ch}(\mathcal{E})$ розшарування $\mathcal{E}$ рангу r та класами Чженя $c_i = c_i(\mathcal{E})$ визначається за формулою

$$\mathrm{ch}(\mathcal{E}) = r + c_1 + \frac{1}{2}\left(c_1^2 - 2c_2\right) + \frac{1}{6}\left(c_1^3 - 3c_1c_2 + 3c_3\right) +$$
$$+ \frac{1}{24}\left(c_1^4 - 4c_1^2c_2 + 4c_1c_3 + 2c_2^2 - 4c_4\right) + \ldots .$$

Теорема 3 (див. [18], додаток A). *Характер Чженя визначає гомоморфізм кілець*

$$\mathrm{ch}\colon K(X) \to H^{2*}(X; \mathbb{C}), \qquad \mathrm{ch}(\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}) = \mathrm{ch}(\mathcal{E}) \wedge \mathrm{ch}(\mathcal{F}),$$

де $\wedge$ позначає зовнішній добуток диференціальних форм.

Нагадаємо формулювання теореми Рімана – Роха – Хірцебруха.

Теорема 4 (див. [18], додаток A). *Нехай $\mathcal{E}$ — локально вільний пучок на X, $\mathcal{F}$ — довільний когерентний пучок. Визначимо ейлерову характеристику пучків („форму перетину") $\mathcal{E}$ і $\mathcal{F}$*

$$\chi(\mathcal{E},\mathcal{F}) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{E},\mathcal{F}).$$

Тоді має місце співвідношення

$$\chi(\mathcal{E},\mathcal{F}) = \int_X \mathrm{ch}\big(\mathcal{E}^{\vee}\big) \wedge \mathrm{ch}(\mathcal{F}) \wedge \mathrm{td}_X.$$

Нагадаємо, що клас Тода векторного розшарування $\mathcal{E}$ визначається за формулою

$$\mathrm{td}(\mathcal{E}) = 1 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{12}\big(c_1^2 + c_2\big) + \frac{1}{24}c_1c_2 -$$

$$- \frac{1}{720}\big(c_1^4 - 4c_1^2c_2 - 3c_2^2 - c_2c_3 + c_4\big) + \ldots .$$

Символ td_X позначає $\mathrm{td}(\mathcal{T}_X)$, де $\mathcal{T}_X$ — дотичне розшарування многовиду X. У випадку многовиду Калабі – Яу X перший клас Чженя зануляється $c_1(X) = 0$. Тому формула для класу Тода многовиду Калабі – Яу X розмірності 3 і менше набирає простішого вигляду

$$\mathrm{td}_X = 1 + \frac{1}{12}c_2(X).$$

Зокрема, клас Тода еліптичної кривої є тривіальним, $\mathrm{td}_X = 1$.

***Зауваження* 1.** Групу $K(X)$ можна еквівалентним чином визначити як групу, породжену класами ізоморфізмів комплексів категорії $D^b(\mathrm{Coh}_X)$. Якщо

$$\mathcal{E}'^{\bullet} \to \mathcal{E}^{\bullet} \to \mathcal{E}''^{\bullet} \to \mathcal{E}'^{\bullet}[1]$$

— виділений трикутник, то $[\mathcal{E}^{\bullet}] = [\mathcal{E}'^{\bullet}] + [\mathcal{E}''^{\bullet}]$. Добуток у кільці індукується похідним тензорним добутком у похідній категорії $\bullet \overset{\mathbf{L}}{\otimes} \bullet$.

Теорема Рімана – Роха – Хірцебруха узагальнюється на похідну категорію когерентних пучків $D^b(\mathrm{Coh}_X)$. Як і для когерентних пучків, ми можемо визначити ейлерову характеристику („форму перетину") двох комплексів (топологічних D-бран) $\mathcal{E}^{\bullet}$ і $\mathcal{F}^{\bullet}$:

$$\chi(\mathcal{E}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{Hom}\big(\mathcal{E}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}[i]\big).$$

Ейлерова характеристика є адитивною по відношенню до виділених трикутників. Застосувавши функтор $\mathrm{Hom}\big(-,\mathcal{F}^{\bullet}\big)$ до виділеного трикутника

$$\mathcal{E}'^{\bullet} \to \mathcal{E}^{\bullet} \to \mathcal{E}''^{\bullet} \to \mathcal{E}'^{\bullet}[1],$$

одержуємо ациклічний комплекс скінченновимірних векторних просторів

$$\ldots \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}) \to$$

$$\to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}''^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}) \to \mathrm{Hom}(\mathcal{E}'^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}[1]) \to \ldots .$$

Звідси випливає, що ейлерова характеристика ациклічного комплексу дорівнює нулю, тому виконується співвідношення

$$\chi(\mathcal{E}^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}) = \chi(\mathcal{E}'^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}) + \chi(\mathcal{E}''^{\bullet},\mathcal{F}^{\bullet}).$$

Означення 3. *Визначимо характер Чженя комплексу* $\mathcal{E}^\bullet$ *за формулою*

$$\operatorname{ch}(\mathcal{E}^\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \operatorname{ch}\left(\mathcal{E}^i\right).$$

Стандартні аргументи показують, що ця формула не залежить від вибору локально вільного представника $\mathcal{E}^\bullet$ і залежить лише від класу когомологій комплексу.

Тому можна сформулювати теорему Рімана – Роха – Хірцебруха для похідних категорій, яка є безпосереднім наслідком стандартної теореми Рімана – Роха – Хірцебруха.

Теорема 5. *Нехай ейлерова характеристика („форма перетину") двох комплексів* $\mathcal{E}^\bullet$ *і* $\mathcal{F}^\bullet$ *категорії* $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ *визначається за формулою*

$$\chi(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} (-1)^i \dim\operatorname{Hom}\left(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet[\,i\,]\right).$$

Тоді

$$\chi(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet) = \int_X \operatorname{ch}\left(\mathcal{E}^{\bullet\vee}\right) \wedge \operatorname{ch}\left(\mathcal{F}^\bullet\right) \wedge \operatorname{td}_X.$$

Означення 4. *Нехай* $\mathcal{E}^\bullet$ *— деякий комплекс (D-брана) із* $D^b(\mathrm{Coh}_X)$*. Тоді*

$$v(\mathcal{E}^\bullet) := \operatorname{ch}(\mathcal{E}^\bullet) \wedge \sqrt{\operatorname{td}_X}$$

називається вектором Мукаї (*топологічним зарядом*) *комплексу* $\mathcal{E}^\bullet$ (*D-брани*).

Нехай X — многовид Калабі – Яу. На підставі викладеного вище з кожним сферичним об'єктом $\mathcal{E}$ похідної категорії когерентних пучків асоціюється певний функтор скруту $T_{\mathcal{E}}: D^b(\mathrm{Coh}_X) \to D^b(\mathrm{Coh}_X)$. Скрут Зайделя – Томаса є дзеркальним двійником симплектоморфізму Дена. Зрозуміло, що дія $T_{\mathcal{E}}$ на K-групі похідної категорії має вигляд

$$[\mathcal{F}] \mapsto [T_{\mathcal{E}}(\mathcal{F})] = [\mathcal{F}] - \chi(\mathcal{E}^\bullet, \mathcal{F}^\bullet)[\mathcal{E}].$$

На рівні топологічних зарядів ми маємо перетворення $H^{2\bullet}(X; \mathbb{C}) \to H^{2\bullet}(X; \mathbb{C})$:

$$\gamma \mapsto \gamma - \left(\int_X \operatorname{ch}\left(\mathcal{E}^\vee\right) \wedge \gamma \wedge \operatorname{td}_X \right) \operatorname{ch}(\mathcal{E}).$$

Зокрема, у випадку $\mathcal{E} = \mathcal{O}$ отримуємо

$$\gamma \mapsto \gamma - \left(\int_X \gamma \wedge \operatorname{td}_X \right) \cdot 1.$$

Проведемо конкретні підрахунки для квінтики в $\mathbf{P}^4$. Насамперед ми повинні підрахувати її когомологічне кільце.

Лема 3. *Кільце парних когомологій квінтики* X *дорівнює* $\mathbb{C}[t]/t^3$.

Доведення. Із короткої точної послідовності

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-5) \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \to \mathcal{O}_X \to 0$$

випливає, що $H^1(\mathcal{O}_X) = H^2(\mathcal{O}_X) = 0$. Тому $h^{1,0}(X) = h^{2,0} = 0$. Використовуючи співвідношення $h^{p,q} = h^{q,p}$ (теорема Ходжа про ізоморфізм) та $h^{p,q} = h^{3-p,3-q}$

(теорема двоїстості Кодаїри – Серра, див. [19, с. 116]), знаходимо вигляд ромба Ходжа

$$\begin{array}{lccccccc}
b_0 & & & & 1 & & & \\
b_1 & & & 0 & & 0 & & \\
b_2 & & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
b_3 & 1 & & h^{2,1} & & h^{2,1} & & 1. \\
b_4 & & 0 & & h^{1,1} & & 0 & \\
b_5 & & & 0 & & 0 & & \\
b_6 & & & & 1 & & &
\end{array}$$

Тут $h^{1,1}$ є розмірністю простору модулів келерових структур многовиду X. Відомо, що цей простір модулів у випадку квінтики є одновимірним. Тому $b_0 = b_2 = b_4 = b_6 = 1$. Нехай $i : X \to \mathbf{P}^4$ — морфізм вкладення. Він індукує морфізм кілець когомологій $H^*(i) : H^*(\mathbf{P}^4; \mathbb{C}) \to H^*(X; \mathbb{C})$. Когомологічне кільце проективного простору $\mathbf{P}^4$ зосереджене лише у парних розмірностях та дорівнює $\mathbb{C}[t]/t^4$. Можна довести, що індуковане відображення когомологічних кілець у випадку квінтики, вкладеної в $\mathbf{P}^4$, є епіморфізмом. Тому із підрахунків розмірностей груп когомологій випливає, що $H^{2*}(X; \mathbb{C}) = \mathbb{C}[t]/t^3$, де клас t є двоїстим до класу гіперплоского перетину $t = c_1\left(\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(1)|_X\right)$ многовиду X.

Таким чином, дія T_O на кільці $H^{2*}(X; \mathbb{C})$ задається певною (4×4)-матрицею. Для обчислення її явного вигляду нам необхідно підрахувати клас Тода многовиду X. Розглянемо коротку точну послідовність

$$0 \to T_X \to \mathcal{T}_{\mathbf{P}^4}|_X \to \mathcal{N}_{X|\mathbf{P}^4} \to 0,$$

де $\mathcal{N}_{X|\mathbf{P}^4}$ — конормальне розшарування до X. Цієї послідовності виявляється досить для підрахунку класів Чженя многовиду X.

1. Дотичне розшарування $\mathcal{T}_{\mathbf{P}^4}$ визначається короткою точною послідовністю Ейлера

$$0 \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4} \to \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(1)^{\oplus 5} \to \mathcal{T}_{\mathbf{P}^4} \to 0.$$

2. Позначимо через I пучок ідеалів для квінтики X. Тоді $I \cong \mathcal{O}_{\mathbf{P}^4}(-5)$ і $\mathcal{N}_{X|\mathbf{P}^4} = \left(I/I^2\right)^\vee = \left(\mathcal{O}(-X) \otimes_{\mathcal{O}} \mathcal{O}_X\right)^\vee$. Іншими словами, $\mathcal{N}_{X|\mathbf{P}^4} = \mathcal{O}(5)|_X$.

Нехай $H \subset \mathbf{P}^4$ — гіперплощина, $D = H|_M$. Оскільки $\mathcal{N} = \mathcal{O}_X(5D)$, то $c_t(\mathcal{N}) = 1 + 5D \cdot t$.

Маємо $c_t\left(\mathcal{T}_{\mathbf{P}^4}\right) = (1 + Ht)^5 = 1 + 5H \cdot t + 10H^2 \cdot t^2 + 10H^3 \cdot t^3 + 5H^4 \cdot t^4$. Тому $c_t\left(\mathcal{T}_{\mathbf{P}^4}|_X\right) = 1 + 5D \cdot t + 10D^2 \cdot t^2 + 10D^3 \cdot t^3$. Нарешті, ми можемо підрахувати повний клас Чженя дотичного розшарування $\mathcal{T}_X$:

$$c_t(\mathcal{T}_X) = \frac{1 + 5D \cdot t + 10D^2 \cdot t^2 + 10D^3 \cdot t^3}{1 + 5D \cdot t} = 1 + 10D^2 \cdot t^2 - 40D^3 \cdot t^3.$$

Із формули для класу Тода випливає, що $\mathrm{td}_X = 1 + c_2 / 12 + 5D^2 / 6$. Нагадаємо, що функтор скруту T_O діє на $H^{2*}(X; \mathbb{C})$ за правилом

$$\gamma \mapsto \gamma - \int_X (\gamma \wedge \mathrm{td}_X) \cdot 1.$$

Зауважимо, що $\int_X D^3 = 5$. Тому у базисі $1, D, D^2, D^3$ скрут T_O індукує лінійне перетворення, яке задається матрицею

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{25}{6} & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

У випадку, коли автоеквівалентність похідної категорії $D^b(\mathrm{Coh}_X)$ задається:

$$\cdot \otimes O(D) : D^b(\mathrm{Coh}_X) \to D^b(\mathrm{Coh}_X),$$

індуковане відображення в когомологіях має вигляд

$$\gamma \mapsto \gamma \wedge \mathrm{ch}(O(D)).$$

Оскільки $\mathrm{ch}(O(D)) = 1 + D + D^2 / 2 + D^3 / 6$, то у базисі $1, D, D^2, D^3$ воно задається матрицею

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що $(TS)^5 = 1$. Виявляється, що це не випадковість: має місце рівність $(\mathcal{T}_O \circ O(D))^5 = [2]$. Це твердження було сформульоване як гіпотеза М. Концевичем та доведено пізніше П. Хор'я та П. Зайделем (неопубліковано).

Лема 4. *Група Пікара квінтики дорівнює* $\mathbb{Z}$. *Зокрема, лінійні розшарування визначаються їх степенями.*

Доведення. Розглянемо коротку точну послідовність

$$0 \to \mathbb{Z} \to O \xrightarrow{\exp} O^* \to 0.$$

Оскільки $H^1(O) = H^2(O) = 0$, то із довгої точної послідовності випливає, що послідовність

$$0 \to H^1(O^*) \xrightarrow{\deg} H^2(M; \mathbb{Z}) \to 0$$

є точною. Але $H^1(O^*) = \mathrm{Pic}(M)$, а $H^2(M; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$.

***Приклад* 6.** Підрахуємо топологічний заряд лінійного розшарування $O(1)$:

$$Q(O(1)) = \mathrm{ch}\left(O\left(\frac{D}{5}\right)\right) \wedge \mathrm{td}_X = \left(1 + \frac{D}{5} + \frac{D^2}{50} + \frac{D^3}{750}\right)\left(1 + \frac{5}{6}D^2\right) =$$

$$= 1 + \frac{D}{5} + \frac{64 \cdot D^2}{75} + \frac{21 \cdot D^3}{125}.$$

5. Топологічні брани на вироджених еліптичних кривих. Важливим аспектом гомологічної теорії D-бран є дослідження похідної категорії когерентних пучків при виродженні комплексної структури многовиду, зокрема, дослідження похідної категорії когерентних пучків на особливих многовидах Калабі – Яу.

Класифікацію нерозкладних об'єктів похідної категорії когерентних пучків на циклах проективних прямих (які є одновимірними особливими многовидами Калабі – Яу) одержано у роботі [20], опис простих розшарувань на циклах проективних прямих — в [21, 22]. Нехай X — цикл проективних прямих. У роботі О. Поліщука [11] поставлено таке запитання: чи існують сферичні об'єкти в $D^b(\mathrm{Coh}_X)$, відмінні від структурних пучків гладких точок та простих розшарувань? Це запитання є важливим з точки зору фізики D-бран. У цьому розділі ми побудуємо нетривіальний сферичний об'єкт на циклі двох проективних прямих.

Нехай $X \subset \mathbf{P}^2$ — крива третього степеня, яка є перетином коніки та прямої. Крива X є плоским виродженням гладкої кубічної кривої.

Лема 5 (див. [18], вправа II. 6. 9). *Має місце ізоморфізм*

$$\mathrm{Pic}(X) = \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{C}^*.$$

Тому ми позначатимемо лінійне розшарування $\mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(X)$ через $\mathcal{L}((a, b), \lambda)$, де $a, b \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Розглянемо розшарування $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}((2, 0), 1)$ і $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}((0, 3), 1)$. Обидва розшарування є сферичними об'єктами, тому ми можемо розглянути комплекс $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1}(\mathcal{L}_2) \in D^b_{\mathrm{perf}}(\mathrm{Coh}_X)$. Мають місце рівності $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \mathbb{C}^2$, $\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_2, \mathcal{L}_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) = \mathbb{C}$. Згідно з означенням

$$\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1}(\mathcal{L}_2) =$$

$$= \mathrm{Cone}\left(\mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2) \otimes \mathcal{L}_1 \oplus \mathrm{Hom}(\mathcal{L}_1[-1], \mathcal{L}_2) \otimes \mathcal{L}_1[-1] \xrightarrow{\mathrm{ev}} \mathcal{L}_2\right).$$

Розпишемо цей комплекс у явному вигляді. Маємо коротку точну послідовність

$$0 \to \mathcal{L}((0, 0), -1) \xrightarrow{i} \mathcal{L}((1, 0), 1) \oplus \mathcal{L}((1, 0), -1) \xrightarrow{j} \mathcal{L}((2, 0), 1) \to 0,$$

де

$$i = \begin{pmatrix} \dfrac{y - x}{1} \\ \dfrac{x + y}{1} \end{pmatrix}$$

та

$$j = \begin{pmatrix} \dfrac{x + y}{1} & \dfrac{x - y}{-1} \end{pmatrix}.$$

Тому ми маємо розглянути конус такого відображення комплексів:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & \mathcal{L}_1^{\oplus 2} & \to & 0 & \to & 0 \\
 & & \oplus & & & & \\
0 & \to & \mathcal{L}' & \xrightarrow{i} & \mathcal{L}'' & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & & & \\
0 & \to & \mathcal{L}_2 & \to & 0 & \to & 0,
\end{array}
$$

де $\mathcal{L}' = \mathcal{L}((0, 0), -1)$, $\mathcal{L}'' = \mathcal{L}((1, 0), 1) \oplus \mathcal{L}((1, 0), -1)$. Конусом морфізму цього відображення є комплекс

$$0 \to \mathcal{L}_1^{\oplus 2} \oplus \mathcal{L}' \xrightarrow{\begin{pmatrix} \mathrm{ev}_0 & \mathrm{ev}_1 \\ 0 & i \end{pmatrix}} \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}'' \to 0.$$

Очевидно, що:

1) морфізм $\mathrm{ev}_0 : \mathcal{L}_1^{\oplus 2} \to \mathcal{L}_2$ має ядро;

2) морфізм $i : \mathcal{L}' \to \mathcal{L}''$ має коядро.

Тому комплекс $\mathcal{T}_{\mathcal{L}_1}(\mathcal{L}_2)$ має дві нетривіальні когомології. Оскільки скрут $T_{\mathcal{L}_1}$ є автоеквівалентністю похідної категорії $D^b(\mathrm{Coh}_X)$, то $T_{\mathcal{L}_1}(\mathcal{L}_2)$ є сферичним об'єктом.

1. *Zaslow E.* Soliton and helics: search for a mathematical physics bridge // Communs Math. Phys. – 1996. – **175**. – P. 337–347.
2. *Kontsevich M.* Homological algebra of mirror symmetry // Proc. Int. Congress Math. (Zürich, 1994). – 1995. – P. 120–139.
3. *Polchinski J.* Dirichlet branes and Ramond-Ramond charges // Phys. Rev. Lett. – 1995. – **75**. – P. 4724–4727. (Preprint / arxiv: hep-th N 9510017.)
4. *Witten E.* *D*-branes and *K*-theory // J. High Energy Phys. – 1998. – **9812.** – P. 19.
5. *Minasian R., Moore G.* *K*-theory and Ramond-Ramond charges, *D*-branes and *K*-theory // Ibid. – 1997. – **11**. – P. 102. (arxiv: hep-th N 9710230.)
6. *Cox D. A., Kaz S.* Mirror symmetry and algebraic geometry // Math. Surveys and Monographs. – Amer. Math. Soc., 1999. – **68**. – P. 203.
7. *Bondal A., Orlov D.* Semiorthogonal decompositions for algebraic varieties. – 1995. – 10 p. (Preprint / arxiv: math AG N 9506006.)
8. *Bridgeland T.* Flops and derived categories // Invent. math. – 2002. – **147**, № 3. – P. 613–632.
9. *Seidel P., Thomas R.* Braid group actions on derived categories of coherent sheaves // Duke Math. J. – 2001. – **108**, № 1. – P. 37–108.
10. *Lenzing H., Meltzer H.* Sheaves on a weighted projective line of genus one and representations of a tubular algebra // Can. Math. Soc. Conf. Proc. – 1993. – **14**. – P. 313– 337.
11. *Polishchuk A.* Yang – Baxter equation and A_∞-constrains // Adv. Math. – 2002. – **168**. – P. 56–95.
12. *Орлов Д.* Производные категории когерентных пучков и эквивалентности между ними // Успехи мат. наук. – 2003. – **58**, № 3. – P. 89–172.
13. *Гельфанд С. И., Манин Ю. И.* Методы гомологической алгебры. – М.: Наука, 1988.
14. *Orlov D.* Equivalences of derived categories and K3 surfaces // J. Math. Sci. (New York). – 1997. – **84**, № 5. – P. 1361–1381.
15. *Dold A.* Zur Homotopietheorie der Kettenkomplexe // Math. Ann. – 1960. – **140**. – S. 278–298.
16. *Mukai S.* On the moduli spaces of bundles on K3 surfaces I // Vector Bundles on Algebraic Varieties. Stud. Math. Tata Inst. Fundam. Res. – 1987. – **11**. – P. 341–413.
17. *Zube S.* Exceptional sheaves on Enriques surfaces // Math. Notes. – 1994. – **61**, № 6. – P. 693–699.
18. *Хартсхорн Р.* Алгебраическая геометрия. – М.: Мир, 1981. – 599 с.
19. *Гриффитс Ф., Харрис Дж.* Принципы алгебраической геометрии. – М.: Мир, 1982. – 862 с.
20. *Burban I. I., Drozd Yu. A.* Coherent sheaves on singular curves with nodal singularities // Duke Math. J. – 2004. – **121**, № 2. – P. 189–229. (Preprint / axiv: math. AG N 0101140.)
21. *Бурбан І. І.* Стабільні розшарування на раціональній кривій із однією простою подвійною точкою // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 7. – P. 867–875.
22. *Burban I. I., Drozd Yu. A., Greuel G.-M.* Vector bundles on singular projective curves // Appl. Geometry to Coding Theory, Physics, Computation. – New York: Kluwer, 2001. – P. 1 – 15.

Одержано 17.02.2004