УДК 517.5

А. А. Шумейко (Днепродзерж. техн. ун-т)

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ЛОКАЛЬНЫМИ СПЛАЙНАМИ С НЕФИКСИРОВАННЫМИ УЗЛАМИ

For functions integrable in a degree $\beta = (r+1+1/p)^{-1}$, we obtain asymptotically exact lower bounds of the approximation by local splines of order r and defect $k < r/2$ in the metric L_p.

Для функцій, інтегровних в степені $\beta = (r+1+1/p)^{-1}$, отримано асимптотично точні оцінки знизу наближення локальними сплайнами степеня r дефекту $k < r/2$ в метриці L_p.

Пусть $\{\Delta_{n[a,b]}\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность разбиений отрезка $[a,b]$:

$$\Delta_{n[a,b]} = \{a = t_{0,n} < t_{1,n} < \ldots < t_{n,n} = b\}.$$

Через $h_{i+1/2,n} = t_{i+1,n} - t_{i,n}$, $i = 0, \ldots, n-1$, обозначим переменный шаг разбиения $\Delta_{n[a,b]}$ с наибольшим значением $h_n = \max\{h_{i+1/2,n} \mid i = 0, \ldots, n-1\}$.

Функцию $s(t)$, имеющую $r-k$ непрерывных производных на отрезке $[a,b]$ и совпадающую на каждом из интервалов $(t_{i-1,n}, t_{i,n})$, $i = 1, \ldots, n$, с алгебраическим многочленом степени не выше r, будем называть сплайн-функцией порядка r дефекта k по разбиению $\Delta_{n[a,b]}$ или просто сплайном. При фиксированных r, k и $\Delta_{n[a,b]}$ множество таких сплайнов будем обозначать через $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n[a,b]})$.

Как обычно, через $L_{p[a,b]}$, $p \in (0, \infty)$, обозначим множество всех измеримых суммируемых в p-й степени на отрезке $[a,b]$ функций $f(t)$ и положим

$$\|f\|_{p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p},$$

а через $L_{\infty[a,b]}$ — пространство всех существенно ограниченных на $[a,b]$ функций $f(t)$ с конечной нормой $\|f\|_{\infty[a,b]} = \sup\operatorname{vrai}\{|f(t)| \mid t \in [a,b]\}$. Кроме того, через $V_{[a,b]}^r$ обозначим множество функций $f(t)$, каждая из которых имеет абсолютно непрерывную на $[a,b]$ $(r-1)$-ю производную и ограниченную полную вариацию r-й производной, т. е. $V_a^b(f^{(r)}) < \infty$.

Пусть $\{P_{r,k}(\cdot, \Delta_{n[a,b]})\}_{n=1}^{\infty}$ — некоторая последовательность операторов, отображающих множество $C_{[a,b]}^{r-k}$ в пространстве $\mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n[a,b]})$. В частности, $P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]})$ может быть интерполяционным сплайном, сплайном, интерполирующим $f(t)$ в среднем, сплайном наилучшего приближения и т. д.

При фиксированных r, k и p последовательность разбиений $\{\Delta_{n[a,b]}^*\}_{n=1}^{\infty}$ назовем асимптотически оптимальной для функции $f \in C_{[a,b]}^{r-k}$ и для последовательности операторов $\{P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]})\}_{n=1}^{\infty}$, если при $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$\|f - P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]}^*)\|_{p[a,b]} = \inf_{\Delta_{n[a,b]}} \|f - P_{r,k}(f, \Delta_{n[a,b]})\|_{p[a,b]} (1 + o(1)).$$

Рассмотрим один вид широко используемых интерполяционных сплайнов — локальные эрмитовые сплайны с дополнительными узлами.

Положим $\mu = |r+1-2k|+1$ и пусть $\delta_\mu = \{0 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_\mu = 1\}$ — фиксированное разбиение отрезка $[0, 1]$ такое, что $\tau_j = 1 - \tau_{\mu-j}$, $j = 0, 1, \ldots, \mu$. Обозначим через $\Delta_{n,\mu[a,b]}$ разбиение отрезка $[a, b]$ точками $t_{i,j,n} = t_{i-1,n} + h_{i-1/2,n}\tau_j$, $i = 1, \ldots, n$; $j = 0, 1, \ldots, \mu$.

Пусть $k \ge (r+2)/2$ и функция $f \in C^{r-k}_{[a,b]}$. Интерполяционным локальным эрмитовым сплайном назовем сплайн $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}) \in \mathbb{S}_{r,k}(\Delta_{n[a,b]})$, однозначно определяющийся интерполяционными условиями:

$$s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t_{i,j,n}) = f(t_{i,j,n}), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \quad j = 0, 1, \ldots, \mu,$$

и

$$s^{(\nu)}_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t_{i,n}) = f^{(\nu)}(t_{i,n}), \quad \nu = 0, 1, \ldots, r-k; \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{1}$$

Пусть $k \le (r+1)/2$ и функция $f \in C^{r-k}_{[a,b]}$. Интерполяционным локальным эрмитовым сплайном с дополнительными узлами назовем сплайн $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}) \in C^{r-k}_{[a,b]}$, однозначно определяющийся следующими условиями:

на каждом из интервалов $(t_{i,j-1,n}, t_{i,j,n})$ это алгебраический многочлен степени не выше r;

на каждом из интервалов $(t_{i-1,n}, t_{i,n})$, $i = 1, \ldots, n$, функция $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t)$ имеет $r-1$ непрерывную производную;

в узлах разбиения $\Delta_{n[a,b]}$ выполняются интерполяционные условия (1).

Если r нечетно и $k = (r+1)/2$, то такие сплайны называют эрмитовыми сплайнами. В случае $k = 1$ описанные сплайны называют сплайнами Субботина – Черных.

В работе [1] установлено, что для любых функций $f, z \in V^r_{[a,b]}$ справедливо равенство

$$\int_a^b (f(u) - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, u))\, d(z^{(r)}(u)) =$$

$$= (-1)^{r+1} \int_a^b (z(u) - s_{r,r-k+1}(z, \Delta_{n,\mu[a,b]}, u))\, d(f^{(r)}(u)). \tag{2}$$

Ввиду этого сплайны $s_{r,r-k+1}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]})$ и $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]})$ называются двойственными.

Полагая в равенстве (2)

$$z(u) = (-1)^r \frac{(u-t)^r_+}{r!},$$

убеждаемся, что для любой функции $f \in V^r_{[a,b]}$ при $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$, справедливо равенство

$$f(t) - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[a,b]}, t) = \int_a^b \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[a,b]})\, d(f^{(r)}(u)), \tag{3}$$

где

$$\mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[a,b]}) = -\frac{1}{r!}\left((u-t)^r_+ - s_{r,r-k+1}((\cdot - t)^r_+, \Delta_{n,\mu[a,b]}, u)\right). \tag{4}$$

Пусть

$$\mathcal{K}_{r,k,i}(t, \Delta_{n,\mu[0,1]}) = \int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[0,1]})\, du.$$

Введем в рассмотрение величину

$$\mathbb{K}_{r,k,p} = \| \mathcal{K}_{r,k,1}(\Delta_{1,\mu[0,1]}) \|_{p[0,1]}.$$

Теорема A. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots, p \in [1, \infty]$, $\beta = (r+1+1/p)^{-1}$, $\gamma \in (0, 1/(r+1))$, *функция* $f \in C^{r+1}_{[0,1]}$ *и* $\{\Phi_n(t)\}_{n=1}^{\infty}$ — *произвольная последовательность неотрицательных кусочно-непрерывных функций такая, что*

$$\| \Phi_n - |f^{(r+1)}| \|_{\infty[0,1]} \le \omega_n^{\gamma}, \tag{5}$$

где $\omega_n = \omega(f^{(r+1)}, 1/n)$ ($\omega(z,t)$ — *равномерный модуль непрерывности функции* z).

Тогда последовательность разбиений $\{\Delta^*_{n[0,1]}\}_{n=1}^{\infty}$, *определяемая равенствами*

$$\int\limits_0^{t^*_{k,n}} (\Phi_n(t) + \omega_n^{\gamma})^{\beta}\, dt = \frac{k}{n} \int\limits_0^1 (\Phi_n(t) + \omega_n^{\gamma})^{\beta}\, dt, \quad k = 0, 1, \ldots, n, \tag{6}$$

будет асимптотически оптимальной для сплайнов $s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]})$ *и функции* $f(t)$ *и при* $n \to \infty$ *выполняются соотношения*

$$\| f - s_{r,k}(f, \Delta^*_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[0,1]} = \inf_{\Delta_{n[0,1]}} \| f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[0,1]} (1 + o(1)) =$$

$$= \frac{\mathbb{K}_{r,k,p}}{n^{r+1}} \| f^{(r+1)} \|_{\beta[0,1]} (1 + o(1)). \tag{7}$$

В случае нечетных r и $k = (r+1)/2$ для функций $f \in C^{r+2}_{[0,1]}$ таких, что $|f^{(r+1)}(t)| > 0$, $t \in [0,1]$, этот результат получен в работах [2–4]. В работе [5] условие непрерывности $(r+2)$-й производной удалось снять и получить результат (7) для всех k и r; в работе [6] снято условие на знакопостоянство $(r+1)$-й производной и теорема получена в приведенном виде.

В данной работе мы покажем, что оценка (7) верна для функций из более общих, чем $C^{r+1}_{[0,1]}$, классов, в частности для функций с особенностями вида

$$\sum_{i=0}^{m} \frac{c_{i,n}}{(t - a_{i,n})^{\gamma_{i,n}}}.$$

Пусть функция $f(t)$ имеет односторонние производные $f^{(\nu)}(t \pm 0)$ в каждой точке $t \in (a, b)$. Для каждой такой функции положим

$$f^{((\nu))}(t) = \frac{1}{2}\left(f^{(\nu)}(t+0) + f^{(\nu)}(t-0) \right)$$

и функцию $f^{((\nu))}(t)$ будем называть ν-й „формальной производной" функции $f(t)$ в точке t. Ясно, что если в точке t функция $f^{(\nu-1)}(t)$ дифференцируема, то $f^{((\nu))}(t) = f^{(\nu)}(t)$.

Теорема. *Пусть* $r = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots, [(r-1)/2]$, $p \in [1, \infty]$, $\beta = (r + 1 + p^{-1})^{-1}$ *и функция* $f(t)$ *такова, что существует разбиение* $\{a_\nu\}_{\nu=0}^{m}$ *отрезка* $[0, 1]$ *и постоянные* A_ν, $\nu = 0, 1, \dots, m$, *такие, что на каждом интервале* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *функция* $f^{(r+1)}(t)$ *абсолютно непрерывна, а функция* $f^{(r+2)}(t)$ *почти всюду существует на* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *и для* $\alpha > -k-1$ *выполняется неравенство*

$$|f^{(r+2)}(t)| \le A_\nu (t - a_{\nu-1})^\alpha (a_\nu - t)^\alpha, \quad t \in (a_{\nu-1}, a_\nu). \tag{8}$$

Тогда для любой последовательности разбиений $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *при* $n \to \infty$ *справедливо соотношение*

$$\| f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[0,1]} \ge \frac{\mathbb{K}_{r,k,p}}{n^{r+1}} \| f^{((r+1))} \|_{\beta[0,1]} (1 + o(1)).$$

Доказательство теоремы опирается на несколько вспомогательных утверждений.

Пусть $\Delta^o_{n,r[0,1]}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$ точками $t^o_{i,j,n} = t_{i-1,n} + j\, h_{i-1/2,n}/r$, $i = 1, \dots, n$; $j = 0, 1, \dots, r$.

Лемма 1. *Для всех* $i = 1, 2, \dots, n$ *и* $t, u \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ *выполняется неравенство*

$$|\mathcal{K}_{r,r,i-1}(t, u, \Delta^o_{n,r[0,1]})| \le \frac{1}{r!} \min\{(u - t_{i-1,n})^r, (t_{i,n} - u)^r\}.$$

Доказательство. По определению, для $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ при любом $i = 1, 2, \dots, n$ сплайн $s_{r,r}(f, \Delta^o_{n,r[0,1]})$ является интерполяционным полиномом Лагранжа с узлами интерполяции $t^o_{i,j,n}$, $j = 0, 1, \dots, r$, т. е. имеет вид

$$s_{r,r}(f, \Delta^o_{n,r[0,1]}, t) = \sum_{j=0}^{r} f\left(t^o_{i,j,n}\right) \ell_j(t),$$

где

$$\ell_j(t) = \prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \ne j}}^{r} \left(t - t^o_{i,\nu,n}\right) \left(\prod_{\substack{\nu=0 \\ \nu \ne j}}^{r} \left(t^o_{i,j,n} - t^o_{i,\nu,n}\right) \right)^{-1}. \tag{9}$$

Для $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ справедливо равенство

$$f(t) - s_{r,r}(f, \Delta^o_{n,r[0,1]}, t) = \int_{t_{i-1,n}}^{t_{i,n}} f'(u) \frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathcal{K}_{r,r,i-1}\left(u, t, \Delta^o_{n,r[0,1]}\right) du,$$

при этом функция $\partial^r / \partial u^r\, \mathcal{K}_{r,r,i-1}\left(u, t, \Delta^o_{n,r[0,1]}\right)$ (по переменной u) является кусочно-постоянной с чередующими знак разрывами, равными $\ell_j(t)$ в точках $t^o_{i,j,n}$, $j = 0, \dots, r$, и 1 в точке t (см. [7]), и для $t \in [t_{i-1,n}, t_{i,n}]$ выполняется неравенство

$$|\ell_j(t)| \le 1.$$

Таким образом,

$$-1 \le \frac{\partial^r}{\partial u^r} \mathcal{K}_{r,r,i-1}\left(u, t, \Delta^o_{n,r[0,1]}\right) \le 1.$$

Поэтому

$$\mathcal{K}_{r,r,i-1}\left(u,t,\Delta^o_{n,r[0,1]}\right) = \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{t_{i-1,n}}^{u} \left(\xi - t_{i-1,n}\right)^{r-1} \frac{\partial^r}{\partial \xi^r} \mathcal{K}_{r,r,i-1}\left(\zeta, t, \Delta^o_{n,r[0,1]}\right) d\xi \le$$

$$\le \frac{1}{(r-1)!} \int\limits_{t_{i-1,n}}^{u} \left(\xi - t_{i-1,n}\right)^{r-1} d\xi = \frac{1}{r!}\left(u - t_{i-1,n}\right)^r.$$

Аналогично получаем

$$\mathcal{K}_{r,r,i-1}\left(u, t, \Delta^o_{n,r[0,1]}\right) \le \frac{1}{r!}\left(t_{i,n} - u\right)^r,$$

что и завершает доказательство леммы.

Лемма 2. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots,$ $k = 1, 2, \ldots, [(r-2)/2]$, $f \in C^{r+1}_{(0,1]}$, $p \in [1, \infty]$, $\vartheta = (r + p^{-1})^{-1}$, $\gamma \in (-k-1, 0)$, $n = 1, 2, \ldots$ *и существует такая постоянная* $A > 0$, *что*

$$|f^{(r+1)}(t)| \le A\, t^{\gamma}, \qquad t \in (0, 1]. \tag{10}$$

Тогда найдутся постоянные $C_i = C_i(A, r, p, \gamma)$, $i = 1, 2$, *и последовательность разбиений* $\left\{\Delta^*_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ *такие, что*

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]}) \|_{p[0,1]} \le \frac{C_1}{n^{r+1}} \tag{11}$$

и

$$\| f^{(r)} - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]}) \|_{\vartheta[0,1]} \le \frac{C_2}{n}. \tag{12}$$

Доказательство. Пусть вначале $p \in [1, \infty)$. Положим $N = [n/2]$ ($n = 1$, $2, \ldots$ и $[\,\cdot\,]$ — целая часть числа) и определим узлы разбиения $\Delta^*_{n[0,1]}$ равенствами

$$t^*_{i,n} = \left(\frac{i}{N^2}\right)^{\frac{1}{\gamma\eta+1}}, \qquad i = 0, 1, \ldots, N, \tag{13}$$

и

$$t^*_{i+N,n} = \left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{1}{\gamma\eta+1}}, \qquad i = 1, \ldots, N, \tag{14}$$

где $\eta = (r + 1 + p^{-1})^{-1}$.

На промежутке (0, 1] функция $t^{\gamma\eta}$ положительная, монотонно убывает, поэтому верно соотношение

$$\int\limits_{t^*_{i,n}}^{t^*_{i+1,n}} t^{\gamma\eta}\, dt \ge \left(t^*_{i+1,n}\right)^{\gamma\eta} \int\limits_{t^*_{i,n}}^{t^*_{i+1,n}} dt = \left(t^*_{i+1,n}\right)^{\gamma\eta} h^*_{i+1/2,n}, \quad i = 1, \ldots, n-1, \tag{15}$$

где $h^*_{i+1/2,n} = t^*_{i+1,n} - t^*_{i,n}$ — шаг разбиения Δ^*_n.

Отсюда, используя определение узлов для $i > N$, имеем

$$h^*_{i+1/2,n} \le \frac{1}{\gamma\eta+1}\frac{1}{N}\left(\frac{i+1}{N}\right)^{-\frac{\gamma\eta}{\gamma\eta+1}}. \tag{16}$$

Из равенства (3) и условия (10) получаем

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^p_{p[t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]} \le \frac{1}{N^{p/\eta}} \frac{A^p \mathbb{K}^p_{r,1,p}}{(\gamma\eta+1)^{p/\eta}} \left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}}, \tag{17}$$

$$i = N, \ldots, n-1.$$

Вследствие выбора γ имеем $\gamma p/(\gamma\eta+1) < 0$ и

$$\left(1+\frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}} \le 2^{-\frac{\gamma p}{\gamma\eta+1}}.$$

Поэтому

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^p_{p[t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]} \le \frac{C_0^p}{N^{p/\eta}}, \qquad i = N, \ldots, n-1,$$

где

$$C_0 \le \frac{A\,\mathbb{K}_{r,1,p}}{(\gamma\eta+1)^{1/\eta}}\, 2^{-\frac{\gamma}{\gamma\eta+1}}.$$

Таким образом,

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^p_{p[t^*_{N,n},\, 1]} = \sum_{i=N}^{n-1} \| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^p_{p[t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]} \le$$

$$\le \frac{C_0^p}{N^{p/\eta}}(N-1) \le \frac{C_0^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}. \tag{18}$$

Пусть теперь $t \in [0,\ t^*_{1,n}]$, тогда с учетом леммы 1 из (3) имеем

$$|f(t) - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]}, t)| = \left| \int_0^{t^*_{1,n}} \mathcal{K}_{r,r,1}(t, u, \Delta^*_{n,r[0,1]})\, f^{(r+1)}(u)\, du \right| \le$$

$$\le \frac{A}{r!} \int_0^{t^*_{1,n}} u^\gamma \min\{u^r, (t^*_{1,n} - u)^r\}\, du \le$$

$$\le \frac{A}{r!} \int_0^{t^*_{1,n}} u^{\gamma+r}\, du = \frac{A}{r!\,(\gamma+r+1)} \left(\frac{1}{N}\right)^{\frac{2(\gamma+r+1)}{\gamma\eta+1}}. \tag{19}$$

Отсюда непосредственно получаем

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^p_{p[0,\, t^*_{1,n}]} \le \frac{C_1^p}{N^{(r+1)p}} \le \frac{C_1^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}, \tag{20}$$

где

$$C_1 \le \frac{A}{r!\,(\gamma+r+1)}.$$

Кроме того, из (18) следует

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^p_{p[t^*_{1,n},\, t^*_{N,n}]} \le \frac{C_0^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{2p(r+1)}} < \frac{C_0^p\, 2^{p(r+1)}}{n^{p(r+1)}}. \tag{21}$$

Сопоставляя оценки (18) – (21), получаем неравенство (11).

Докажем теперь соотношение (12). Ясно, что для $t \in [\, t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]$, $i > N$, будет выполняться равенство

$$f^{(r)}(t) - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]}, t) = \int\limits_{t^*_{i,n}}^{t^*_{i+1,n}} f^{(r+1)}(u)\, \frac{\partial^r}{\partial t^r} \mathcal{K}_{r,r,i}\big(t, u, \Delta^*_{n,r[0,1]}\big)\, du$$

и, следовательно, имеет место неравенство

$$\| f^{(r)} - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^\vartheta_{\vartheta[t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]} \le A^\vartheta (t^*_{i,n})^{\gamma\vartheta}\, \mathbb{K}^\vartheta_{r,1,\vartheta,r} (h^*_{i+1/2,n})^{1+\vartheta},$$

где

$$\mathbb{K}_{r,1,\vartheta,r} = \left\| \int\limits_0^1 \frac{\partial^r}{\partial(\cdot)^r} \mathcal{K}_{r,r,1}(\,\cdot\,, u, \Delta_1)\, du \right\|_{\vartheta[0,1]}.$$

Используя в этом неравенстве соотношения (14) и (16), при $i > N$ получаем

$$\| f^{(r)} - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^\vartheta_{\vartheta[t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]} \le \frac{(\mathbb{K}_{r,1,\vartheta,r}\, A)^\vartheta}{(N(\gamma\eta+1))^{1+\vartheta}} \left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{\gamma\vartheta}{\gamma\eta+1}} \left(\frac{i+1}{N}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}} =$$

$$= \frac{(\mathbb{K}_{r,\vartheta,r}\, A)^\vartheta}{(N(\gamma\eta+1))^{1+\vartheta}} \left(\frac{i}{N}\right)^{\frac{\gamma\vartheta - \gamma\eta - \gamma\vartheta\eta}{\gamma\eta+1}} \left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}.$$

Кроме того,

$$\left(1 + \frac{1}{i}\right)^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}} \le 2^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}.$$

Следовательно, при всех $i > N$ будет выполняться неравенство

$$\| f^{(r)} - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^\vartheta_{\vartheta[t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]} \le \frac{C_2^\vartheta}{N^{1+\vartheta}},$$

где

$$C_2 \le 2^{-\frac{\gamma\eta(1+\vartheta)}{\gamma\eta+1}}\, \frac{\mathbb{K}_{r,1,\vartheta,r}\, A}{(\gamma\eta+1)^{1+1/\vartheta}}.$$

Таким образом, имеем

$$\| f^{(r)} - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^\vartheta_{\vartheta[t^*_{N,n},\, 1]} = \sum_{i=N}^{n-1} \| f^{(r)} - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^\vartheta_{\vartheta[t^*_{i,n},\, t^*_{i+1,n}]} \le$$

$$\le \frac{C_2^\vartheta}{N^{1+\vartheta}}(N-1) \le \frac{C_2^\vartheta\, 2^\vartheta}{n^\vartheta}.$$

Аналогично (21) и (23) показываем, что

$$\| f^{(r)} - s^{(r)}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]})\|^\vartheta_{\vartheta[0,\, t^*_{N,n}]} \le \frac{C_3^p}{n^\vartheta}. \tag{22}$$

Это и завершает доказательство леммы 2 при $p \in [1, \infty)$.

Для случая $p = \infty$ доказательство аналогично.

***Замечание* 1.** Нетрудно видеть, что если Δ_M — произвольное разбиение отрезка [0, 1] и $\Delta^*_{n[0,1]}$ — разбиения, фигурирующие в лемме 2, то для разбиения $\Delta^*_{n[0,1]} \cup \Delta_M$ будут выполняться неравенства (11), (12) (с теми же постоянными C_1 и C_2).

Лемма 3. *Пусть* $r = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots, [(r-2)/2]$, $p \in [1, \infty]$, $\theta = (r + p^{-1})^{-1}$, $\gamma \in (-k-1, 0)$ *и функция* $f(t)$ *такова, что существует разбиение* $\{a_\nu\}_{\nu=0}^m$ *отрезка* [0, 1] *и постоянные* A_ν, $\nu = 0, 1, \ldots, m$, *такие, что на каждом интервале* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *функция* $f^{(r)}(t)$ *абсолютно непрерывна, а функция* $f^{(r+1)}(t)$ *почти всюду существует на* $(a_{\nu-1}, a_\nu)$ *и*

$$|f^{(r+1)}(t)| \le A_\nu (t - a_{\nu-1})^\gamma (a_\nu - t)^\gamma, \quad t \in (a_{\nu-1}, a_\nu).$$

Тогда найдутся постоянные $\mathbf{C}_{i,n} = \mathbf{C}_{i,n}(\{A_\nu\}_{\nu=0}^m, r, p, \gamma)$, $i = 1, 2$, *и последовательность разбиений* $\{\Delta^*_n\}_{n=1}^\infty$ *такие, что для любого разбиения* Δ_M *отрезка* [0, 1] *будут справедливы соотношения*

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]} \cup \Delta_M) \|_{p[0,1]} \le \frac{\mathbf{C}_1}{n^{r+1}} \tag{23}$$

и

$$\| f^{((r))} - s^{((r))}_{r,r}(f, \Delta^*_{n,r[0,1]} \cup \Delta_M) \|_{\vartheta[0,1]} \le \frac{\mathbf{C}_2}{n}. \tag{24}$$

Доказательство. Пусть $k = n/(2m)$. Применяя для каждого фиксированного ν, $\nu = 1, \ldots, m$, на множестве $(a_{\nu-1}, (a_{\nu-1} + a_\nu)/2]$ лемму 2, получаем, что найдется разбиение $\Delta^*_{k[a_{\nu-1}, (a_{\nu-1}+a_\nu)/2]}$ такое, что будут выполняться неравенства

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{k,r[a_{\nu-1}, (a_{\nu-1}+a_\nu)/2]}) \|_{p[a_{\nu-1}, (a_{\nu-1}+a_\nu)/2]} \le \frac{C_1}{k^{r+1}} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{r+1+\gamma+1/p}$$

и

$$\| f^{((r))} - s^{((r))}_{r,r}(f, \Delta^*_{k,r[a_{\nu-1}, (a_{\nu-1}+a_\nu)/2]}) \|_{\vartheta[a_{\nu-1}, (a_{\nu-1}+a_\nu)/2]} \le \frac{C_2}{k} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{1+\gamma+1/\vartheta}.$$

Аналогично получаем, что существует разбиение $\Delta^*_{k,r[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]}$ такое, что

$$\| f - s_{r,r}(f, \Delta^*_{k,r[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]}) \|_{p[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]} \le \frac{C_1}{k^{r+1}} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{r+1+\gamma+1/p}$$

и

$$\| f^{((r))} - s^{((r))}_{r,r}(f, \Delta^*_{k,r[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]}) \|_{\vartheta[(a_{\nu-1}+a_\nu)/2, a_\nu]} \le \frac{C_2}{k} \left(\frac{a_\nu - a_{\nu-1}}{2} \right)^{1+\gamma+1/\vartheta}.$$

Отсюда очевидным образом следует утверждение леммы 3 при $p \in [1, \infty)$. Аналогично доказывается лемма 3 для $p = \infty$.

Перейдем к доказательству теоремы. Выберем число $N = [n^{(r+1)/(r+2)}] + 1$. В силу леммы 3 существует разбиение $\nabla_{N[0,1]} = \{\tau_{i,n}\}_{i=0}^{N}$, для которого выполняется утверждение леммы 3.

Пусть $\mathbb{E}$ — множество всех точек из $[0, 1]$, в которых функция $f^{(r+1)}(t)$ непрерывна и не обращается в нуль. Меру этого множества обозначим $\operatorname{mes}\mathbb{E}$.

Для каждого фиксированного $i = 1, 2, \ldots, N$ обозначим через $[t_{j_{i,n}}, t_{\mu_{i,n}}]$ отрезок наибольшей длины, целиком лежащий в промежутке $[\tau_{i,n}, \tau_{i+1,n}]$; таких отрезков не больше N.

Пусть еще $\nabla^*_{M[0,1]} = \{\tau^*_{i,n}\}_{i=0}^{M}$ — объединение точек разбиения $\nabla_{N[0,1]}$ и всех точек $t_{j_{i,n}}$, $t_{\mu_{i,n}}$. Очевидно, что $M \le 2N$.

Положим

$$\mathbb{E}_M = \bigcup_{i=0}^{M-1} \{\mathbb{E} \cap [\tau^*_{i,n}, \tau^*_{i+1,n}]\}$$

и

$$\mathbb{E}^o_M = \bigcup_{i:[\tau^*_{i,n}, \tau^*_{i+1,n}] \subset \mathbb{E}_M} [\tau^*_{i,n}, \tau^*_{i+1,n}].$$

Понятно, что множество $\mathbb{E}^o_M$ состоит из конечного числа замкнутых непересекающихся интервалов.

Если последовательность разбиений $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ такова, что $\lim_{n\to\infty} h_n \ne 0$ на множестве $\mathbb{E}$, то при $n \to \infty$

$$\| f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu}) \|_{p[0,1]} \not\to 0.$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что последовательность разбиений такова, что $h_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда для любого $\delta > 0$ найдется такое число $M^o = M^o(\delta) > 0$, что при $M > M^o$

$$\operatorname{mes}\mathbb{E} \le \operatorname{mes}\mathbb{E}^o_M + \delta/2.$$

Пусть еще

$$\overline{\mathbb{E}}_M = \bigcup_{i:[t_{i,n}, t_{i+1,n}] \subset \mathbb{E}^o_M} [t_{i,n}, t_{i+1,n}].$$

Очевидно,что для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$

$$\| f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} =$$

$$= \| f - s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}) + s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}) -$$

$$- s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) + s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) -$$

$$- s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \ge$$

$$\ge \| s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}) - s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} -$$

$$- \| f - s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} -$$

$$- \| s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) - s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]}.$$

Используя лемму 3, непосредственно получаем

$$\| f - s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} = O\left(\frac{1}{n^{r+2}}\right),$$

кроме того,

$$\| s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) - s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} =$$

$$= \| s_{r,k}(f - s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]}.$$

Найдется такая постоянная C, что

$$\| s_{r,k}(g, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \le C \| g \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]}.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что найдется константа C_0 такая, что

$$\| s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) - s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} \le \frac{C_0}{n^{r+2}}.$$

Пусть $i: [t_{i,n}, t_{i+1,n}] \subset \overline{\mathbb{E}}_M$, тогда для любого $t \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$,

$$\sigma_{i,n}(f, t) = s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}, t) - s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}, t) =$$

$$= \int\limits_0^1 \mathcal{K}_{r,k,i}(t, u, \Delta_{n,\mu[a,b]}) s^{(r+1)}_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}, u)\, du.$$

По определению для всех $u \in [t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ имеет место тождество

$$s^{(r+1)}_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}, u) \equiv c_{i+1/2,n} \equiv \text{const},$$

следовательно, на промежутке $[t_{i,n}, t_{i+1,n}]$ выполняются соотношения

$$\sigma_{i,n}(f, t) = c_{i+1/2,n} \mathcal{K}_{r,k,i}(t, \Delta_{n,\mu[0,1]})$$

и

$$\| \sigma_{i,n}(f) \|^p_{p[t_{i,n}, t_{i+1,n}]} = \mathbb{K}^p_{r,k,p} \left| c_{i+1/2,n} \right|^p h^{(r+1)p+1}_{i+1/2,n} =$$

$$= \mathbb{K}^p_{r,k,p} \left(\int\limits_{t_{i,n}}^{t_{i+1,n}} \left| c_{i+1/2,n} \right|^\beta dt \right)^{p/\beta}.$$

Из неравенства Йенсена следует, что для любого $\gamma > 0$

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n C^\gamma_{i,n} \,\middle|\, C_i \ge 0; \ \sum_{i=1}^n C_i = \mathbf{C} \right\} = \mathbf{C}^\gamma n^{1-\gamma} \tag{25}$$

и минимум достигается тогда и только тогда, когда $C_{i,n} = \mathbf{C}/n$, $i = 1, \ldots, n$.

Отсюда на основании изложенного получаем

$$\| s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}) - s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|^p_{p_{\overline{\mathbb{E}}_M}} \ge$$

$$\ge \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{n_0^{p(r+1)}} \left(\int\limits_{\overline{\mathbb{E}}_M} \left| s^{(r+1)}_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}, t) \right|^\beta dt \right)^{p/\beta}, \tag{26}$$

где n_0 — число составных промежутков множества $\overline{\mathbb{E}}_M$.

По построению, множество $\overline{\mathbb{E}}_M$ замкнуто и состоит из конечного числа интервалов, максимальная длина которых стремится к нулю при $n \to \infty$. Учитывая этот факт, заключаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_{\overline{\mathbb{E}}_M} \left| s^{(r+1)}_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}, t) \right|^\beta dt - \int\limits_{\overline{\mathbb{E}}_M} \left| f^{(r+1)}(t) \right|^\beta dt \right| = 0.$$

Отсюда с учетом очевидного неравенства $n_0 < n$ и леммы 3 получаем

$$\| s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}) - s_{r,k}(s_{r+1,r+1}(f, \Delta^o_{M,r+1[0,1]}), \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|^p_{p_{\overline{\mathbb{E}}_M}} \geq$$

$$\geq \frac{\mathbb{K}^p_{r,k,p}}{n^{p(r+1)}} \left(\int\limits_{\overline{\mathbb{E}}_M} \left| f^{(r+1)}(t) \right|^\beta dt \right)^{p/\beta}.$$

Далее, согласно теореме об абсолютной сходимости интеграла Лебега, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta_0 > 0$ такое, что для всех $\delta < \delta_0$ существует такое число N, что при $M > N$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_{\overline{\mathbb{E}}_M} \left| f^{(r+1)}(t) \right|^\beta dt - \int\limits_{[0,1]} \left| f^{((r+1))}(t) \right|^\beta dt \right| < \varepsilon \tag{27}$$

и, следовательно,

$$\| f - s_{r,k}(f, \Delta_{n,\mu[0,1]}) \|_{p[0,1]} \geq \frac{\mathbb{K}_{r,k,p}}{n^{r+1}} \left(\int\limits_{[0,1]} \left| f^{((r+1))}(t) \right|^\beta dt - \varepsilon \right)^{1/\beta}$$

для любого $\varepsilon > 0$.

В случае $p = \infty$ доказательство аналогично, только вместо (25) нужно использовать соотношение

$$\min \max \left\{ C_i^\gamma \,\middle|\, C_i \geq 0;\ \sum_{i=1}^n C_i = \mathbf{C} \right\} = \left(\frac{\mathbf{C}}{n} \right)^\gamma.$$

1. *Лигун А. А.* Об одном свойстве интерполяционных сплайн-функций // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 4. – С. 507–514.
2. *Азарин И. С., Бармин В. И.* Аппроксимация кусочно-линейными функциями // Мат. сб. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 25–26.
3. *Гребенников А. И.* О выборе узлов при аппроксимации функций сплайнами // Журн. вычислит. математики и мат. физики. – 1976. – **16**, № 1. – С. 219–223.
4. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при интерполировании функций эрмитовыми сплайнами // An. math. – 1976. – **2**. – P. 267–275.
5. *Лигун А. А., Сторчай В. Ф.* О наилучшем выборе узлов при приближении функций локальными эрмитовыми сплайнами // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 6. – С. 824–830.
6. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Оптимальный выбор узлов при приближении функций сплайнами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1984. – № 6. – С. 18–22.
7. *Lee D.* A Simple approach to cardinal Lagrange and periodic Lagrange splines // J. Approxim. Theory. – 1986. – **47**. – P. 93–100.

Получено 15.05.98,
после доработки – 02.09.98