УДК 517.54

А. К. Бахтин, А. Л. Таргонский
(Ин-т математики НАН Украины, Киев)

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ НЕНАЛЕГАЮЩИХ ОБЛАСТЕЙ СО СВОБОДНЫМИ ПОЛЮСАМИ НА ЛУЧАХ*

We obtain new results on the maximization of a product of inner radius powers for domains that are mutually disjoint. The maximization is performed with respect to some system of points in the extended complex plane.

Отримано нові результати про максимізацію добутку степенів внутрішніх радіусів областей, які попарно не перетинаються, відносно деяких систем точок у розширеній комплексній площині.

Введение. В геометрической теории функций комплексной переменной экстремальные задачи о неналегающих областях составляют активно развивающееся направление, возникновение которого связано с работой М. А. Лаврентьева [1]. В этой работе была впервые поставлена и решена задача о максимуме произведения конформных радиусов двух взаимно непересекающихся односвязных областей в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. В дальнейшем задачи такого типа рассматривались многими авторами (см., например, работы [2 – 5] и приведенную в них библиографию). В настоящей работе решены новые экстремальные задачи о неналегающих областях — с так называемыми свободными полюсами на лучах.

Перейдем к формулировке результатов. Пусть $\{B_k\}_{k=1}^{n}$ — система попарно непересекающихся областей в $\overline{\mathbb{C}}$. При каждом $k=\overline{1,n}$ только конечное число компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k$ может содержать внутри себя какую-то из областей B_j, $j=\overline{1,n}$, $j\neq k$; такие компоненты будем называть существенными. Область, полученную исключением из $\overline{\mathbb{C}}$ всех существенных компонент связности множества $\overline{\mathbb{C}}\setminus B_k$, будем обозначать $\tilde{B}_k$. Ясно, что $B_k\subset\tilde{B}_k$, $k=\overline{1,n}$, и $\{\tilde{B}_k\}_{k=1}^{n}$ — система конечносвязных взаимно непересекающихся областей без изолированных граничных точек. Эту систему областей будем называть *заполнением* системы попарно непересекающихся областей $\{B_k\}_{k=1}^{n}$.

Для области $B\subset\overline{\mathbb{C}}$ и точки $a\in B$ обозначим через $r(B,a)$ *внутренний радиус* области B относительно точки a (все определения, используемые в

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственной программы Украины № 0102И000917.

настоящей работе, приведены, например, в [5]; отметим лишь, что в отличие от [6] мы понимаем внутренний радиус относительно бесконечно удаленной точки в смысле определения, предложенного в [2]). Для борелевского множества $E \subset \overline{\mathbb{C}}$ через $\operatorname{cap} E$ мы обозначаем его *логарифмическую емкость*. Как обычно, i — мнимая единица.

Всюду ниже n — целое неотрицательное (натуральное) число, $n \geq 3$, $\chi(t) := (t + t^{-1})/2$, $t > 0$. Для набора точек $\{a_k\}_{k=1}^{n} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ такого, что $0 = \arg a_1 < \arg a_2 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, положим

$$\sigma_k := (\arg a_{k+1} - \arg a_k)/\pi, \qquad k = \overline{1, n-1}, \quad \sigma_n := (2\pi - \arg a_n)/\pi,$$

$$a_{n+1} := a_1, \qquad \mu(\{a_k\}_{k=1}^{n}) := \prod_{k=1}^{n} \chi\left(\left| a_k / a_{k+1} \right|^{(2\sigma_k)^{-1}} \right) |a_k|.$$

В принятых выше обозначениях справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. *Каковы бы ни были положительные действительные числа* α *и* μ_0, *точки* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и попарно непересекающиеся области* $B_0, B_1, \ldots$ $\ldots, B_n, B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $\arg a_k = 2\pi(k-1)/n$ *и* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $\mu(\{a_k\}_{k=1}^{n}) \leq \mu_0$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_{n+1}$, *имеет место неравенство*

$$[r(B_0, 0)\, r(B_{n+1}, \infty)]^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq [r(B_0^0, 0)\, r(B_{n+1}^0, \infty)]^{\alpha} \prod_{k=1}^{n} r(B_k^0, a_k^0), \qquad (1)$$

где точки $a_1^0, \ldots, a_n^0$ *и области* $B_0^0, B_1^0, \ldots, B_n^0, B_{n+1}^0$ *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\, dw^2 = -\frac{\alpha w^{2n} + \mu_0 (n^2 - 2\alpha) w^n + \alpha \mu_n^2}{w^2 (w^n - \mu_0)^2} dw^2 \qquad (2)$$

($a_k^0 \in B_k^0$ *при* $k = \overline{1, n}$, $0 \in B_0^0$, $\infty \in B_{n+1}^0$). *Знак равенства в* (1) *достигается тогда и только тогда, когда при всех* $k = \overline{0, n+1}$ *выполнены равенства* $\tilde{B}_k = B_k^0$ *и* $\operatorname{cap} B_k^0 \setminus B_k = 0$.

***Следствие* 1.** *Каковы бы ни были положительное действительное число* μ_0, *точки* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и попарно непересекающиеся области* $B_1, \ldots$ $\ldots, B_n \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $\arg a_k = 2\pi(k-1)/n$ *и* $a_k \in B_k$, $k = \overline{1, n}$, $\mu(\{a_k\}_{k=1}^{n}) \leq$ $\leq \mu_0$, *имеет место неравенство*

$$\prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \leq \prod_{k=1}^{n} r(B_k^0, a_k^0), \qquad (3)$$

где точки $a_1^0, \ldots, a_n^0$ *и области* $B_1^0, \ldots, B_n^0$, $a_k^0 \in B_k^0$, $k = \overline{1, n}$, *являются соответственно полюсами и круговыми областями квадратичного дифференциала*

$$Q(w)\, dw^2 = -\frac{w^{n-2}}{(w^n - \mu_0)^2} dw^2.$$

Следствие 1 получается из теоремы 1 предельным переходом при $\alpha \to 0$.

Теорема 2. *Каковы бы ни были действительные числа* $\alpha \in (0; 0{,}18]$ *и* $\mu_0 >$ > 0, *точки* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *и попарно непересекающиеся области* B_0, $B_1, \ldots, B_n, B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$ *такие, что* $0 = \arg a_1 < \ldots < \arg a_n < 2\pi$, $a_k \in B_k$,

$k = \overline{1, n}$, $\mu(\{a_k\}_{k=1}^n) \le \mu_0$, $0 \in B_0$, $\infty \in B_{n+1}$, *выполняется неравенство* (1), *где точки* $a_1^0, \ldots, a_n^0$ *и области* $B_0^0, B_1^0, \ldots, B_n^0, B_{n+1}^0$ *— те же, что и в теореме* 1.

Отметим, что в теоремах 1, 2 и в следствии 1 экстремальный набор полюсов и областей удовлетворяет условиям, накладываемым на наборы точек a_k и областей B_k. Доказательства всех сформулированных утверждений основаны на применении так называемого *кусочно-разделяющего преобразования*, предложенного в работах В. Н. Дубинина (см. [2]).

1. Доказательство теоремы 2. Пусть $\alpha \in (0; 0{,}18]$, $\mu_0 > 0$, точки $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ и попарно непересекающиеся области $B_0, B_1, \ldots, B_n, B_{n+1} \subset \overline{\mathbb{C}}$ удовлетворяют условиям теоремы 2. Обозначим $a_{n+1} := a_1$, $B_{n+1} := B_1$, $\sigma_0 := \sigma_n$, $\Delta_k := \{w \in \mathbb{C}\colon \arg a_k < \arg w < \arg a_{k+1}\}$ при $k = \overline{1, n-1}$, $\Delta_n := \{w \in \mathbb{C}\colon \arg a_n < \arg w < 2\pi\}$, и пусть $\zeta_k(w)$ — однозначная ветвь функции $-i(w \exp\{-i \arg a_k\})^{1/\sigma_k}$, отображающая область Δ_k на полуплоскость $\operatorname{Im}\zeta > 0$, $k = 1, \ldots, n$. Тогда при всех $k = 1, \ldots, n$ выполняются равенства

$$|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_k)| = \frac{1}{\sigma_k}|a_k|^{1/\sigma_k - 1}|w - a_k|(1 + o(1)), \qquad w \to a_k,$$

$$\left|\zeta_k(w) - \zeta_k(a_{k+1})\right| = \frac{1}{\sigma_k}\left|a_{k+1}\right|^{1/\sigma_k - 1}\left|w - a_{k+1}\right|(1 + o(1)), \qquad w \to a_{k+1},$$

$$|\zeta_k(w)| = |w|^{1/\sigma_k}, \qquad w \in \Delta_k.$$

Пусть $k \in \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим образ $\zeta_k(B_0 \cap \Delta_k)$ открытого множества $B_0 \cap \Delta_k$ при отображении ζ_k, объединим его с множеством, симметричным $\zeta_k(B_0 \cap \Delta_k)$ относительно мнимой оси, и возьмем содержащую начало координат O связную компоненту внутренности замыкания полученного таким образом множества. В результате получим область, содержащую точку O, которую будем обозначать через G_k^0. Последовательно заменяя в предыдущей конструкции область B_0 на B_∞, B_k, B_{k+1}, а точку O соответственно на бесконечно удаленную точку и точки $w_k^- = -i|a_k|^{1/\sigma_k}$ и $w_k^+ = i\left|a_{k+1}\right|^{1/\sigma_k}$, получаем области G_k^∞, G_k^- и G_{k+1}^+, содержащие соответственно бесконечно удаленную точку и точки w_k^- и w_k^+, $G_{n+1}^+ =: G_1^+$. Согласно теореме 1.9 [2], из приведенных выше асимптотических равенств вытекают неравенства

$$r(B_k, a_k) \le \left[\frac{r(G_k^-, w_k^-)}{\dfrac{1}{\sigma_k}|a_k|^{1/\sigma_k - 1}} \, \frac{r(G_{k-1}^+, w_{k-1}^+)}{\dfrac{1}{\sigma_{k-1}}|a_k|^{1/\sigma_{k-1} - 1}}\right]^{1/2}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

$$r(B_0, 0) < \prod_{k=1}^n \left[r(G_k^0, 0)\right]^{\sigma_k^2/2}, \qquad r(B_\infty, \infty) \le \prod_{k=1}^n \left[r(G_k^\infty, \infty)\right]^{\sigma_k^2/2},$$

откуда, выполняя очевидные преобразования, получаем цепочку соотношений

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\alpha \prod_{k=1}^n r(B_k, a_k) \le$$

$$\leq \prod_{k=1}^{n}\left\{\sigma_k\left[r(G_k^0,0)\,r(G_k^\infty,\infty)\right]^{\alpha\sigma_k^2/2}\left(\frac{r(G_k^-,w_k^-)\,r(G_k^+,w_k^+)}{(|a_k||a_{k+1}|)^{1/\sigma_k-1}}\right)^{1/2}\right\} =$$

$$= 2^n\prod_{k=1}^{n}\left\{\sigma_k\chi\left(\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|^{1/(2\sigma_k)}\right)|a_k|\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left[r(G_k^0,0)\,r(G_k^\infty,\infty)\right]^{\alpha\sigma_k^2}\frac{r(G_k^-,w_k^-)\,r(G_k^+,w_k^+)}{\left(|a_k|^{1/\sigma_k}+|a_{k+1}|^{1/\sigma_k}\right)^2}\right)^{1/2}\right\} =$$

$$= 2^n\mu_0\left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\prod_{k=1}^{n}\left(\left[r(G_k^0,0)\,r(G_k^\infty,\infty)\right]^{\alpha\sigma_k^2}\frac{r(G_k^-,w_k^-)\,r(G_k^+,w_k^+)}{\left|w_k^+-w_k^-\right|^2}\right)^{1/2}. \tag{4}$$

Определим функцию $\Psi(\tau)$, $\tau>0$, равенством

$$\Psi(\tau) := \left(r(B_0^\tau,0)r(B_\infty^\tau,\infty)\right)^{\tau^2}\frac{r(B_i^\tau,i)\,r(B_{-i}^\tau,-i)}{4},$$

где B_0^τ, B_i^τ, B_{-i}^τ, B_∞^τ — круговые области квадратичного дифференциала

$$Q(w)\,dw^2 = -\frac{\tau^2w^4+2(\tau^2-2)w^2+\tau^2}{w^2(w^2+1)^2}dw^2,$$

содержащие соответственно точки 0, i, $-i$ и ∞. В [3] (доказательство теоремы 6) показано, что при всех $\tau\in(0,1)$ имеет место равенство $\Psi(\tau) = \tau^{2\tau^2}(1-\tau)^{-(1-\tau)^2}(1+\tau)^{-(1+\tau)^2}$. Отсюда непосредственным вычислением получаем, что вторая производная функции $\ln[\tau^2\Psi(\tau)]$ равна $-2\tau^{-2}+\ln\dfrac{\tau^2}{1-\tau^2}$ и (вследствие ее возрастания) имеет единственный корень на $(0,1)$, принадлежащий интервалу $(0{,}85;\,0{,}9)$. Поэтому функция $\ln[\tau^2\Psi(\tau)]$ выпукла вверх на промежутке $(0;\,0{,}85]$. С другой стороны, согласно теореме 1 из работы [4], выполняются неравенства

$$\left[r(G_k^0,0)\,r(G_k^\infty,\infty)\right]^{\alpha\sigma_k^2}\frac{r(G_k^-,w_k^-)\,r(G_k^+,w_k^+)}{\left|w_k^+-w_k^-\right|^2} \leq \Psi(\sigma_k\sqrt{\alpha}), \qquad k=\overline{1,n}, \tag{5}$$

подставляя которые в (4) и используя то, что $\sigma_k\sqrt{\alpha}\leq 2\sqrt{0{,}18}<0{,}85$ при $\alpha\leq 0{,}18$ и неравенство Йенсена для функции $\ln[\tau^2\Psi(\tau)]$, получаем

$$[r(B_0,0)\,r(B_\infty,\infty)]^\alpha\prod_{k=1}^{n}r(B_k,a_k) \leq 2^n\mu_0\left(\prod_{k=1}^{n}\sigma_k\right)\left(\prod_{k=1}^{n}\Psi(\sigma_k\sqrt{\alpha})\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq 2^n\mu_0\alpha^{-n/2}\left(\prod_{k=1}^{n}(\sigma_k\sqrt{\alpha})^2\Psi(\sigma_k\sqrt{\alpha})\right)^{1/2} \leq$$

$$\leq\ 2^n \mu_0 \alpha^{-n/2} \left(\prod_{k=1}^{n} (2n^{-1}\sqrt{\alpha})^2 \Psi(\sigma_k \sqrt{\alpha}) \right)^{1/2} \ \leq\ \left(\frac{4}{n}\right)^n \mu_0 \left(\Psi(2n^{-1}\sqrt{\alpha})\right)^{n/2}.$$

Пусть $B_0 = B_0^0$, $B_{n+1} = B_{n+1}^0$ и при всех $k = 1, \ldots, n$ справедливы равенства $a_k = a_k^0$ и $B_k = B_k^0$, где точки $a_1^0, \ldots, a_n^0$ и области $B_0^0, B_1^0, \ldots, B_n^0, B_{n+1}^0$ определены в формулировке теоремы 1. Тогда во всех приведенных выше цепочках соотношений неравенства превращаются в равенства, что и завершает доказательство теоремы 2.

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство этой теоремы в значительной степени повторяет доказательство теоремы 2. Именно, при выполнении условий теоремы 1 $\sigma_k = 2/n$ для всех $k = 1, \ldots, n$, а в неравенствах (5)

$$\Psi(\sigma_k \sqrt{\alpha}) = \Psi(2n^{-1}\sqrt{\alpha}), \quad k = \overline{1, n}.$$

Подставляя эти равенства в (4), имеем

$$[r(B_0, 0)\, r(B_\infty, \infty)]^\alpha \prod_{k=1}^{n} r(B_k, a_k) \ \leq\ \left(\frac{4}{n}\right)^n \mu_0 \left(\Psi(2n^{-1}\sqrt{\alpha})\right)^{n/2}.$$

Утверждение о знаке равенства в теореме 2 проверяется так же, как и в [5] (доказательство теоремы 2).

Теорема доказана.

1. *Лаврентьев М. А.* К теории конформных отображений // Тр. Физ.-мат. ин-та АН СССР. – 1934. – **5**. – С. 159 – 245.
2. *Дубинин В. Н.* Метод симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного // Успехи мат. наук. – 1994. – **49**, № 1 (295). – С. 3 – 76.
3. *Дубинин В. Н.* Разделяющее преобразование областей и задачи об экстремальном разбиении // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1988. – **168**. – С. 48 – 66.
4. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Допов. НАН України. – 2004. – № 8. – С. 7 – 15.
5. *Бахтин А. К.* Экстремальные задачи о неналегающих областях со свободными полюсами на окружности // Укр. мат. журн. – 2006. – **58**, № 7. – С. 867 – 886.
6. *Хейман В. К.* Многолистные функции. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 180 с.

Получено 09.12.2003,
после доработки — 06.06.2005