УДК 514.7

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

ПОЛЯ ЯКОБИ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

Some properties of Jacobi fields on a manifold of nonpositive curvature are considered. As a result, formulas for derivatives of one class of functions on the manifold are proved.

Розглянуто ряд властивостей полів Якобі на многовиді недодатної кривини. Як наслідок, встановлено формули для похідних одного класу функцій на многовиді.

Пусть M — полное односвязное риманово многообразие неположительной кривизны, $\dim M = n$; $\gamma(s)$ — геодезическая, $\gamma(0) = y$, $\gamma\big(\rho(x, y)\big) = x$, $Z(s)$ — поле Якоби вдоль γ, т. е. решение уравнения Якоби

$$Z''(s) \equiv \nabla^2_{\dot\gamma(s)} Z(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))\dot\gamma(s). \tag{1}$$

Наиболее известные приложения полей Якоби связаны с условиями экстремума интегрального функционала; они изложены в ряде классических монографий (например, [1, 2]). В работах последних 15 лет, посвященных полям Якоби, рассматриваются их свойства на многообразиях специальной структуры; в свою очередь, эта структура порождена некоторой физической моделью (см., например, [3 – 5]).

Продемонстрируем одно из приложений полей Якоби, по-видимому, впервые предложенное в [6]. Пусть

$$u(x) = \int\limits_0^{\rho(x,y)} f(\gamma(s))\,ds, \qquad T_xM \ni V \perp \dot\gamma(\rho).$$

Тогда

$$\big(\operatorname{grad} u(x), V\big) = \int\limits_0^{\rho} (\operatorname{grad} f(\gamma(s)), Z(s))\,ds,$$

где Z — поле Якоби, $Z(0) = 0$, $Z(\rho) = V$.

Выражение для второй производной

$$\big(\nabla_H \operatorname{grad} u(x), V\big) = \int\limits_0^{\rho} \Big[\big(\nabla_{X(s)} \operatorname{grad} f(\gamma(s)), Z(s)\big) + \big(\operatorname{grad} f(\gamma(s)), \nabla_X Z(s)\big)\Big]ds,$$

$X(0) = 0$, $X(\rho) = H \perp \dot\gamma(\rho)$, содержит производную $\nabla_X Z(s)$ поля Якоби, в направлении, ортогональном к геодезической.

В настоящей работе устанавливаются формулы дифференцирования полей Якоби. Упомянутые формулы применяются для вычисления градиента и лапласиана функций, используемых в теории параболических уравнений на многообразии.

1. Предварительные сведения. Пусть X, Z — ортогональные к $\dot\gamma$ поля Якоби, $X(0) = Z(0) = 0$, $\varphi(s, \varepsilon)$ — вариация геодезической γ, порождающая поле $X(s)$. Определим поля $X_\varepsilon(s)$ и $Z_\varepsilon(s)$ вдоль φ как решения уравнений Якоби с некоторыми краевыми условиями при $s = 0$ и $s = \rho$. Краевое условие в точке y имеет вид $X_\varepsilon(0) = Z_\varepsilon(0) = 0$ (т. е. $\varphi(0, \varepsilon) = y$). Второе краевое условие (для Z_ε) определим следующим образом. Обозначим $\sigma_\rho(\varepsilon) = \varphi(\rho, \varepsilon)$, $\Psi_\rho(\varepsilon)$ — оператор параллельного переноса вдоль σ_ρ. Тогда поле $Z_\varepsilon(s)$ вдоль $\sigma_\rho(\varepsilon)$ вводится равенством (параллельный перенос и ортогонализация)

$$Z_\varepsilon(\rho) = \frac{\Psi_\rho(\varepsilon)Z(\rho) - \big(\Psi_\rho(\varepsilon)Z(\rho), \dot\varphi(\rho,\varepsilon)\big)\dot\varphi(\rho,\varepsilon)}{\big\|\Psi_\rho(\varepsilon)Z(\rho) - \big(\Psi_\rho(\varepsilon)Z(\rho), \dot\varphi(\rho,\varepsilon)\big)\dot\varphi(\rho,\varepsilon)\big\|}\|Z(\rho)\|. \tag{2}$$

Аналогично определяются значения $X_\varepsilon(\rho)$. Заметим, что из равенств

$$\big(Z_\varepsilon(0), \dot\varphi(0,\varepsilon)\big) = \big(Z_\varepsilon(\rho), \dot\varphi(\rho,\varepsilon)\big) = 0$$

следует ортогональность $X_\varepsilon(s)$ и $Z_\varepsilon(s)$ к $\dot\varphi(s,\varepsilon)$ для всех s.

Ковариантная производная $\nabla_X Z(s)$ определяется как решение краевой задачи для уравнения

$$\big(\nabla^2_{\dot\gamma}\nabla_X Z\big)(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \nabla_X Z(s))\dot\gamma(s) + F\big(s, X(s), Z(s)\big), \tag{3}$$

полученного дифференцированием (1) вдоль $X(s)$, $\nabla_X Z(0) = 0$, а векторное поле

$$F\big(s, X(s), Z(s)\big) = F\big(s, Z(s), X(s)\big) =$$

$$= 2R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s))Z'(s) + 2R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))X'(s) +$$

$$+ \big(\nabla_{\dot\gamma} R\big)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s))Z(s) + (\nabla_X R)(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))\dot\gamma(s).$$

Второе краевое условие для $\nabla_X Z(\rho)$ получается дифференцированием равенства (2) вдоль $X(\rho)$:

$$\nabla_X Z(\rho) = -(Z(\rho), X'(\rho))\dot\gamma(\rho). \tag{4}$$

В работах [6, 7] получено решение краевой задачи (3), (4) в виде

$$\nabla_X Z(s) = -(Z(s), X'(s))\dot\gamma(s) + H(s), \qquad H(s) \perp \dot\gamma(s), \tag{5}$$

где векторное поле $H(s)$ удовлетворяет оценке

$$\big\|H(s)\big\| \le (\rho - s)\int_0^\rho \|F(\tau, X(\tau), Z(\tau))\|d\tau,$$

и определены базисные поля Якоби

$$Z_1(s) = \frac{s}{\rho}\dot\gamma(s), \qquad Z_k(s) \perp \dot\gamma(s), \qquad k \ge 2, \qquad Z_k(0) = 0,$$

как решения уравнения (1), образующие в T_xM полугеодезический ортобазис. При этом в силу выпуклости $\big\|Z_k(s)\big\| \le \dfrac{s}{\rho}$.

Приведенные результаты позволяют получить явное выражение для ковариантной производной векторного поля вдоль γ, заданного в базисе $\{Z_k(\rho)\}$.

Утверждение 1. *Пусть*

$$V(x) = v^k(x)Z_k(\rho), \qquad v^k \in C^1(M).$$

Тогда

$$\nabla_H V(x) = \sum_{k=1}^n \big(\operatorname{grad} v^k(x), H\big)Z_k(\rho) - (V(x), \nabla_H\dot\gamma(\rho))\dot\gamma(\rho) +$$

$$+ \sum_{k=2}^n ((V(x), \dot\gamma(\rho))(H, Z_k'(\rho)) - (V(x), Z_k'(\rho))(H, \dot\gamma(\rho)))Z_k(\rho).$$

Доказательство. Имеем

$$\nabla_H V(x) = \sum_{k=1}^{n} (\nabla_H V(x), Z_k(\rho)) Z_k(\rho) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{grad} v^k(x), H\right) Z_k(\rho) - \sum_{k=1}^{n} (V(x), \nabla_H Z_k(\rho)) Z_k(\rho).$$

Тогда нужный результат следует из представления

$$H = (H, \dot\gamma(\rho))\dot\gamma(\rho) + X, \qquad X \perp \dot\gamma(\rho),$$

и формулы (4).

***Следствие* 1.** *Справедливо представление*

$$\operatorname{div} V(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\operatorname{grad} v^k(x), Z_k(\rho)\right) + v^1(x)\left(Z_k'(\rho), Z_k(\rho)\right).$$

2. Производные полей Якоби. Всюду ниже предполагается неположительность секционной кривизны многообразия, т. е. выполнение условия

$$((R(x)U, V)U, V) \geq 0, \qquad U, V \in T_x M,$$

на тензор кривизны $R(x)$.

Определим тензор Риччы и скалярную кривизну равенствами

$$\operatorname{Ric}(x)(U, V) = \sum_{k=1}^{n} \left(R(x)(U, e_k)V, e_k\right), \qquad r(x) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ric}(x)(e_k, e_k),$$

где $\{e_k\}$ — ортобазис в $T_x M$.

Рассмотрим линейный оператор R в $T_x M$:

$$RY = R(x)(X, Y)Z$$

(X, Z — фиксированы). Тогда $R^* Y = R(x)(Z, Y)X$ и $R = R^*$, если $X = Z$.

Лемма 1. *Если* $\operatorname{Ric}(x)(X, X) = 0$, *то* $R(X, Y)X = 0$ *и* $R(Y, X)Y = 0$ *для всех* Y.

Доказательство следует из оценки следовой нормы положительного оператора R:

$$\sigma_1(R) = \sup_{\{e_k\}} \sum_{k=1}^{n} \left(R(x)(X, e_k)X, e_k\right) = \operatorname{Ric}(x)(X, X)$$

и неравенства

$$|R(x)(Y, X)Y, V| \leq \sqrt{(R(x)(Y, X)Y, X)(R(x)(Y, V)Y, V)}$$

для произвольного $V \in T_x M$.

В свою очередь, квадратичная форма

$$\varphi(Y, Y) = (R(x)(X, Y)X, Y) \leq \sigma_1(R)\|Y\|^2 = 0.$$

Теорема 1. *Если хотя бы одна из величин* $\operatorname{Ric}(x)(X, X)$, $\operatorname{Ric}(x)(Y, Y)$ *или* $\operatorname{Ric}(x)(Z, Z)$ *равна нулю, то* $R(x)(X, Y)Z = 0$.

Доказательство. В правой части тождества

$$3R(x)(X, Y)Z = -R(x)(Y + Z, X)(Y + Z) + R(x)(Y, X)Y +$$

$$+ R(x)(Z, X)Z + R(x)(X + Z, Y)(X + Z) - R(x)(X, Y)X - R(x)(Z, Y)Z$$

при условии $\operatorname{Ric}(x)(X, X) = 0$ остается два слагаемых:

$$3R(x)(X, Y)Z = R(x)(X+Z, Y)(X+Z) - R(x)(Z, Y)Z. \tag{6}$$

С другой стороны, вычисление следовой нормы симметричного оператора $R + R^*$ приводит к неравенству

$$\sigma_1(R+R^*) = \sup_{\{e_k\}} \sum_{k=1}^{n} \left|\left(R(x)(X, e_k)Z + R(Z, e_k)X, e_k\right)\right| =$$

$$= 2\sup_{\{e_k\}} \sum_{k=1}^{n} \left|\left(R(x)(X, e_k)Z, e_k\right)\right| \leq 2\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(X, X)\operatorname{Ric}(x)(Z, Z)}, \tag{7}$$

т. е. $R + R^* = 0$.

Преобразуя (6) к виду $2RY - R^*Y = 0$ и складывая с (7), получаем $RY = 0$ для всех Y.

Такое же утверждение следует из условия $\operatorname{Ric}(x)(Y, Y) = 0$ в силу свойств тензора R.

Если же $\operatorname{Ric}(x)(Z, Z) = 0$, то из неравенства (7) вытекает

$$R^*Y = R(x)(Z, Y)X = -R(x)(X, Y)Z,$$

и утверждение теоремы следует из исходного тождества при перестановке X и Z.

***Следствие* 2.** *Априорная оценка*

$$\| R(x)(X, Y)Z \| \leq c(x)\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(X, X)\operatorname{Ric}(x)(Y, Y)\operatorname{Ric}(x)(Z, Z)}$$

является непротиворечивой.

Из соображений размерности следует

$$c(x) = \frac{c}{\sqrt{r(x)}}.$$

Пусть $\varphi(s, \varepsilon)$ — вариация геодезической γ, порождающая поле Якоби $X(s)$, $\varphi(0, \varepsilon) = y$, $\Phi_\varepsilon(s, s_0)$ — оператор параллельного переноса вдоль φ, $\Phi_0 = \Phi$, $\sigma_s(\varepsilon)$ и $\Psi_s(\varepsilon)$ — кривая и оператор, определенные выше, V — дифференцируемое векторное поле на M.

Лемма 2. *Имеют место следующие соотношения*:

$$\nabla_{X(s)}\Phi_\varepsilon(s, s_0)V(\gamma(s_0)) = \Phi_\varepsilon(s, s_0)\nabla_{X(s_0)}V(\gamma(s_0)) +$$

$$+ \int_{s_0}^{s} \Phi(s, \tau)R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\Phi(\tau, s_0)V(\gamma(s_0))\,d\tau,$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\dot\varphi(0, \varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \left(\nabla_{\dot\gamma} X\right)(0) \equiv X'(0),$$

$$\frac{d}{d\varepsilon}\left(\nabla_{\dot\varphi} X_\varepsilon\right)(0) = \nabla_{\dot\gamma}\nabla_X X(0).$$

Второе и третье соотношения леммы означают коммутируемость операций дифференцирования в продольном и ортогональном направлениях даже в точке $\gamma(0)$, где $\dot\gamma$ и X не являются полями $\left(\frac{\nabla}{\partial\varepsilon}\frac{\partial}{\partial s} = \frac{\nabla}{\partial s}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\right.$ в обозначениях [1, с. 148]$\Big)$.

Доказательство. 1. Векторное поле

$$U(s) = \nabla_{X(s)} \Phi(s, s_0) V(\gamma(s_0)), \qquad U(s_0) = \nabla_{X(s_0)} V(\gamma(s_0))$$

в силу коммутируемости $\dot\gamma(s)$ и $X(s)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla_{\dot\gamma(s)} U(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s)) \Phi(s, s_0) V(\gamma(s_0)),$$

интегрируя которое, получаем первое соотношение леммы.

2. Далее,

$$\frac{d}{d\varepsilon}\dot\varphi(0,\varepsilon)\Big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Phi_\varepsilon(0,s)\dot\varphi(s,\varepsilon) - \Phi(0,s)\dot\gamma(s)}{\varepsilon} =$$

$$= \Phi(0,s)\left(\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Psi_s^{-1}(\varepsilon)\dot\varphi(s,\varepsilon) - \dot\gamma(s)}{\varepsilon} - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Psi_s^{-1}(\varepsilon)\Phi_\varepsilon(s,0) - \Phi(s,0)}{\varepsilon}\dot\varphi(0,\varepsilon)\right) =$$

$$= \Phi(0,s)\left(\nabla_{X(s)}\dot\gamma(s) - \left(\nabla_{X(s)}\Phi(s,0)\right)\dot\gamma(0)\right) =$$

$$= \Phi(0,s)\left(Z'(s) - \int_0^s \Phi(s,\tau) R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\dot\gamma(\tau)\,d\tau\right) = X'(0).$$

Последнее равенство является следствием проинтегрированного уравнения Якоби (1).

3. Обозначим искомый вектор $\frac{d}{d\varepsilon}\left(\nabla_{\dot\varphi} X_\varepsilon\right)(0) = Y \in T_x M.$ Интегрируя уравнения Якоби для X и X_ε вдоль $\gamma(s)$ и $\varphi(s,\varepsilon)$ соответственно, получаем равенства

$$\nabla_{\dot\varphi} X_\varepsilon(\rho) = \Phi_\varepsilon(\rho,0)\nabla_{\dot\varphi} X_\varepsilon(0) + \int_0^\rho \Phi_\varepsilon(\rho,\tau) R(\varphi(\tau,\varepsilon))(\dot\varphi(\tau,\varepsilon), X_\varepsilon(\tau))\dot\varphi(\tau,\varepsilon)\,d\tau,$$

$$\nabla_{\dot\gamma} X(\rho) = \Phi(\rho,0)\nabla_{\dot\gamma} X(0) + \int_0^\rho \Phi_\varepsilon(\rho,\tau) R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\dot\gamma(\tau)\,d\tau.$$

Применяя к первому равенству $\Psi_\rho^{-1}(\varepsilon)$ и вычитая второе, имеем (используя первое соотношение леммы)

$$\nabla_X \nabla_{\dot\gamma} X(\rho) = \Phi(\rho,0)Y + \int_0^\rho \Phi(\rho,\tau) R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\Phi(\tau,0)X'(0)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^\rho\left(\int_\tau^\rho \Phi(\rho,s) R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s))\Phi(s,\tau) R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\dot\gamma(\tau)\,ds\ +\right.$$

$$\left. + \Phi(\rho,\tau)\nabla_{X(\tau)}\left(R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\dot\gamma(\tau)\right)\right)d\tau. \tag{8}$$

Из уравнения (3) (при $X = Z$) и вида функции F следует равенство

$$\int_0^\rho \Phi(\rho,\tau)\nabla_{X(\tau)}\left(R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\dot\gamma(\tau)\right)d\tau =$$

$$= \nabla_{\dot\gamma}\nabla_X X(\rho) - \Phi(\rho,0)\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X X(0) - R(x)(\dot\gamma(\rho), X(\rho))X(\rho) -$$

$$- \int_0^\rho \Phi(\rho,\tau) R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))X'(\tau)\,d\tau,$$

приводящее (8) после изменения порядка интегрирования к виду

$$\Phi(\rho,0)\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X X(0) = \Phi(\rho,0)Y +$$

$$+ \int_0^\rho \Phi(\rho,\tau)R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))(\Phi(\tau,0)X'(0) - X'(\tau))d\tau +$$

$$+ \int_0^\rho \Phi(\rho,s)R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s))\int_0^s \Phi(s,\tau)R(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), X(\tau))\dot\gamma(\tau)d\tau ds,$$

после чего нужный результат является следствием проинтегрированного уравнения (1).

Третье соотношение леммы 2 требует вычисления второй производной $\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X X(0)$. Найдем явное выражение для векторного поля $\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X X(s)$ при $s=0$ и $s=\rho$.

Лемма 3. *Пусть* $X(s)$, $Z(s)$ — *ортогональные к* $\dot\gamma(s)$ *поля Якоби,* $X(0) = Z(0) = 0$. *Если* $Z_\varepsilon(\rho)$ *определено равенством* (2), *то*

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X Z(\rho) = -[(X'(\rho), Z'(\rho)) + (R(x)(\dot\gamma(\rho), X(\rho))\dot\gamma(\rho), Z(\rho))]\dot\gamma(\rho) +$$

$$+ \sum_{k=2}^n \int_0^\rho (F(\tau, X(\tau), Z(\tau)), U_k(\tau))d\tau U_k(\rho),$$

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X Z(0) = -(X'(0), Z'(0))\dot\gamma(0) -$$

$$- \sum_{k=2}^n \int_0^\rho (F(\tau, X(\tau), Z(\tau)), V_k(\tau))d\tau V_k(0),$$

где $U_k(s)$, $V_k(s)$ — *поля Якоби вдоль* γ, $U_k(0) = 0$, $V_k(\rho) = 0$, $\{U_k(\rho)\}$ *и* $\{V_k(0)\}$ *вместе с* $\dot\gamma(\rho)$ *и* $\dot\gamma(0)$ *образуют ортобазисы в* T_xM *и* T_yM *соответственно.*

Доказательство. Дифференцируя (5) вдоль γ, получаем

$$\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X Z(s) = -[(X'(s), Z'(s)) + (R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), Z(s))\dot\gamma(s), X(s))]\dot\gamma(s) + H'(s).$$

Векторное поле $H(s)$ удовлетворяет краевой задаче

$$H''(s) = R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), H(s))\dot\gamma(s) + F^\perp(s), \quad H(0) = 0, \quad H(\rho) = 0, \tag{9}$$

где

$$F^\perp(s) = F(s, X(s), Z(s)) - (F(s, X(s), Z(s)), \dot\gamma(s))\dot\gamma(s).$$

Найдем разложение $H(\rho)$ и $H(0)$ по указанным в условии леммы ортобазисам. Пусть $Y(s)$ — поле Якоби, $Y(s) \perp \dot\gamma(s)$. Из (9) и уравнения Якоби для $Y(s)$ следует равенство

$$\frac{d}{ds}[(H'(s), Y(s)) - (H(s), Y'(s))] = (F^\perp(s), Y(s)),$$

интегрируя которое и выбирая Y равным U_k или V_k, получаем утверждение леммы.

Далее будем предполагать, что тензор кривизны многообразия удовлетворяет следующим условиям:

1) $\left\| R(x)(X,\ Y)Z \right\| \le c(x)\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(X,X)\operatorname{Ric}(x)(Y,Y)\operatorname{Ric}(x)(Z,Z)}$ для всех $x \in M$, $X, Y, Z \in T_xM$;

2) кривизна достаточно быстро убывает на бесконечности, т. е. вдоль любой геодезической

$$\int_0^\infty s\operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))\,ds < C;$$

3) $\left\| \left(\nabla_{U(x)} R(x)\right)(X(x), Y(x))Z(x) \right\| \le f(x)\| U(x)\| \| X(x)\| \| Y(x)\| \| Z(x)\|$ для всех $x \in M$, векторных полей U, X, Y, Z, где функция f такова, что вдоль любой геодезической γ

$$\int_0^\infty f(\gamma(s))\,ds < c.$$

Заметим, что из условия 1 для $c(x) = \dfrac{c}{\sqrt{r(x)}}$ следует оценка

$$\left| R(x)(X,\ Y)Z,\ U \right| < \frac{c}{\sqrt{r(x)}}\sqrt{\operatorname{Ric}(x)(X,X)\operatorname{Ric}(x)(Z,Z)}\left\| A^{1/4}(x)Y \right\| \left\| A^{1/4}(x)U \right\|,$$

$$A(x)Y = \sum_{k=1}^n R(x)(e_k, Y)e_k,$$

$$\sigma_1(A(x)) = \sigma_2^2\left(A^{1/2}(x)\right) = r(x),$$

где σ_1, σ_2 — соответственно следовая и Гильберта – Шмидта операторные нормы.

Следствием последней оценки является неравенство

$$\sum_{j,k=1}^n \left(R(x)(X, e_k)Z, \varphi_j\right)^2 < c\operatorname{Ric}(x)(X,X)\operatorname{Ric}(x)(Z,Z)$$

для любых ортобазисов $\{e_k\}$, $\{\varphi_j\}$ в T_xM.

Как показано в [6, 7], из условий 1 и 2 следует неравенство

$$\| Z'(s)\| \le \frac{c}{\rho}\| Z(\rho)\|, \qquad c = 1 + \int_0^\rho \tau\operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))\,d\tau.$$

Утверждение 2. *При выполнении условий* 1 – 3 *ортогональные к* $\dot\gamma$ *составляющие векторов, определенные в лемме* 3, *удовлетворяют оценкам* $\left\| \left(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X Z\right)^{\perp}(s) \right\| \le c\| X(\rho)\| \| Z(\rho)\|$, $s = 0$ *или* $s = \rho$.

Докажем неравенство при $s = \rho$. Поскольку

$$\operatorname{Ric}(x)(Y,Y) < c\| Y\|^2,$$

то

$$\left\| \left(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_X Z\right)^{\perp}(\rho) \right\|^2 = \sum_{k=2}^n \left(\int_0^\rho \left(F(\tau, X(\tau), Z(\tau)), U_k(\tau)\right) d\tau \right)^2 <$$

$$< c\| X(\rho)\|^2 \| Z(\rho)\|^2 \left[\frac{1}{\rho}\int_0^\rho \operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s),\dot\gamma(s))\,ds + \left(\int_0^\rho f(\gamma(s))\,ds \right)^2 \right],$$

откуда и следует утверждение.

Определим вдоль геодезической γ, $\gamma(0)=y$, линейный оператор $D(\gamma(s))$ в пространстве $T_{\gamma(s)}M$ равенством

$$D(\gamma(s))U = \nabla_U s\dot\gamma(s).$$

Если $x=\gamma(\rho)$, то $D(x)\dot\gamma(\rho)=\dot\gamma(\rho)$; для $U\perp\dot\gamma(\rho)$ $D(x)U=\rho X'(\rho)$, где X — поле Якоби, $X(0)=0$, $X(\rho)=U$.

Пусть $Y(s)$ — поле Якоби, $Y(0)=0$, $Y(\rho)=V$. Тогда

$$(D(x)U,V) = \rho(X'(\rho),Y(\rho)) = \rho(X(\rho),Y'(\rho)) = (D(x)V,U),$$

т. е. D симметричен. Положительность и оценки D доказаны в [7]:

$$D(x) \ge I, \qquad \|D(\gamma(s))\| \le 1 + \int_0^s \tau\,\mathrm{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))\,d\tau,$$

$$a(x,y) = \mathrm{tr}(D(x)-I) \le \int_0^\rho \tau\,\mathrm{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau),\dot\gamma(\tau))\,d\tau.$$

Лемма 4. *Ковариантная производная оператора D удовлетворяет оценке*

$$\|(\nabla_U D(\rho))V\| < c\|U\|\|V\|.$$

Доказательство. Исходя из тождеств

$$(\nabla_U D(\rho))V = \nabla_U(D(\rho)V) - D(\rho)\nabla_U V = \nabla_U\nabla_V\rho\dot\gamma - \nabla_{\nabla_U V}\rho\dot\gamma$$

получаем

$$\left(\nabla_{\dot\gamma} D\right)(x)V =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } V=\dot\gamma(\rho), \\ X'(\rho)+\rho R(x)(\dot\gamma(\rho),X(\rho))\dot\gamma(\rho) - D(x)X'(\rho), & \text{если } V\perp\dot\gamma(\rho), \\ & X(\rho)=V, \qquad X(0)=0. \end{cases}$$

Для $Y\perp\dot\gamma(\rho)$

$$\left(\nabla_{Y(\rho)} D\right)(x)V =$$

$$= \begin{cases} Y'(\rho)-D(x)Y'(\rho), & \text{если } V=\dot\gamma(\rho), \\ \rho\nabla_{\dot\gamma(\rho)}\nabla_{Y(\rho)}X(\rho)+\rho R(x)(Y(\rho),\dot\gamma(\rho))X(\rho) + & \\ \quad + (X'(\rho),Y(\rho))\dot\gamma(\rho), & \text{если } V\perp\dot\gamma(\rho). \end{cases}$$

С другой стороны,

$$D(x)X'(\rho) = X'(\rho) + \frac{1}{\rho}D(x)(\rho X'(\rho)-X(\rho)), \tag{10}$$

и так как

$$\rho X'(\rho) - X(\rho) = \int_0^\rho s\Phi(\rho,s)R(\gamma(s))(\dot\gamma(s),X(s))\dot\gamma(s)\,ds,$$

в силу ограниченности D второе слагаемое в (10) оценивается величиной

$$c\int_0^\rho \frac{s}{\rho}\|R(\gamma(s))(\dot\gamma(s), X(s))\dot\gamma(s)\|ds \;<\; c\|X(\rho)\|\int_0^\rho \mathrm{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))ds.$$

Ограниченность последнего интервала означает, что $\left(\nabla_{\dot\gamma} D\right)(x)X(\rho)$ и $(\nabla_Y D)(x)\dot\gamma(\rho)$ удовлетворяют требуемой оценке.

Что касается выражения $(\nabla_Y D)(x)X(\rho)$, то в силу леммы 3

$$(\nabla_Y D)(x)X(\rho) = -(\rho Y'(\rho) - Y(\rho), X'(\rho))\dot\gamma(\rho) +$$

$$+\ \rho[R(x)(Y(\rho), \dot\gamma(\rho))X(\rho) - (R(x)(\dot\gamma(\rho), Y(\rho))\dot\gamma(\rho), X(\rho))\dot\gamma(\rho)] + \left(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_Y X\right)^{\perp}(\rho),$$

и ссылка на утверждение 2 завершает доказательство леммы.

Приложения. Проиллюстрируем применение установленных выше свойств для вычисления производных функции

$$u(x, y) = \rho^2\left(B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)\right), \qquad \rho = \rho(x, y),$$

где $B(x)$ — гладкое поле операторов, которое действует в T_xM, $\alpha I \le B(x) \le \beta I$, $\alpha > 0$, γ — геодезическая, $\gamma(0) = y$, $\gamma(p) = x$.

Теорема 2. *Пусть многообразие* M *удовлетворяет условиям* 1 – 3, *а производные* $B(x)$ — *следующим оценкам*:

$$\|\nabla_U B(x)\| \le c\|U\|, \qquad \|\nabla_U\nabla_V B(x)\| \le c\|U\|\|V\|.$$

Тогда имеют место равенства

$$\frac{1}{2}\Delta_x u(x, y) = \mathrm{tr}\, D(x)B^{-1}(x)D(x) + a_1(x, y),$$

$$\frac{1}{2}\mathrm{div}_x B(x)\,\mathrm{grad}_x u(x, y) = \mathrm{tr}\, B(x)D(x)B^{-1}(x)D(x) + a_2(x, y),$$

$$\frac{1}{2}\Delta_y u(x, y) = \mathrm{tr}\, B^{-1}(x) + a_3(x, y),$$

где

$$|a_k(x, y)| < (\rho + \rho^2).$$

Доказательство. 1. Пусть $X_k(s)$ — базисные поля Якоби вдоль γ, $X_k(0) = 0$. Из очевидных формул

$$(\mathrm{grad}_x u, X_k(\rho)) = 2\rho\left(B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho), D(x)X_k(\rho)\right) + \rho^2\left(\left(\nabla_{X_k(\rho)}B^{-1}(x)\right)\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)\right),$$

$$k = 1, \ldots, n,$$

$$\left(\nabla_{X_k(\rho)}\mathrm{grad}\, u, X_k(\rho)\right) = \nabla_{X_k(\rho)}(\mathrm{grad}\, u, X_k(\rho)) +$$

$$+\ (X_k'(\rho), X_k(\rho))(\mathrm{grad}\, u, \dot\gamma(\rho)), \qquad k \ge 2,$$

после вычисления вторых производных и использования первого соотношения леммы 3 получаем

$$\frac{1}{2}\Delta_x u(x, y) = \mathrm{tr}\, D(x)B^{-1}(x)D(x) - \left(B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)\right)\mathrm{tr}\left(D^2(x) - D(x)\right) + \rho\times$$

$$\times\left[2\sum_{k=1}^{n}\left(\left(\nabla_{X_k(\rho)}B^{-1}(x)\right)\dot\gamma(\rho), D(x)X_k(\rho)\right) + \frac{1}{2}\left(\left(\nabla_{\dot\gamma(\rho)}B^{-1}(x)\right)\dot\gamma(\rho), \dot\gamma(\rho)\right)(\mathrm{tr}D(x) - 1)\right] +$$

$$+\ \rho^2\Big[\operatorname{Ric}(x)\big(\dot\gamma(\rho), B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho)\big)-\big(B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho)\big)\operatorname{Ric}(x)(\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho))\ +$$

$$+\sum_{k=2}^{n}\big(B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho), E_k(\rho)\big)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\nabla^2_{X_k(\rho)}B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho)\Big)\Big],$$

где $E_k(\rho)=\big(\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{X_k}X_k\big)^{\perp}(\rho)$. Теперь первое равенство теоремы следует из условий на оператор $B(x)$, оценок $D(x)$ и утверждения 2.

2. Для вычисления $\operatorname{div}_x B(x)\operatorname{grad}_x u$ воспользуемся следствием 1, положив

$$V(x)=B(x)\operatorname{grad}_x u(x,y)=v^k(x)X_k(\rho),$$

где координаты v^k вычисляются по формуле

$$v^k(x)=\big(\operatorname{grad}_x u(x,y), B(x)X_k(\rho)\big)=$$

$$=2\rho\big(B(x)D(x)B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho), X_k(\rho)\big)+\rho^2\Big(\big(\nabla_{B(x)X_k(\rho)}B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho)\Big).$$

Дальнейшее дифференцирование приводит к выражению

$$\big(\operatorname{grad} v^k(x), X_k(\rho)\big)=2\big(B(x)D(x)B^{-1}(x)D(x)X_k(\rho), X_k(\rho)\big)\ +$$

$$+\ 2\rho\big(B(x)D(x)B^{-1}(x)\dot\gamma(\rho),\nabla_{X_k}X_k(\rho)\big)\ +$$

$$+\ 2\rho\big(\nabla_{X_k(\rho)}\big(B(x)D(x)B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho), X_k(\rho)\big)\ +$$

$$+\ 2\rho\Big(\big(\nabla_{B(x)X_k(\rho)}B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho), D(x)X_k(\rho)\Big)\ +$$

$$+\ \rho^2\Big(\big(\nabla_{X_k(\rho)}\nabla_{B(x)X_k(\rho)}B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho)\Big),$$

суммируя которое по k, окончательно имеем

$$\operatorname{div}_x B(x)\operatorname{grad}_x u(x,y)=2\operatorname{tr}B(x)D(x)B^{-1}(x)D(x)\ +$$

$$+\ 2\rho\sum_{k=1}^{n}\Big[\Big(\big(\nabla_{X_k(\rho)}B(x)D(x)B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho), X_k(\rho)\Big)\ +$$

$$+\ \Big(\big(\nabla_{B(x)X_k(\rho)}B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho), D(x)X_k(\rho)\Big)\Big]\ +$$

$$+\ 2\rho\sum_{k=1}^{n}\Big(\big(\nabla_{X_k(\rho)}\nabla_{B(x)X_k(\rho)}B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho)\Big)\ +$$

$$+\ \rho^2\Big(\big(\nabla_{B(x)\dot\gamma(\rho)}B^{-1}(x)\big)\dot\gamma(\rho),\dot\gamma(\rho)\Big)(\operatorname{tr}D(x)-1).$$

Теперь второе равенство теоремы следует из леммы 4 и условий на оператор $B(x)$.

3. Положим

$$\sigma(\tau)=\gamma(\rho-\tau),\qquad \sigma(0)=x,\qquad \sigma(\rho)=y,\qquad \dot\sigma(\tau)=-\dot\gamma(\rho-\tau),$$

т. е.

$$u(x,y)=\rho^2\big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0),\dot\sigma(0)\big),$$

и введем базисные поля Якоби $Y_k(\tau)$, $Y_k(0)=0$.

В силу леммы 2

$$(\operatorname{grad} u, \dot\sigma(\rho)) = 2\rho\big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0), \dot\sigma(0)\big),$$

$$(\operatorname{grad} u, Y_k(\rho)) = 2\rho^2\big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0), Y_k'(0)\big),$$

$$\big(\nabla_{Y_k(\rho)} \operatorname{grad} u, Y_k(\rho)\big) = 2\big(B^{-1}(x)\rho Y_k'(0), \rho Y_k'(0)\big) +$$

$$+ 2\rho^2\big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0), \nabla_{\dot\sigma}\nabla_{Y_k} Y_k(0)\big) + 2\rho(Y_k'(\rho), Y_k(\rho))\big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0), \dot\sigma(0)\big), \quad k \geq 2.$$

Суммируя, получаем

$$\frac{1}{2}\Delta_y u(x, y) = b_1(x, y) + b_2(x, y) + \rho^2 \sum_{k=2}^{n} \big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0), E_k(0)\big),$$

где $E_k(0) = \big(\nabla_{\dot\sigma}\nabla_{Y_k} Y_k\big)^{\perp}(0)$, т. е. норма последнего слагаемого в силу утверждения 2 не превышает $c\rho^2$,

$$b_1(x, y) = \big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0), \dot\sigma(0)\big) + \sum_{k=2}^{n} \big(B^{-1}(x)\rho Y_k'(0), \rho Y_k'(0)\big),$$

$$b_2(x, y) = \big(B^{-1}(x)\dot\sigma(0), \dot\sigma(0)\big) \sum_{k=2}^{n} \Big[(\rho Y_k'(\rho), Y_k(\rho)) - \rho^2 \| Y_k'(0)\|^2\Big].$$

Из тождества

$$\rho Y_k'(0) = \Phi(0, \rho) Y_k(\rho) - \int_0^{\rho} (\rho - \tau)\Phi(0, \tau) R(\sigma(\tau))(\dot\sigma(\tau), Y_k(\tau))\dot\sigma(\tau)\, d\tau,$$

где Φ — оператор параллельного переноса вдоль σ, следует представление

$$b_1(x, y) = \operatorname{tr} B^{-1}(x) + h(x, y),$$

где в силу интегрируемости $\operatorname{Ric}(\sigma(\tau))(\dot\sigma(\tau), \dot\sigma(\tau))$

$$|h(x, y)| < c(\rho + \rho^2).$$

Для оценки b_2 рассмотрим функцию

$$\alpha_k(\tau) = \frac{(Y_k'(\tau), Y_k(\tau))}{\tau}, \quad \alpha_k(0) = \| Y_k'(0)\|^2, \quad k \geq 2.$$

Поскольку

$$\dot\alpha_k(\tau) = \frac{1}{\tau}\big(R(\sigma(\tau))(\dot\sigma(\tau), Y_k(\tau))\dot\sigma(\tau), Y_k(\tau)\big) +$$

$$+ \frac{1}{\tau^2}\int_0^{\tau} t\big(R(\sigma(t))(\dot\sigma(t), Y_k(t))\dot\sigma(t), \Phi(t, \tau) Y_k'(\tau)\big)\, dt$$

и

$$\| Y_k(\tau)\| \leq \frac{\tau}{\rho}, \quad \| Y_k'(\tau)\| < \frac{c}{\rho},$$

то

$$\sum_{k=2}^{n} |\dot{\alpha}_k(\tau)| \; < \; \frac{c}{\rho}\left(\mathrm{Ric}(\sigma(\tau))(\dot{\sigma}(\tau), \dot{\sigma}(\tau)) + \frac{1}{\tau^2}\int_0^{\tau} t\,\mathrm{Ric}(\sigma(t))(\dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t))\,dt \right)$$

и, следовательно,

$$0 \;\le\; \sum_{k=2}^{n}\left(\frac{(Y_k'(\rho), Y_k(\rho))}{\rho} - \| Y_k'(0) \|^2 \right) \;\le\; \frac{c}{\rho}\int_0^{\rho} \mathrm{Ric}(\sigma(\tau))(\dot{\sigma}(\tau), \dot{\sigma}(\tau))\,d\tau,$$

т. е.

$$\left| b_2(x, y) \right| \; < \; c\rho \int_0^{\rho} \mathrm{Ric}(\sigma(\tau))(\dot{\sigma}(\tau), \dot{\sigma}(\tau))\,d\tau,$$

что и завершает доказательство теоремы.

***Следствие* 3.** *В условиях теоремы* 2

$$\left| (\Delta_x - \Delta_y)\, u(x, y) \right| \; < \; c(\rho + \rho^2).$$

Доказательство следует из теоремы 2 и свойств оператора $D(x)$.

1. *Постников М. М.* Вариационная теория геодезических. – М.: Наука, 1965. – 248 с.
2. *Громол Д., Клингенберг В., Мейер В.* Риманова геометрия в целом. – М.: Мир, 1971. – 340 с.
3. *Misiolek G.* Stability of flows of ideal fluids and the geometry of the group of diffeomorphisms // Indiana Univ. Math. J. – 1993. – **42**, № 1. – P. 215 – 235.
4. *Larsen J. C.* Geodesics and Jacobi fields in singular semi-Riemannian geometry // Proc. Roy. Soc. London A. – 1994. – **446**, № 1928. – P. 441 – 452.
5. *Tasnadi T.* The behavior of nearby trajectories in magnetic billiards // J. Math. Phys. – 1996. – **37**, № 11. – P. 5577 – 5598.
6. *Bondarenko V.* Diffusion sur variete de courbure non positive // C. r. Acad. sci. Ser. 1. – 1997. – **324**, № 10. – P. 1099 – 1103.
7. *Бондаренко В. Г.* Ковариантные производные полей Якоби на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 6. – С. 755 – 764.

Получено 15.11.2005,
после доработки — 14.06.2006