УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПЕРЕНОС АБСОЛЮТНОЙ НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОТОКОМ, ПОРОЖДЕННЫМ СТОХАСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ОТРАЖЕНИЕМ

Let $\varphi_t(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, be a value taken at time $t \geq 0$ by a solution of stochastic equation with normal reflection from the hyperplane starting at initial time from x. We characterize an absolutely continuous (with respect to the Lebesgue measure) component and a singular component of the stochastic measure-valued process $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$, which is an image of some absolutely continuous measure μ for random mapping $\varphi_t(\cdot)$. We prove that the contraction of the Hausdorff measure H^{d-1} onto a support of the singular component is σ-finite. We also present sufficient conditions which guarantee that the singular component is absolutely continuous with respect to H^{d-1}.

Нехай $\varphi_t(x)$, $x \in \mathbb{R}_+$, — значення у момент часу $t \geq 0$ розв'язку стохастичного рівняння з нормальним відбиттям від гіперплощини, яке стартує в початковий момент часу з x. У статті охарактеризовано абсолютно неперервну (відносно міри Лебега) і сингулярну компоненти випадкового мірозначного процесу $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$ — образу деякої абсолютно неперервної міри μ при випадковому відображенні $\varphi_t(\cdot)$. Доведено, що звуження міри Хаусдорфа H^{d-1} на носій сингулярної компоненти σ-скінченне, а також наведено достатні умови, які гарантують, що сингулярна компонента є абсолютно неперервною відносно H^{d-1}.

Введение. Пусть $\varphi_t(x)$ — решение следующего стохастического уравнения в $\mathbb{R}_+^d = \mathbb{R}^{d-1} \times [0; \infty)$ с нормальным отражением от гиперплоскости $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$:

$$d\varphi_t(x) = a_0(\varphi_t(x))dt + \sum_{k=1}^{m} a_k(\varphi_t(x))dw_k(t) + \bar{n}\xi(dt, x), \qquad t \in [0, T],$$
$$\varphi_0(x) = x, \qquad \xi(0, x) = 0, \qquad x \in \mathbb{R}_+^d, \tag{0.1}$$

где $a_k : \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}^d$, $k = 0, \ldots, m$, удовлетворяют условию Липшица, $\{w_k(t), k = 1, \ldots, m\}$ — независимые винеровские процессы, $\bar{n} = (0, \ldots, 0, 1)$ — нормаль к гиперплоскости $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$, $\xi(t, x)$ — не убывающий по t процесс для любого фиксированного $x \in \mathbb{R}_+^d$, причем

$$\xi(t, x) = \int_0^t \mathbf{1}_{\{\varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}} \xi(ds, x),$$

т. е. $\xi(t, x)$ возрастает только в те моменты времени, когда $\varphi_t(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$.

***Замечание* 0.1.** Для того чтобы решить уравнение (0.1), надо найти пару процессов $\varphi_t(x)$ и $\xi(t, x)$, удовлетворяющую указанным выше условиям.

При сделанных предположениях существует и единственно решение уравнения (0.1) (см. [1]). При этом [2] существует непрерывная по (t, x) модификация процесса $\varphi_t(x)$, которая будет рассматриваться далее.

Пусть μ — вероятностная мера в $\mathbb{R}_+^d$, абсолютно непрерывная относительно меры Лебега λ^d. Рассмотрим случайный мерозначный процесс $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$, где $\mu \circ \varphi_t^{-1}$ — образ меры μ при случайном отображении $\varphi_t(\cdot, \omega)$.

Основной вопрос, рассматриваемый в данной статье, заключается в характеризации абсолютно непрерывной и сингулярной компонент процесса μ_t. Доказывается, что абсолютно непрерывная компонента μ_t^{abs} равна $\mu_t|_{\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)^\circ}$ — сужению меры μ_t на внутренность множества $\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)$, а сингулярная часть $\mu_t^{\text{sing}} = \mu_t|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)}$ — сужению μ_t на границу $\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)$.

В третьем пункте статьи приводятся достаточные условия, гарантирующие абсолютную непрерывность

$$\mu_t|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)} \ll H^{d-1}. \tag{0.2}$$

Сужение H^{d-1} в $\mathbb{R}^d$ на множество $\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)$ является σ-конечной мерой (см. теорему 1.1). Поэтому абсолютная непрерывность (0.2) не требует уточнений.

Отметим, что возможна ситуация, когда размерность Хаусдорфа множества $\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)$ меньше $d-1$ с положительной вероятностью (см. пример в [3]), и вопрос об абсолютной непрерывности (0.2) не является, вообще говоря, тривиальным.

В качестве иллюстрации к полученным результатам приводится пример, показывающий, что для любой абсолютно непрерывной меры μ в шаре $U = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \le 1\}$ мера $\mu \circ \varphi_t^{-1}$, где $\varphi_t(x)$ — броуновское движение с отражением от границы шара, стартующее из x, раскладывается в сумму

$$\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}\Big|_{\partial\varphi_t(U)} + \mu \circ \varphi_t^{-1}\Big|_{\varphi_t(U)^\circ},$$

где первая мера абсолютно непрерывна относительно λ^d, а вторая — относительно H^{d-1}.

1. Характеризация абсолютно непрерывной компоненты процесса $\boldsymbol{\mu \circ \varphi_t^{-1}}$. Пусть $\varphi_t(x)$ — решение стохастического уравнения с нормальным отражением (0.1), где коэффициенты a_k удовлетворяют условию Липшица.

Рассмотрим случайный мерозначный процесс $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$, где μ — абсолютно непрерывная конечная мера в $\mathbb{R}_+^d$.

Теорема 1.1. *Для почти всех ω и любого $t \ge 0$ мера μ_t представима в виде суммы взаимно ортогональных мер*

$$\mu_t = \mu_t|_{\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)\setminus\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)} + \mu_t|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)},$$

причем:

а) *первая компонента абсолютно непрерывна относительно d-мерной меры Лебега, а вторая либо сингулярна, либо является нулевой мерой*;

б) *носитель меры $\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)}$ содержится в счетном объединении множеств конечной $(d-1)$-мерной меры Хаусдорфа H^{d-1}.*

Доказательство. Ортогональность сужения меры μ_t на непересекающиеся множества очевидна.

Введем случайное множество $U_t(\omega) = \{x \in \mathbb{R}_+^d : t < \tau(x)\}$, где $\tau(x) = \inf\{s \ge 0 : \varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}\}$ — момент первого попадания процесса $\varphi_t(x)$ на гиперплоскость $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$.

Из результатов [2, 4] следует, что почти наверное для всех $t \ge 0$:

1) множества $\varphi_t(U_t)$, $\varphi_t(\mathbb{R}_+^d \setminus U_t)$ не пересекаются и равны соответственно внутренности и границе случайного множества $\varphi_t(\mathbb{R}_+^d)$, т. е. до момента попадания на гиперплоскость $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$ решение $\varphi_t(x)$ принадлежит внутреннос-

ти случайного множества $\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)$, а после него — границе;

2) имеет место равенство случайных множеств

$$\varphi_t(\mathbb{R}^d_+ \setminus U_t) = \varphi_t(\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}) = \partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+), \qquad \varphi_t(U_t) = \varphi_t(\mathbb{R}^d_+)^\circ;$$

3) для любого $r > 0$

$$H^{d-1}(\varphi_t(\{x \in \mathbb{R}^{d-1} : |x| \le r\} \times \{0\})) < \infty,$$

где H^{d-1} — мера Хаусдорфа в $\mathbb{R}^d$ размерности $d-1$.

Таким образом, носитель меры $\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}$ содержится в счетном объединении множеств конечной $(d-1)$-мерной меры Хаусдорфа H^{d-1} и, значит, соответствующая мера не может быть абсолютно непрерывной, если она не вырождена. Поэтому для доказательства теоремы 1.1 достаточно проверить абсолютную непрерывность

$$\mu_t|_{(\varphi_t(\mathbb{R}^d_+))^\circ} << \lambda^d.$$

Пусть $\tilde{a}_k$ — произвольное липшицево продолжение a_k на $\mathbb{R}^d$, $\tilde{\varphi}_t(x)$ — решение стохастического уравнения (без отражения) с коэффициентами $\tilde{a}_k$. Тогда с вероятностью 1 имеет место равенство $\tilde{\varphi}_t(x) = \varphi_t(x)$ для всех $t \le \tau(x)$. Следовательно,

$$\mu_t|_{(\varphi_t(\mathbb{R}^d_+))^\circ} = \mu|_{U_t} \circ \varphi_t^{-1} = \mu|_{U_t} \circ \tilde{\varphi}_t^{-1} << \mu \circ \tilde{\varphi}_t^{-1}.$$

Известно (см. [5], теорема 3.3.3), что с вероятностью 1 для всех t отображение $\tilde{\varphi}_t(\cdot, \omega)$ является элементом пространства $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ и существует модификация (относительно меры $\mathrm{P} \times \lambda^d$) производной $\nabla\tilde{\varphi}_t(x)$ по начальным данным (по x), удовлетворяющая некоторому линейному стохастическому уравнению с ограниченными коэффициентами. Поэтому для всех (ω, x) из множества полной $(\mathrm{P} \times \mu)$-меры и всех $t \ge 0$ якобиан $\det\nabla\tilde{\varphi}_t(x)$ не равен нулю. Из леммы 5.1 [6] следует, что для почти всех ω и всех $t \ge 0$ имеет место абсолютная непрерывность мер $\mu \circ \tilde{\varphi}_t^{-1} << \lambda^d$.

Теорема 1.1 доказана.

2. Характеризация сингулярной компоненты меры μ_t. В теореме 1.1 показано, что размерность Хаусдорфа носителя меры $\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}$ — сингулярной компоненты меры μ_t — не превышает $d-1$. В данном пункте приводятся достаточные условия, гарантирующие абсолютную непрерывность

$$\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)} << H^{d-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)}. \tag{2.1}$$

Нам понадобится следующее абстрактное утверждение об абсолютной непрерывности образа меры относительно меры Хаусдорфа.

Теорема 2.1. *Пусть функция $f: \mathbb{R}^d \to L \subset \mathbb{R}^m$ аппроксимативно дифференцируема в λ^d-почти всех точках ограниченного измеримого множества $U \subset \mathbb{R}^d$, где измеримое множество L имеет конечную k-мерную меру Хаусдорфа, $H^k(L) < \infty$. Предположим, что ранг матрицы $\left\| \mathrm{ap}\dfrac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} \right\|_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,d}}$, составленной из аппроксимативных частных производных, равен k для почти всех $x \in U$, где $k \le d$.*

Тогда

$$\lambda_U^d \circ f^{-1} \ll H^k|_L, \tag{2.2}$$

где $H^k|_L$ *— сужение меры Хаусдорфа на* L.

***Замечание* 2.1.** Если функция f имеет соболевскую производную (или даже обычные производные по направлениям почти всюду), то она также является почти всюду аппроксимативно дифференцируемой. При этом соболевская и аппроксимативная производные почти всюду совпадают.

***Замечание* 2.2.** Сужение меры Хаусдорфа $H^k|_L$ является конечной мерой в отличие от H^k, которая не является даже k-конечной при $k < d$.

Доказательство теоремы аналогично доказательству леммы 5.1 и теоремы 5.6 [6]. Сначала, применяя теорему 3.1.8 [7], сведем доказательство к случаю, когда f непрерывно дифференцируема и $\det\left\|\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right\|_{i=\overline{1,k}}^{j=\overline{1,k}} \neq 0$. Затем для завершения доказательства искомого результата надо использовать метод расслоений [8] и формулу (3.2.30) [7].

***Следствие* 2.1.** *Пусть* $\mu(dx) = p(x)dx$ *— конечная мера в* $\mathbb{R}^d$. *Предположим, что функция* $f:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ μ*-почти всюду аппроксимативно дифференцируема, существует множество* $L \subset \mathbb{R}^m$ *такое, что* $f(x) \in L$ *для* μ*-почти всех* $x \in \mathbb{R}^d$ *и* $H^k(L) < \infty$, *где* $k \le d$. *Допустим, что* $\operatorname{rank}\left\|\operatorname{ap}\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}\right\|_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,d}} = k$ *для* μ*-почти всех* x. *Тогда* $\mu \circ f^{-1} \ll H_L^k$.

В [4] доказано, что для почти всех ω и всех t отображение $\varphi_t(\cdot)$ принадлежит пространству $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_+, \mathbb{R}^d)$ для любого $p > 1$. Из следствия 2.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Предположим, что для любого* $x \in \mathbb{R}^d_+$

$$\mathrm{P}\big(\operatorname{rank}\nabla\varphi_t(x) \ge d-1,\ t \ge 0\big) = 1. \tag{2.3}$$

Тогда для почти всех ω

$$\mathrm{P}\Big(\mu \circ \varphi_t^{-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)} \ll H^{d-1}|_{\partial\varphi_t(\mathbb{R}^d_+)},\ t \ge 0\Big) = 1.$$

Цель дальнейшей работы состоит в нахождении достаточных условий, гарантирующих (2.3), так как проверить их непосредственно не представляется возможным.

В следующей теореме приводится вид стохастического уравнения, которому удовлетворяет (соболевская) производная $\nabla\varphi_t(x)$.

Теорема 2.3 [9]. *Предположим, что коэффициенты уравнения* (0.1) *непрерывно дифференцируемы и имеют ограниченные частные производные.*

Допустим, что для любого $x \in \mathbb{R}^{d-1}\times\{0\}$ *имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^m (a_{k,d}(x))^2 > 0, \tag{2.4}$$

где $a_{k,d}$ *—* d*-я координата функции* $a_k = (a_{k,1}, \ldots, a_{k,d})^T$.

Тогда случайное отображение $\varphi_t : \mathbb{R}^d_+ \to \mathbb{R}^d$ *с вероятностью* 1 *для всех* $t \geq 0$ *принадлежит пространству Соболева* $W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d_+, \mathbb{R}^d)$, $p > 1$, *причем соболевская производная* $y_t(x) := \nabla\varphi_t(x)$ *удовлетворяет уравнению*

$$dy_t(x) = \nabla a_0(\varphi_t(x))\, y_t(x)\, dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \nabla a_k(\varphi_t(x))\, y_t(x)\, dw_k(t) - (\mathbf{1} - P)\, y_{t-}(x)\, n(x, dt), \tag{2.5}$$

$$y_0(x) = \mathbf{1},$$

где $n(x, dt)$ *— точечная случайная мера такая, что* $n(x, \{t\}) = 1$ *в том и только в том случае, когда* $\varphi_t(x)$ *принадлежит гиперплоскости* $\mathbb{R}^{d-1} \times \{0\}$; $\mathbf{1}$ *— единичная матрица, а матрица* $P = (p_{ij})^d_{i,j=1}$ *определена следующим образом*:

$$p_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \leq d-1, \\ 0 & \text{— в остальных случаях.} \end{cases}$$

***Замечание* 2.3.** Решение (2.5) (для фиксированного x) понимается в следующем смысле:

1) для любого момента остановки τ такого, что $\varphi^d_\tau(x) \neq 0$ (φ^d_t — d-я координата φ_t), имеет место равенство

$$y_t(x) = y_\tau(x) + \int_\tau^t \nabla a_0(\varphi_s(x))\, y_s(x)\, ds +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_\tau^t \nabla a_k(\varphi_s(x))\, y_s(x)\, dw_k(s), \qquad t \in [\tau, \mathring{\tau}),$$

где $\mathring{\tau} = \inf\{s \geq \tau : \varphi^d_s(x) = 0\}$;

2) множество $\{t : \varphi^d_t(x) = 0\}$ содержится в $\{t : Py_t(x) = 0\}$;

3) процесс $(1 - P)\, y_t(x)$, $t \geq 0$, имеет càdlàg траектории;

4) процесс $Py_t(x)$, $t \geq 0$, имеет непрерывные траектории.

***Замечание* 2.4.** Из теоремы 2.3 следует, что для $t < \tau(x)$ производная $y_t(x)$ является решением линейного стохастического уравнения

$$dy_t(x) = \nabla a_0(\varphi_t(x))\, y_t(x)\, dt + \sum_{k=1}^{m} \nabla a_k(\varphi_t(x))\, y_t(x)\, dw_k(t),$$

$$y_0(x) = \mathbf{1}.$$

***Замечание* 2.5.** Случайное отображение $\varphi_t(\cdot)$ может не быть непрерывно дифференцируемым по x, даже если все коэффициенты уравнения являются бесконечно дифференцируемыми. Например, если $\varphi_t(x)$ — отраженное броуновское движение в $[0, \infty)$, стартующее из точки $x \geq 0$ в нулевой момент времени, то несложно проверить (см. [2]), что

$$\varphi_t(x) = \begin{cases} x + w(t), & t < \tau(x), \\ \varphi_t(0), & t \geq \tau(x), \end{cases}$$

где $\tau(x)$ — момент первого попадания $\varphi_t(x)$ в нуль, $w(t)$ — исходный винеровский процесс. Тогда производная

$$\nabla\varphi_t(x) = \begin{cases} 1, & t < \tau(x), \\ 0, & t \ge \tau(x), \end{cases}$$

не имеет непрерывной модификации по x для любого $t > 0$.

Далее в статье предполагается, что условия теоремы 2.3 выполняются.

Рассмотрим вопрос о справедливости равенства (2.3). Пусть $x \in \mathbb{R}_+^d$ фиксирован. Далее будем обозначать φ_t, y_t вместо $\varphi_t(x)$, $y_t(x)$.

Пусть $T > 0$. Введем моменты остановки

$$\tau_0(c) = \inf\{t \ge 0 : \varphi_t^d = 0\} \wedge T,$$

$$\sigma_n(c) = \inf\{t \ge \tau_n(c) : \varphi_t^d = c\} \wedge T,$$

$$\tau_{n+1}(c) = \inf\{t \ge \sigma_n(c) : \varphi_t^d = 0\} \wedge T,$$

где $c > 0$.

Несложно заметить, что для любого $t > 0$ с вероятностью 1 существует такое конечное n, что $t \in [\sigma_n(c), \tau_{n+1}(c))$.

Из доказательства теоремы 1 [9] следует, что

$$\forall T > 0 \ \forall p > 1 : \quad \mathrm{E} \sup_{t \in [0,T]} \left| y_t - y_t^c \right| \to 0, \qquad c \to 0+, \tag{2.6}$$

где процесс y_t^c определен следующим образом:

$$y_0^c = \mathbf{1},$$

$$y_t^c = y_{\sigma_n(c)}^c + \int_{\sigma_n(c)}^{t} \nabla a_0(\varphi_s) y_s^c ds + \sum_{k=1}^{m} \int_{\sigma_n(c)}^{t} \nabla a_k(\varphi_s) y_s^c dw_k(s)$$

при $t \in [\sigma_n(c), \tau_{n+1}(c))$,

$$y_t^c = P y_{\tau_n(c)-}^c, \qquad t \in [\tau_n(c), \sigma_n(c)].$$

Обозначим через $U_{s,t}$, $s \le t$, решение линейного стохастического уравнения

$$\begin{gathered} dU_{st} = \nabla a_0(\varphi_t) U_{st} dt + \sum_{k=1}^{m} \nabla a_k(\varphi_t) U_{st} dw_k(t), \\ U_{ss} = \mathbf{1}. \end{gathered} \tag{2.7}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned} y_t^c &= U_{\sigma_n(c),t} \prod_{k=1}^{n-1} (PU_{\sigma_k(c),\tau_k(c)}) PU_{0,\tau_0(c)} = \\ &= U_{\sigma_n(c),t} P \prod_{k=1}^{n-1} (PU_{\sigma_k(c),\tau_k(c)} P) PU_{0,\tau_0(c)}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

Нам понадобится следующая лемма о невырожденности предела произведений матриц.

Лемма 2.1. *Пусть* $\{A_{n,k},\ k = \overline{1, N(n)}\}$, $n \geq 1$, — *последовательность серий случайных матриц размера* $d \times d$. *Допустим, что*:

1) *для любого* k *существуют пределы*

$$A_k := \lim_{n\to\infty} A_{n,k} \qquad \text{почти наверное,}$$

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \max_{m\leq k\leq N(n)} \left\| A_{n,k} \right\| = 0 \qquad \text{почти наверное};$$

2) *существуют перестановки* σ_n *чисел* $1, \ldots, N(n)$ *такие, что имеет место предел по вероятности*

$$B := \mathrm{P}\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{N(n)} (\mathbf{1} + A_{n,\sigma_n(k)});$$

3) *существует и конечен предел по вероятности*

$$\alpha := \mathrm{P}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} A_{n,k};$$

4) $K := \sup_n \mathrm{E} \prod_{k=1}^{N(n)} \left\| A_{n,k} \right\|^2 < \infty$;

5) *для любого* $k \geq 1$

$$\det(\mathbf{1} + A_k) \neq 0 \qquad \text{почти наверное.}$$

Тогда $\det B \neq 0$ *почти наверное.*

Доказательство. Детерминант матрицы является непрерывной функцией (от матрицы), поэтому

$$\det B = \mathrm{P}\lim_{n\to\infty} \det \prod_{k=1}^{N(n)} (\mathbf{1} + A_{n,k}),$$

и, значит, $\det B \neq 0$ почти наверное, если и только если

$$\mathrm{P}\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N(n)} \ln\left(\left|\det(\mathbf{1} + A_{n,k})\right|\right) \neq -\infty \qquad \text{почти наверное,}$$

где считается, что $\ln 0 = -\infty$.

Заметим, что для почти всех ω при $k \geq k_0(\omega)$, $n \geq n_0(\omega)$ имеет место неравенство $\left\| A_{n,k} \right\| < 1/2$ и, следовательно,

$$\ln\left(\det(\mathbf{1} + A_{n,k})\right) = \operatorname{tr} A_{n,k} + f_{n,k}\left(\left\| A_{n,k} \right\|^2\right),$$

где $\left| f_{n,k}(x) \right| \leq c|x|$, $|x| \leq 1$, $c = \text{const}$.

Тогда

$$\ln(|\det B|) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N(n)} \operatorname{tr} A_{n,k} + \sum_{k=k_0}^{N(n)} f_{n,k}\left(\left\| A_{n,k} \right\|^2\right) + \zeta_n \right),$$

где

$$\zeta_n = \ln\left(\prod_{k=1}^{k_0-1} \det(\mathbf{1} + A_{n,k})\right) - \sum_{k=1}^{k_0-1} \operatorname{tr} A_{n,k}$$

сходится при $n \to \infty$ к некоторой собственной случайной величине ζ. Поэтому

$$\mathrm{E}|\ln(|\det B|) - \alpha - \zeta| =$$

$$= \mathrm{E}\lim_{n\to\infty}\left|\ln(|\det B|) - \sum_{k=1}^{N(n)} \operatorname{tr} A_{n,k} - \zeta_n\right| =$$

$$= \mathrm{E}\left|\lim_{n\to\infty}\sum_{k=k_0}^{N(n)} f_{n,k}\left(\|A_{n,k}\|^2\right)\right| \le$$

$$\le \mathrm{E}\,\overline{\lim_{n\to\infty}}\sum_{k=1}^{N(n)}\|A_{n,k}\|^2 \le K < \infty.$$

Отсюда следует конечность $\ln(|\det B|)$ почти наверное, т. е. $\det B \neq 0$ почти наверное, что и требовалось доказать.

Представим случайное множество $A = \{s \in [0,t] : \varphi_s^d > 0\}$ в виде объединения непересекающихся случайных интервалов

$$A = [\alpha_0, \beta_0) \cup (\alpha_1, \beta_1] \cup \bigcup_{k=2}^{\infty} (\alpha_k, \beta_k),$$

где $\alpha_0 = 0$, $\beta_1 = T$.

Теорема 2.4. *Допустим, что выполняются условия теоремы* 2.3 *и для любого* $k \ge 0$

$$\mathrm{P}(\operatorname{rank}(PU_{\alpha_k,\beta_k}(x)P) = d-1) = 1.$$

Тогда $\mathrm{P}(\operatorname{rank} y_s(x) \ge d-1,\ s \in [0,t]) = 1$.

Доказательство. Заметим, что функция $\operatorname{rank} y_s$, $s \ge 0$, невозрастающая, поэтому для доказательства теоремы достаточно проверить, что $\operatorname{rank} y_t \ge d-1$ почти наверное. Также без потери общности можно считать, что A состоит из бесконечного числа интервалов.

Для матрицы B размером $d \times d$ через $\tilde{B}$ будем обозначать матрицу, состоящую из первых $d-1$ строк и $d-1$ столбцов матрицы B.

Из (2.6), (2.8) следует

$$\tilde{y}_t^c = \tilde{U}_{\sigma_n(c),t}\left(\prod_{k=1}^{n-1}\tilde{U}_{\sigma_k(c),\tau_k(c)}\right)\tilde{U}_{0,\tau_0(c)} \to \tilde{y}_t, \qquad c \to 0+. \tag{2.9}$$

Воспользуемся леммой 2.1. Положим

$$A_k := \tilde{U}_{\alpha_k,\beta_k} - \mathbf{1}, \qquad A_{n,k} := \tilde{U}_{\sigma_{j_k}(1/n),\tau_{j_k}(1/n)} - \mathbf{1},$$

где интервал $(\sigma_{j_k}(1/n), \tau_{j_k}(1/n))$ содержится в (α_k, β_k).

Условие 1 леммы выполняется, так как $U_{s,t}$, $s \le t$, непрерывно по (s, t) [10]; условие 2 выполняется вследствие (2.9), а условие 5 — в силу предположений теоремы.

Для проверки условия 3 леммы достаточно убедиться в существовании предела по вероятности последовательности

$$\sum_k \left(\int\limits_{\sigma_k(c)\wedge t}^{\tau_k(c)\wedge t} \nabla a_0(\varphi_s) U_{\sigma_k(c)\wedge t, s}\, ds + \sum_{j=1}^m \int\limits_{\sigma_k(c)\wedge t}^{\tau_k(c)\wedge t} \nabla a_k(\varphi_s) U_{\sigma_k(c)\wedge t, s}\, dw_k(s) \right)$$

при $c \to 0+$.

Заметим, что первое слагаемое сходится для почти всех ω к выражению

$$\int\limits_0^t \sum_k \mathbf{1}_{(\alpha_k,\beta_k)}(s) \nabla a_0(\varphi_s) U_{\alpha_k, s}\, ds$$

по теореме Лебега о мажорируемой сходимости.

Последовательность вторых слагаемых фундаментальна в $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. Действительно,

$$\mathrm{E}\left| \sum_p \sum_{j=1}^m \int\limits_{\sigma_p(c_1)\wedge t}^{\tau_p(c_1)\wedge t} \nabla a_j(\varphi_s) U_{\sigma_p(c_1)\wedge t, s}\, dw_k(s) - \right.$$

$$\left. - \sum_l \sum_{j=1}^m \int\limits_{\sigma_l(c_2)\wedge t}^{\tau_l(c_2)\wedge t} \nabla a_j(\varphi_s) U_{\sigma_l(c_2)\wedge t, s}\, dw_k(s) \right|^2 \le \sum_{j=1}^m \sup_x \left| \nabla a_j(x) \right|^2 \times$$

$$\times\ \mathrm{E}\int\limits_0^t \left| \sum_p U_{\sigma_p(c_1)\wedge t, s} \mathbf{1}_{[\sigma_p(c_1)\wedge t,\, \tau_p(c_1)\wedge t]}(s) - \sum_l U_{\sigma_l(c_2)\wedge t, s} \mathbf{1}_{[\sigma_l(c_2)\wedge t,\, \tau_l(c_2)\wedge t]}(s) \right|^2 ds \to 0$$

при $c_1, c_2 \to 0+$ по теореме Лебега о мажорируемой сходимости, так как [10]

$$\mathrm{E} \sup_{0 \le s \le \bar{t} \le t} \left\| U_{s\bar{t}} \right\|^2 < \infty.$$

Аналогичным образом проверяется условие 4 леммы 2.1. Тем самым теорема 2.4 доказана.

Следствие 2.2. *Предположим, что для любых* $x, y \in \mathbb{R}^{d-1} \times (0, \infty)$, $t \ge 0$ *и* $(d \times d)$*-матрицы* V, $\operatorname{rank} V = d - 1$, *условная вероятность*

$$\mathrm{P}\left\{ \operatorname{rank} P U_{t, \beta(t,x)}(x) V < d - 1 / \varphi_t(x) = y \right\} = 0, \tag{2.10}$$

где $U_{s,t}(x)$ *— решение* (2.7) *с* $\varphi_t = \varphi_t(x)$,

$$\beta(t, x) = \inf\{ z \ge t : \varphi_z(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \}.$$

Тогда справедливо (2.3).

Доказательство. Пусть

$$\alpha(t, x) = \sup\{ s \in [0; t] : \varphi_s(x) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \{0\} \} \quad \text{и} \quad \alpha(t, x) = 0,$$

если соответствующее множество пусто, т. е. $(\alpha(t,x), \beta(t,x))$ — максимальный интервал, на котором $\varphi_t^d(x) \ne 0$.

Заметим, что $P U_{\alpha(t,x), \beta(t,x)} P = P U_{t, \beta(t,x)} U_{\alpha(t,x), t} P$, причем $U_{\alpha(t,x), t} P$ является $\mathcal{F}_t$-измеримым. Пусть $\rho_t(dy, dV)$ — распределение пары процессов $\left(\varphi_t(x), U_{\alpha(t,x),t} P \right)$. Тогда

$$\mathrm{P}(\operatorname{rank} PU_{\alpha(t,x),\beta(t,x)}P < d-1) =$$
$$= \mathrm{P}(\operatorname{rank} PU_{t,\beta(t,x)}U_{\alpha(t,x),t}P < d-1) =$$
$$= \int \mathrm{P}(\operatorname{rank} PU_{t,\beta(t,x)}V < d-1 / \varphi_t(x) = y,\ U_{(\alpha(t,x),t)} = V)\rho_t(dy, dV) = 0.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что $\mathrm{P}(\operatorname{rank} U_{\alpha(t,x),t}P = d-1) = 1$, так как с вероятностью 1 матрица $U_{s,t}$ невырождена для всех s, t, $s \le t$, и применить теорему 2.4.

***Пример* 2.1.** Условия следствия 2.2 можно интерпретировать как условия непопадания процесса Ито $(\varphi_t^d, \det \tilde{U}_{st})$, $t \ge s$, в точку $(0; 0)$. Некоторые достаточные условия для этого имеют довольно простой вид.

Рассмотрим двумерную ситуацию. В этом случае процесс $\det \tilde{U}_{st}$ равен U_{st}^{11} — элементу первого столбца и первой строки матрицы U_{st}. Пара $(\varphi_t^2, U_{st}^{11})$ удовлетворяет следующему соотношению:

$$d\varphi_t^2 = a_0^2(\varphi_t) + \sum_{k=1}^m a_k^2(\varphi_t)dw_k(t), \qquad t \in [s; \inf\{z \ge s \mid \varphi_z^2(x) = 0\}),$$

$$dU_{st}^{11} = ((a_0^1)_1'(\varphi_t)U_{st}^{11} + (a_0^1)_2'(\varphi_t)U_{st}^{12})dt +$$
$$+ \sum_{k=1}^m ((a_k^1)_1'(\varphi_t)U_{st}^{11} + (a_k^1)_2'(\varphi_t)U_{st}^{12})dw_k(t).$$

Все процессы под дифференциалом являются непрерывными. Поэтому достаточным условием непопадания (φ_t, U_{st}^{11}) в $(0; 0)$ является, например, невырожденность во всех точках диффузионной характеристики. Поскольку матрица U_{st} невырождена с вероятностью 1 для всех s, t, вектор $(U_{st}^{11}, U_{st}^{12})$ ненулевой, и таким достаточным условием является, например, следующее:

для любых $x \in \mathbb{R}_+^2$, $y \in \mathbb{R}^2$, $y \ne 0$, векторы $(a_k^2(x))_{1\le k\le m}$ и $(\nabla_y a_k^1(x))_{1\le k\le m}$ линейно независимы.

***Пример* 2.2.** Пусть $\varphi_t(x)$ — броуновское движение с отражением в единичном шаре пространства $\mathbb{R}^d$, μ — абсолютно непрерывная мера в $\{\|x\| \le 1\}$, $\mu_t = \mu \circ \varphi_t^{-1}$.

Выполнив достаточно гладкие локальные замены переменных, несложно распространить результаты статьи на данный пример.

В данном случае $U_{s,t} = \mathbf{1}$ и условие, которое соответствует (2.10), принимает следующий вид:

для любого x, $\|x\| < 1$, и матрицы V, $\operatorname{rank} V = d-1$,

$$\mathrm{P}\{\operatorname{rank} P(\varphi_t(\beta(t,x)))V < d-1\} = 0, \tag{2.11}$$

где $P(y)$ — проектор на касательную плоскость сферы $\{\|x\| = 1\}$ в точке y. Очевидно, (2.11) истинно.

Таким образом, μ_t представима в виде суммы абсолютно непрерывной $\mu_t^{\mathrm{abs}} := \mu_t|_{\varphi_t(\|x\|\le 1)\setminus\partial\varphi_t(\|x\|\le 1)}$ и сингулярной $\mu_t^{\mathrm{sing}} := \mu_t|_{\partial\varphi_t(\{\|x\|\le 1\})}$ компонент. При этом $H^{d-1}(\partial\varphi_t(\{\|x\| \le 1\})) < \infty$ и μ_t^{sing} абсолютно непрерывна относительно сужения меры Хаусдорфа H^{d-1} на множество $\partial\varphi_t(\{\|x\| \leq 1\})$.

Отметим также, что если $t > \inf\{s : \|w(s)\| \geq 2\}$, то для всех x момент $\tau(x)$ попадания решения, стартующего из x, на границу шара не превышает t. Поэтому $\partial\varphi_t(\{\|x\| \leq 1\}) = \varphi_t(\{\|x\| \leq 1\})$ (соответствующий факт упоминался в доказательстве теоремы 1.1, однако может быть перенесен и на случай ограниченной области с гладкой границей).

Следовательно, для таких t абсолютно непрерывная компонента является нулевой мерой.

1. *Tanaka H.* Stochastic differential equations with reflecting boundary condition in convex regions // Hiroshima Math. J. – 1979. – **9**, № 1. – P. 163 – 177.
2. *Pilipenko A. Yu.* Flows generated by stochastic equations with reflection // Random Oper. and Stochast. Equat. – 2004. – **12**, № 4. – P. 389 – 396.
3. *Пилипенко А. Ю.* Стохастические потоки с отражением // Допов. НАН України. – 2005. – № 10. – С. 23 – 29.
4. *Пилипенко А. Ю.* Свойства потоков, порожденных стохастическими уравнениями с отражением // Укр. мат. журн. – 2005. – **57**, № 8. – С. 1069 – 1078.
5. *Bouleau N., Hirsch F.* Dirichlet forms and analysis on Wiener space // Stud. Math. – Berlin: Walter de Gruyter & Co, 1991. – **14**. – X + 325 p.
6. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Аналитические свойства бесконечномерных распределений // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, вып. 3(273). – С. 3 – 83.
7. *Федерер Г.* Геометрическая теория меры: Пер. с англ. – М.: Наука, 1987. – 760 с.
8. *Давыдов Ю. А., Лифшиц М. А.* Метод расслоений в некоторых вероятностных задачах // Итоги науки и техники. Теория вероятностей, мат. статистика, теор. кибернетика / ВИНИТИ. – 1984. – **22**. – С. 61 – 157.
9. *Пилипенко А. Ю.* Про узагальнену диференційованість за початковими даними потоку, породженого стохастичним рівнянням з відбиттям // Теория вероятностей и мат. статистика. – 2006. – **75**. – С. 136 – 148.
10. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations // Cambridge Stud. Adv. Math. – 1990. – **24**. – 346 p.

Получено 15.03.2006