УДК 517.93

А. М. Ковалев, Н. В. Кравченко, В. Н. Неспирный
(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ СТАБИЛИЗИРУЕМОСТИ ПО ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В КЛАССЕ РАЗРЫВНЫХ УПРАВЛЕНИЙ

We study the existence of a discontinuous feedback, which provides the stabilization of a nonlinear control system with respect to a part of variables. We determine a solution of the system in the Filippov sense. We obtain a necessary condition for the stabilizability with respect to a part of variables in the class of discontinuous controls which generalizes the Ryan condition to the case of stabilizability with respect to a part of variables. We consider an example of a mechanical system that is not stabilizable with respect to a part of variables.

Досліджено питання існування розривного зворотного зв'язку, який забезпечує стабілізацію нелінійної системи керування за частиною змінних. При цьому розв'язок системи визначено за Філіпповим. Одержано необхідну умову стабілізації за частиною змінних у класі розривних керувань, яка узагальнює умову Райєна на випадок стабілізації за частиною змінних. Розглянуто приклад механічної системи, що не може бути стабілізована за частиною змінних.

1. Введение. Рассмотрим систему управления, описываемую обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{1}$$

где $x \in D \subseteq R^n$ — фазовый вектор, $u \in U \subset R^m$ — вектор управления, множество U предполагается ограниченным, содержащим точку нуль в качестве внутренней. Кроме того, предполагается $f(0,0) = 0$, что обеспечивает существование нулевого решения системы (1). Функция $f(x, u)$ является непрерывной по совокупности переменных.

Классическая задача стабилизации системы (1) состоит в построении обратной связи $u(x)$ $(u(0) = 0)$, при которой решение $x \equiv 0$ автономной системы

$$\dot{x} = f(x, u(x)) \tag{2}$$

является асимптотически устойчивым по Ляпунову.

Известно, что в случае, если $f(x, u)$ — линейная по обоим аргументам функция, система стабилизируема тогда и только тогда, когда система глобально асимптотически нуль-управляема. Аналогичной эквивалентности между свойством асимптотической нуль-управляемости и стабилизируемостью для нелинейных систем нет. Имеет место следующее необходимое условие для гладкой стабилизации [1].

Условие Брокетта. Пусть $f \in C^1$. Если система (1) является C^1-стабилизируемой (существует непрерывно дифференцируемая обратная связь $u(x)$, которая делает нулевое решение асимптотически устойчивым), то образ f содержит открытую окрестность нуля.

Например, система

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= u_1, \\
\dot{x}_2 &= u_2, \\
\dot{x}_3 &= u_2 x_1 - u_1 x_2
\end{aligned}
$$

является управляемой, но не может быть гладко стабилизирована, так как она не удовлетворяет условию Брокетта. (Для любого $\varepsilon > 0$ точка $(0, 0, \varepsilon)$ не принадлежит образу $f(x, u)$ для любых $x \in R^3$ и $u \in R^2$.)

Фактически условие Брокетта следует из того, что топологический индекс асимптотически устойчивого решения равен $(-1)^n$, где n — размерность пространства [2] (теорема 52.1).

Райен [3] показал, что необходимое условие Брокетта справедливо и для разрывных управлений при условии, что решение определяется по Филиппову [4]. В некоторых прикладных задачах теории управления естественным образом возникает необходимость рассматривать стабилизацию по части переменных. Тогда имеет место вопрос о сохранении условий Брокетта для стабилизации по части переменных. Для стабилизации по части переменных гладкой обратной связью данный вопрос решается положительно [5]. Целью данной статьи является установление необходимых условий стабилизации по части переменных нелинейных систем для разрывных управлений.

2. Определения и вспомогательные утверждения. Запишем фазовый вектор системы в виде $x = (y_1, \ldots, y_{n_1}, z_1, \ldots, z_{n_2}) = (y, z)$, $n_1 + n_2 = n$. Тогда система (1) примет вид [6]

$$
\begin{aligned}
\dot{y} &= Y(y, z, u), \\
\dot{z} &= Z(y, z, u),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

где $Y : R^{n_1} \times R^{n_2} \times R^m \to R^{n_1}$, $Z : R^{n_1} \times R^{n_2} \times R^m \to R^{n_2}$ — непрерывные функции. Предполагаем, что $Y(0, z, 0) = 0$ для всех $z \in R^{n_2}$, функции Y, Z непрерывны на множестве $D \times U$, где $D = \{x : \|y\| \le H\}$ $(H = \text{const} > 0)$. Кроме того, потребуем, чтобы решения системы (3) были z-продолжимы, т. е. для любой ограниченной измеримой функции $u(t) : [0, +\infty) \to U$ любое решение $x(t)$ системы (3) определено при всех $t \ge 0$, для которых $\|y(t)\| \le H$.

Будем использовать стандартные обозначения

$$
\|y\| = \left(\sum_{k=1}^{n_1} y_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|z\| = \left(\sum_{k=1}^{n_1} z_i^2 \right)^{1/2}, \quad \|x\| = \left(\|y\|^2 + \|z\|^2 \right)^{1/2}.
$$

Для краткости обозначим $X := R^n$. Шар радиуса $r > 0$ с центром в точке $c \in$ $\in X$ обозначим через $B_r(c)$, а если $c = 0$ — через B_r. Близость двух непустых замкнутых множеств A и B в метрическом пространстве можно охарактеризовать числами $\rho(a, b) = \|a - b\|$, $d(a, B) = \inf\limits_{b \in B} \rho(a, b)$, для любого $a \in A$ $\beta(A, B) = \sup\limits_{a \in A} d(a, B)$.

В качестве допустимых управлений рассматриваем класс K полунепрерывных сверху отображений $x \to k(x) \subset R^m$ с непустыми, выпуклыми и компактными значениями, $0 \in k(0, z)$.

При такой допустимой обратной связи $k(y,z)$ решение системы (2) определяется как решение дифференциального включения [4]

$$\begin{aligned} \dot{y} &\in Y(y,z,u), \\ \dot{z} &\in Z(y,z,u) \end{aligned} \tag{4}$$

с начальным условием $y(0) = y^0$, $z(0) = z^0$. Решением является абсолютно непрерывная функция $x(t) = (y(t), z(t))$, $x(0) = (y^0, z^0)$, удовлетворяющая дифференциальному включению (4) почти всюду.

Для любого $k \in K$ отображение $x \mapsto f(x, k(x))$ также полунепрерывно сверху с непустыми, выпуклыми и компактными значениями. Тогда для любого $x_0 \in R^n$ существует как мимимум одно решение системы (4) [4] (гл. 2, §7, теорема 1). Однако свойство единственности решения не всегда выполняется для дифференциальных включений. В связи с этим возникает необходимость определения устойчивости и притяжения для решения системы (4).

Определение 1. *Обратная связь* $k(y,z) \in K$ *называется эквиасимптотически стабилизирующей для системы* (4) *по переменным* y, *если система* (4) *эквиасимптотически* y*-устойчива, т. е.*

1) $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta(\varepsilon): \|y(0)\| \le \delta \ \Rightarrow \ \|y(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \ge 0$ *для любого максимального решения* $(y(t), z(t))$ *системы* (4);

2) $\exists \Delta > 0 \ \ \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists T(\varepsilon) > 0: \|y(0)\| < \Delta \ \Rightarrow \ \|y(t)\| < \varepsilon \ \ \forall t \ge T(\varepsilon)$ *для любого максимального решения* $(y(t), z(t))$ *системы* (4).

Определение 2. *Обратная связь* $k(y,z)$ *называется эквисжимающей для системы* (4) *по переменным* y, *если существуют* $\rho > \delta > \tau > 0$ *и* $T > 0$ *такие, что* $\|y^0\| < \delta \Rightarrow \|y(t)\| < \rho \ \ \forall t \ge 0$, $\|y(t)\| < \tau$, $t \in [T, 2T]$, *для любого максимального решения* $(y(t), z(t))$ *системы* (4).

Определение 3. *Решение задачи* (4) *называется равномерно* z*-ограниченным, если для любого компакта* $K \subset R^{n_2}$ *существует компакт* $K_1 \subset R^{n_2}$ *такой, что если* $z(0) \in K$ *и* $\|y(0)\| \le H$, *то* $z(t) \in K_1 \ \ \forall t \ge 0$.

Под задачей стабилизации системы (1) по переменным y в классе разрывных управлений будем понимать задачу нахождения обратной связи $k(y,z) \in K$, которая обеспечивает эквиасимптотическую устойчивость решения $y = 0$ системы (4) по отношению к переменным y.

3. Некоторые сведения о степени отображений. Пусть $X := R^n$, $\Omega \subset X$ — ограниченное открытое множество с замыканием $\overline{\Omega}$ и границей $\partial\Omega$,

$$M = \left\{ (f, \Omega, p) : f : \overline{\Omega} \mapsto X \text{ — непрерывное отображение, } \Omega \subset X, \ p \in X \setminus f(\partial\Omega) \right\}.$$

Тогда степень Брауэра $(\deg_B)$ является однозначным отображением $M \mapsto Z$ со следующими свойствами:

1) $\deg_B(I, \Omega, p) = 1 \ \ \forall p \in \Omega$;

2) если $\deg_B(I, \Omega, p) \ne 0$, то существует $x \in \Omega$ такое, что $p = f(x)$;

3) если $h: [0,1] \times \overline{\Omega} \mapsto X$ и $q: [0,1] \mapsto X$ непрерывны, $q(t) \notin h(t, \cdot)(\partial\Omega)$ $\forall t \in [0,1]$, то $\deg_B(h(t,\cdot), \Omega, q(t))$ не зависит от $t \in [0,1]$ (инвариантность относительно гомотопий);

4) если Ω — связное и симметричное относительно 0 множество в X и $f(-x) = -f(x) \ \ \forall x \in \partial\Omega$, то $\deg_B(f, \Omega, 0)$ является нечетной и, соответственно, не равна нулю.

Теорема 1 ([3], теорема 2). *Пусть* $F: D \mapsto X$ *— полунепрерывное сверху отображение с непустыми, выпуклыми и компактными значениями в* X. *Для* *любого* $\varepsilon > 0$ *существует локально липшицева однозначная функция* f_ε : $D \mapsto \mathrm{co}(F(D))$ *такая, что*

$$\beta(\mathrm{graph}(f_\varepsilon),\ \mathrm{graph}(F)) < \varepsilon.$$

Определим степень многозначных отображений согласно Райену [3]. Пусть $p \in X \setminus f(\partial\Omega)$. Обозначим $F^{(p)}(x) = \{v - p : v \in F(x)\}$. Для любого $\varepsilon > 0$ согласно теореме 1 можно выбрать f_ε для $F^{(p)}$, причем f_ε не имеет нулей на $\partial\Omega$. В [3] показано, что при достаточно малом ε, если f_ε и g_ε — локально липшицевы приближения, $\deg_B(f_\varepsilon, \Omega, 0) = \deg_B(g_\varepsilon, \Omega, 0)$. Степень для многозначных отображений, удовлетворяющих теореме 1, определяется следующим образом:

$$\deg(F, \Omega, p) = \lim_{\varepsilon \to 0} \deg_B(f_\varepsilon, \Omega, 0).$$

Теорема 2 ([3], теорема 3). *Пусть* $x \mapsto F(x) \subset X$ — *полунепрерывное сверху отображение на компакте* $\overline{\Omega} \subset X$ *с непустыми, выпуклыми и компактными значениями.*

1. *Если* $q : [0,1] \mapsto X \setminus F(\partial\Omega)$ *непрерывна, то* $\deg(F, \Omega, q(t))$ *не зависит от* $t \in [0,1]$.

2. *Если* $p \in X \setminus F(\partial\Omega)$ *и такое, что* $\deg(F, \Omega, p) \neq 0$, *то для некоторого* $x \in \Omega$ $p \in F(x)$.

4. Основной результат.

Теорема 3. *Пусть* $Y(y, z, u)$ *и* $Z(y, z, u)$ *непрерывны и удовлетворяют условиям*:

1) $0 \in Y(0, z, 0)$;

2) *если* $K \subset R^m$ — *выпуклое множество, то* $Y(y, z, K) \subset R^{n_1}$ *и* $Z(y, z, K) \subset R^{n_2}$ — *выпуклые множества.*

Если для системы (4) *существует эквисжимающее по переменным* y *управление с обратной связью* $k(y, z) \in K$ *и решение системы* (4) *равномерно* z-*ограничено, то образ* $Y(y, z, u)$ *содержит окрестность нуля.*

Доказательство. Предположим, что $k(y, z) \in K$ является эквисжимающей обратной связью по переменным y для системы (4). Тогда существуют $\rho > \delta > \tau > 0$ и $T > 0$ такие, что $\|y^0\| < \delta \Rightarrow \|y(t)\| < \rho \quad \forall t \geq 0$, $\|y(t)\| < \tau$, $t \in [T, 2T]$, для любого максимального решения $(y(t), z(t))$ задачи (4).

Определим многозначное отображение

$$Y' : (y, z) \mapsto \begin{cases} Y(y, z, k(y, z)), & \|y\| \leq \rho, \\ Y\left(\rho \dfrac{y}{\|y\|}, z, k\left(\rho \dfrac{y}{\|y\|}, z\right)\right), & \|y\| > \rho. \end{cases}$$

Предполагаем, что $\|z(0)\| \leq H_z$. Поскольку решение равномерно z-ограничено, то существует компакт $K_1 \subset R^{n_2}$ такой, что $z(t) \in K_1 \quad \forall t > 0$. Обозначим $D_\rho = \overline{B_\rho} \times K_1$, $D_\delta = \overline{B_\delta} \times K_1$.

Рассмотрим отображение $F : (y, z) \mapsto (Y', Z)$. Для данного отображения получим задачу

$$\dot{x} \in F(x), \qquad x(0) = x^0, \tag{5}$$

где F является полунепрерывным сверху отображением с непустыми, выпуклыми и компактными значениями, следовательно, $F(D_\rho) \equiv F(X)$ и является компактом. Из компактности $F(X)$ можно заключить, что для любого $x^0 \in X$

любое решение (5) имеет максимальный интервал существования $R^+ = [0, \infty)$. Для x^0 такого, что $\|y^0\| \le \delta$, $\|z^0\| \le H_z$, множество максимальных решений (5) является множеством максимальных решений (4). Обозначим $\Omega^0 = \{y : \|y\| \le \delta\}$.

Поскольку $k(y, z)$ — эквисжимающая обратная связь по отношению к переменным y, для любого $z \in K_1$ $0 \notin Y'(y, z)$ при $y \in \overline{\Omega^0} \setminus B_\tau$. При каждом фиксированном z выполняется соотношение $0 \notin Y'(\partial\Omega^0, z)$, поэтому можно вычислить $Y'(y, z)$ как степень отображения, зависящего только от y, на множестве Ω^0 в точке нуль. Тогда $\deg(Y', \Omega^0, 0)$ будет функцией от z.

Так как F удовлетворяет условиям теоремы 1, можно выбрать последовательность $(f_n)_{n \in N}$ локально липшицевых приближений для F таких, что

$$\beta(\mathrm{graph}(f_n), \mathrm{graph}(F)) \to 0, \qquad n \to \infty,$$

и удовлетворяющих условию $\deg(Y', \Omega^0, 0) \equiv \deg(f_n^y, \Omega^0, 0)$ $\forall n$, где f_n^y — y-составляющая функции f_n $(f_n = (f_n^y, f_n^z)^T)$.

Для простоты обозначим $I = [0, 2T]$ и $M = C(I; X)$. На D_δ определим отображение

$$\mathcal{F} : x^0 \to \left\{x \in M : \dot{x}(t) \in F(x(t)),\ x(0) = x^0\right\}.$$

Здесь $\mathcal{F} = (\mathcal{Y}, \mathcal{Z})^T$, где $\mathcal{Y} \in R^{n_1}$, $\mathcal{Z} \in R^{n_2}$ — соответственно y- и z-составляющие множества решений (5).

Для каждого n определим отображение $\theta_n : D_\delta \mapsto M$; $\theta_n(x^0)$ — единственный элемент x из M такой, что

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f_n(x(t)) \quad \forall t \in I, \\ x(0) &= x^0. \end{aligned} \tag{6}$$

Из классической теории обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что отображение $(t, x^0) \mapsto (\theta_n(x^0))(t)$ является непрерывным. Обозначим через φ_n и ψ_n y- и z-составляющие единственного решения $\theta_n(x^0) = (\varphi_n(x^0), \psi_n(x^0))^T$.

В [3] показано, что для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что

$$\beta(\mathrm{graph}(\theta_n), \mathrm{graph}(\mathcal{F})) < \varepsilon.$$

Из этого следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует n такое, что

$$\beta(\mathrm{graph}(\varphi_n), \mathrm{graph}(\mathcal{Y})) < \varepsilon.$$

Пусть $0 < \varepsilon < \delta - \tau$ и m таково, что

$$\beta(\mathrm{graph}(\varphi_m), \mathrm{graph}(\mathcal{Y})) < \varepsilon.$$

Тогда для любого $y^0 \in \overline{\Omega^0}$ существует $z^0 = \xi(y^0)$ такое, что

$$\varphi_m(y^0, \xi(y^0))(t) \in \Omega^0 \qquad \forall t \in [T, 2T]. \tag{7}$$

Определим функцию $h : [0, 1] \times \overline{\Omega^0} \mapsto Y'$ следующим образом:

$$h(s, y^0) = \begin{cases} T f_m^y(y^0, \xi(y^0)), & s = 0, \\ \frac{1}{s}\big[(\varphi_m(y^0, \xi(y^0)))(sT) - y^0\big], & 0 < s \le 1. \end{cases}$$

Данная функция непрерывна. Покажем, что $h(s, y^0) \neq 0$ для любых $(s, y^0) \in [0,1] \times \partial\Omega^0$. Предположим, что $h(0, y^0) = 0$ для некоторого $y^0 \in \partial\Omega^0$. Тогда $f_m^y(y^0, \xi(y^0)) = 0$ и, следовательно, $\varphi_m(y^0, \xi(y^0))(t) = y^0$ $\forall t \in I$, $y^0 \in \partial\Omega^0$, что противоречит (7). Предположим, что $h(s, y^0) = 0$ для некоторых $(s, y^0) \in (0,1] \times \partial\Omega^0$. Тогда $\varphi_m(y^0, \xi(y^0))(sT) = y^0$, откуда $\varphi_m(y^0, \xi(y^0)) \times (nsT) = y^0$ $\forall n \in N$, $ns \le 2$, $y^0 \in \partial\Omega^0$. Итак, существует $n \in N$ такое, что $1 \le ns \le 2$ и $\varphi_m(y^0, \xi(y^0))(nsT) = y^0 \in \partial\Omega^0$, что противоречит (7). Таким образом, установлено, что $h(s, y^0)$ является гомотопией для отображений $f_m^y(y^0, \xi(y^0))$ и $g_m(y^0) = \varphi_m(y^0, \xi(y^0))(T) - y^0$.

Рассмотрим функцию $h_1(s, y^0) = (1-s)g_m(y^0) - sy^0$. Данная функция является гомотопией для отображений $g_m(y^0)$ и $l_m(y^0) = -y^0$. Из свойств степени отображений получаем

$$\deg(Y', \Omega^0, 0) = \deg_B(f_m^y, \Omega^0, 0) = \deg_B(g_m, \Omega^0, 0) = \deg_B(l_m, \Omega^0, 0) \neq 0.$$

Таким образом, $0 \notin Y'(\partial\Omega^0)$ и $d(0, Y'(y^0, \xi(y^0))) > 0$ для любого $y \in \partial\Omega^0$. Далее, покажем, что отображение $y \mapsto d(0, Y'(y, \xi(y)))$ является полунепрерывным снизу на $\partial\Omega^0$. Пусть $y \in \partial\Omega^0$ будет произвольным и $(y_n) \subset \partial\Omega^0$ — последовательность, сходящаяся к y. Выберем подпоследовательность (y_{n_k}) такую, что

$$\lim_{k\to\infty} d(0, Y'(y_{n_k}, \xi(y_{n_k}))) = \liminf_{n\to\infty} d(0, Y'(y_n, \xi(y_n))),$$

и (q_k) такие, что $\|q_k\| = d(0, Y'(y_{n_k}, \xi(y_{n_k})))$. Из полунепрерывности сверху $Y'(y, \xi(y))$ для всех $\varepsilon > 0$ имеем $q_k \in Y'(y_{n_k}, \xi(y_{n_k})) \subset Y'(y, \xi(y)) + B_\varepsilon$ для любого достаточно большого k. Из компактности $Y'(y, \xi(y))$ следует, что (q_k) имеет сходящуюся подпоследовательность с пределом $q \in Y'(y, \xi(y))$. Отсюда

$$d(0, Y'(y, \xi(y))) = \min_{v \in Y'(y,\xi(y))} \|v\| \le$$

$$\le \|q\| = \lim_{k\to\infty} \|q_k\| = \liminf_{n\to\infty} d(0, Y'(y_n, \xi(y_n))).$$

Таким образом, $y \mapsto d(0, Y'(y, \xi(y)))$ — положительно определенное и полунепрерывное снизу отображение на компакте $\partial\Omega^0$. Поэтому существует скаляр $\mu > 0$ такой, что $p \notin Y'(\partial\Omega^0)$ $\forall p \in B_\mu$. Из теоремы 2 следует, что $\deg(Y', \Omega^0, p) = \deg(Y', \Omega^0, 0) \neq 0$ $\forall p \in B_\mu$. Итак, для любого $p \in B_\mu$ существует $y \in \Omega^0$ такое, что $y \in Y'(y, \xi(y))$. Следовательно, $p \in B_\mu$ является образом некоторой точки $(y, u) \in B_\delta \times R^m$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если обратная связь $k(y, z)$ эквистабилизирующая по отношению к переменным y, то она также эквисжимающая по отношению к пере-*

менным y. Таким образом, теорема 3 *является необходимым условием для стабилизации по части переменных нелинейных систем в классе разрывных управлений.*

***Замечание* 1.** По сравнению с работой [5] в этой теореме не требуется дифференцируемости правых частей системы (2), достаточно лишь их непрерывности. Предположение о z-продолжимости решений сохраняется, а требование y-стабилизируемости ослабляется до y-сжимаемости. Однако появляется условие 2 сохранения выпуклости по управлению, аналогичное одному из условий теоремы Райена [3]. Это условие заведомо выполняется для аффинных систем с разрывным управлением, когда правая часть доопределяется по Филиппову [4]. Таким образом, теорема 3 обобщает результаты работы [5] на случай разрывных управлений.

5. Пример. По шероховатой плоской поверхности движется трехколесная тележка. Ее положение определяется тремя обобщенными координатами: x, y — декартовы координаты точки пересечения оси симметрии тележки с осью, на которую насажены колеса, θ — угол между осью симметрии тележки и осью Ox. Тележка управляется с помощью переменных u_1, u_2 (угловые скорости вращения соответственно правого и левого колеса). Предполагаем, что кузов тележки не испытывает вертикальных перемещений. В точке (x, y) на некоторой высоте с помощью цилиндрического шарнира, ось которого параллельна оси симметрии тележки, подвесим невесомый и нерастяжимый стержень, а к его концу прикрепим массивный шарик. Обозначим угол между вертикальной осью и стержнем через α. Полученная модель является некоторым усложнением механической модели тележки, рассмотренной в работах [7, 8].

При определенном соотношении между радиусом колес и размерами тележки ее движение будет подчиняться уравнениям

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (u_1 + u_2)\cos\theta, \\ \dot{y} &= (u_1 + u_2)\sin\theta, \\ \dot{\theta} &= u_1 - u_2, \end{aligned} \tag{8}$$

которые следуют из неголономных связей для колес тележки (условия качения без проскальзывания и отсутствие бокового проскальзывания; переднее колесо может скользить по поверхности без трения).

Уравнение Лагранжа 2-го рода для переменной α (при соответствующим образом выбранной длине стержня) имеет вид

$$\ddot{\alpha} - (\dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta + \dot{\theta}\sin\alpha)\dot{\theta}\cos\alpha = -\sin\alpha. \tag{9}$$

Обозначим угловую скорость вращения стержня через $\omega = \dot{\alpha}$. Выполним в системе (8), (9) замену переменных

$$\begin{aligned} z_1 &:= \theta, \\ z_2 &:= x\cos\theta + y\sin\theta, \\ z_3 &:= x\sin\theta - y\cos\theta, \\ z_4 &:= \alpha, \\ z_5 &:= \omega, \\ v_1 &:= u_1 - u_2, \\ v_2 &:= (u_1 + u_2) - (u_1 - u_2)z_3. \end{aligned}$$

Тогда динамика системы будет описываться уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= v_1, \\ \dot{z}_2 &= v_2, \\ \dot{z}_3 &= v_1 z_2, \\ \dot{z}_4 &= z_5, \\ \dot{z}_5 &= (v_2 + v_1 z_3 + v_1 \sin z_4) v_1 \cos z_4 - \sin z_4. \end{aligned} \tag{10}$$

Условие Брокетта по переменным z_1, z_2, z_3 для системы (10) не выполняется. Следовательно, согласно теореме 3 система не может быть стабилизирована по этим переменным даже с помощью разрывного управления.

Замечание 2. Для исходной системы (8), (9) для переменных x, y, θ условие Брокетта не нарушено, но из этого нельзя сделать вывод о стабилизируемости, поскольку оно является лишь необходимым. Лишь рассмотрение системы (10) позволяет утверждать, что исходная система не имеет свойства стабилизируемости по части переменных.

1. *Brockett R. W.* Asymptotic stability and feedback stabilization // Diffferential Geometric Control Theory / R. W. Brockett, R. S. Millman, H. J. Sussman. – Boston: Birkhauser, 1983. – P. 181 – 191.
2. *Красносельский М. А., Забрейко П. П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 511 с.
3. *Ryan E. P.* On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback // SIAM J. Control and Optim. – 1994. – **32**, № 6. – P. 1597 – 1604.
4. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. – М.: Наука, 1985. – 224 с.
5. *Zuiev A. L.* On Brockett's condition for smooth stabilization with respect to a part of the variables // Proc. ECC'99. – Karlsruhe, 1999.
6. *Румянцев В. В., Озиранер А. С.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. – М.: Наука, 1987. – 253 с.
7. *Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А.* Динамика неголономных систем. – М.: Наука, 1967. – 519 с.
8. *Sontag E. D.* Stability and stabilization: discontinuities and the effect of disturbances // Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control / F. H. Clarke, R. Stern. – Dordrecht: Kluwer, 1998. – P. 551 – 598.

Получено 19.08.2005