УДК 512.53

Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок (Луган. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ПОЛУГРУППЫ СИЛЬНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРАФОВ И ГИПЕРГРАФОВ

We define a class of infinite undirected graphs and a class of infinite n-uniform hypergraphs and prove that the semigroup of all strong endomorphisms of graphs and hypergraphs from these classes is isomorphic to the wreath product of a transformation monoid and a small category. We establish criterial conditions for the regularity of the semigroup of strong endomorphisms of infinite n-uniform hypergraphs.

Визначено один клас нескінченних неорієнтованих графів, один клас нескінченних n-однорідних гіперграфів і доведено, що будь-яка напівгрупа всіх сильних ендоморфізмів графів і гіперграфів таких класів ізоморфна вінцевому добутку моноїда перетворень і деякої малої категорії. Знайдено критеріальні умови регулярності напівгрупи сильних ендоморфізмів нескінченних n-однорідних гіперграфів.

1. Введение. Одним из методов исследования алгебраических систем является изучение множеств отображений, связанных с исходной системой определенным образом. Так, при изучении графов и их обобщений — гиперграфов — полезными оказываются их полугруппы эндоморфизмов. Исследованию различных свойств полугрупп эндоморфизмов графов и гиперграфов посвящено достаточно большое количество работ (см. обзоры [1 – 3]). Вместе с тем лишь немногие работы посвящены изучению полугрупп эндоморфизмов графов и их подполугрупп с точностью до изоморфизма (см., например, [4 – 6]).

Понятие сильного эндоморфизма графа было введено в [7] и использовалось для различных целей. Одним из первых структурных результатов о моноидах сильных эндоморфизмов является теорема Кнауэра – Нипорте [4] о точном представлении моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер в виде сплетения группы подстановок и малой категории. При этом, как было показано в [4], для бесконечного случая данная теорема не верна. В работах [8, 9] сильные эндоморфизмы графов вместе с другими типами эндоморфизмов используются для определения таких понятий, как спектр эндоморфизма и эндотип графа, с помощью которых можно классифицировать графы. Описание графов, у которых полугруппы сильных эндоморфизмов являются регулярными моноидами, рассматривалось в [10, 11]. Отношения Грина на моноиде сильных эндоморфизмов графа и некоторые их комбинаторные свойства изучались в роботах [12, 13]. В настоящей статье мы изучаем строение моноидов сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов.

Опишем кратко построение статьи. Второй пункт содержит все основные понятия. В третьем пункте доказывается, что моноид всех сильных эндоморфизмов любого бесконечного неориентированного графа заданного класса может быть точно представлен как сплетение подходящего моноида преобразований и некоторой малой категории. Этот результат дополняет основной результат работы [4]. В четвертом пункте показано, что любой бесконечный n-однородный гиперграф является обобщенным лексикографическим произведением некоторых гиперграфов. Доказано, что полугруппа всех сильных эндоморфизмов любого бесконечного n-

однородного гиперграфа заданного класса изоморфна сплетению моноида сильных мономорфизмов канонического фактор-гиперграфа и малой категории. В последнем пункте изучается регулярность моноида сильных эндоморфизмов бесконечных n-однородных гиперграфов.

2. Основные понятия. Пусть V — непустое множество, E — некоторое множество неупорядоченных пар элементов из V. Пара $X = (V, E)$ называется неориентированным графом с множеством вершин V и множеством ребер E. Множество вершин и ребер графа X будем обозначать также через $V(X)$ и $E(X)$ соответственно. Далее под графом X будем понимать неориентированный граф (V, E) без кратных ребер. Говорят, что две вершины x и y графа X смежны, если множество $\{x, y\}$ является ребром этого графа. Множеством связности $N(x)$ вершины $x \in X$ называется множество всех вершин графа X, смежных с вершиной x.

Определим на множестве вершин графа X отношение эквивалентности ν, положив

$$x\nu y \Leftrightarrow N(x) = N(y).$$

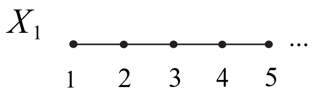
Через x_ν обозначим класс эквивалентности по ν, содержащий x. Каноническим сильным фактор-графом X/ν называется граф, множество вершин которого — фактор-множество V/ν, а множество $\{a_\nu, b_\nu\}$ является ребром тогда и только тогда, когда $\{a, b\} \in E(X)$.

Если X и Y — графы, то гомоморфизмом графа X в Y называется отображение $f\colon X \to Y$, для которого из того, что $\{x, y\} \in E(X)$, следует, что $\{xf, yf\} \in E(Y)$ для любых x, $y \in X$. Если f биективно и f^{-1} тоже гомоморфизм, то f называется изоморфизмом. Гомоморфизм $f\colon X \to Y$ называется сильным гомоморфизмом, если из того, что $\{xf, yf\} \in E(Y)$, следует, что $\{x, y\} \in E(X)$ для любых x, $y \in X$. Группу всех автоморфизмов графа X обозначим $\mathrm{Aut}X$, а моноид его сильных эндоморфизмов — $S\mathrm{End}X$. Отметим, что композиция отображений везде в работе осуществляется слева направо.

Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех бесконечных неориентированных графов X без кратных ребер, для которых при любом $\varphi \in S\mathrm{End}X$ выполняется условие

$$\forall\, x_\nu \in X/\nu \;\; \exists\, y_\nu \in X/\nu\colon x_\nu\varphi \subseteq y_\nu. \tag{1}$$

Определенный таким образом класс $\mathfrak{G}$ непуст. Рассмотрим, например, бесконечный граф



Пусть $k \in V(X_1)$ — фиксированное число. Тогда преобразование

$$x\varphi_k = x + k - 1$$

задает сильный эндоморфизм графа X_1. Более того, все сильные эндоморфизмы графа X_1 исчерпываются сильными эндоморфизмами вида φ_k, $k \in V(X_1)$.

Понятно, что тождественное преобразование является сильным эндоморфизмом, который можно представить как φ_1.

Пусть $\varphi \in S\mathrm{End}X_1$ и $a, b \in V(X_1)$ такие, что $a\varphi = b$. Если $a = b = 1$, то $\varphi = \varphi_1$.

Если $b = 1$, а элемент $a \neq 1$, то $(a-1)\varphi = 2 = (a+1)\varphi$. Поскольку $\{a+1, a+2\} \in E(X_1)$, то $\{a+1, a+2\}\varphi = \{(a-1)\varphi, (a+2)\varphi\} \in E(X_1)$, откуда $\{a-1, a+2\} \in E(X_1)$, и мы приходим к противоречию.

Пусть $b \neq 1$ (a — произвольный), тогда $(a+1)\varphi$ может быть равным либо $b+1$, либо $b-1$. Предположим сначала, что $(a+1)\varphi = b-1$. В случае, когда $(a+2)\varphi = b$, получаем, что $(a+3)\varphi$ равно $b-1$ или $b+1$. В каждом из этих случаев $\{a, a+3\} \in E(X_1)$, так как φ — сильный эндоморфизм. Следовательно, $(a+2)\varphi = b-2$. Рассуждая аналогично, можно показать, что последовательность образов $a\varphi, (a+1)\varphi, (a+2)\varphi, \ldots, (a+b-1)\varphi$ убывает. Тогда $(a+b-1)\varphi = 1$, где $a+b-1 \neq 1$, и, как было показано выше, в этом случае получаем противоречие. Следовательно, $(a+1)\varphi = b+1$.

Рассуждая так же, получаем $(a+2)\varphi = b+2$, $(a+3)\varphi = b+3$ и т. д. Тогда если $a = 1$, то единственным образом получаем

$$1\varphi = b,\ 2\varphi = b+1,\ 3\varphi = b+2,\ \ldots\ ,\ n\varphi = b+n-1,\ \ldots$$

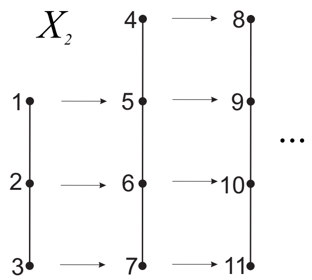
и, следовательно, $\varphi = \varphi_b$.

Кроме того, поскольку все классы эквивалентности по отношению ν одноэлементны, для любого класса $x_\nu \in X_1/\nu$ имеем

$$x_\nu\varphi_k = \{x\varphi_k\} = \{x+k-1\} = (x+k-1)_\nu,$$

т. е. выполняется условие (1). Таким образом, $X_1 \in \mathfrak{G}$.

Заметим, что класс $\mathfrak{G}$ не совпадает с классом всех бесконечных неориентированных графов без кратных ребер. Например, граф X_2 (см. рисунок) не принадлежит классу $\mathfrak{G}$.



Действительно, пусть преобразование γ графа X_2 такое, как показано на рисунке. Нетрудно убедиться, что γ — сильный эндоморфизм, при этом в точности две вершины этого графа ν-эквивалентны и образовывают единственный двухэлементный класс $1_\nu = \{1, 3\}$ в каноническом сильном фактор-графе X_2/ν. Однако $1\gamma = 5 \in 5_\nu$, а $3\gamma = 7 \in 7_\nu$, следовательно, для класса 1_ν условие (1) не выполняется.

3. Сильные эндоморфизмы бесконечных неориентированных графов. Обозначим через $S\mathrm{Mon}X$ полугруппу всех сильных инъективных эндоморфизмов графа X. Элементы из $S\mathrm{Mon}X$ будем называть сильными мономорфизмами. Понятно, что если граф X конечный, то $S\mathrm{Mon}X = \mathrm{Aut}X$.

Лемма 3.1. *Пусть X — произвольный граф класса $\mathfrak{G}$. Преобразование φ графа X будет его сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда преобразование*

$$\varphi^*\colon X/\nu \to X/\nu\colon x_\nu \mapsto (x\varphi)_\nu$$

является сильным мономорфизмом фактор-графа X/ν.

Доказательство. Пусть $\varphi \in S\mathrm{End}X$, тогда φ отображает элементы из разных классов эквивалентности ν в элементы разных классов. Действительно, если $x,\ y \in X$ такие, что $x_\nu \neq y_\nu$, то, не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что существует вершина $a \in N(x)$, которая не принадлежит $N(y)$. Тогда $\{x,a\}\varphi = \{x\varphi, a\varphi\} \in E(X)$ и $\{y,a\}\varphi = \{y\varphi, a\varphi\} \notin E(X)$, следовательно, $(x\varphi)_\nu \neq (y\varphi)_\nu$. Таким образом, φ^* инъективно.

Пусть $x,\ y \in X$. Тогда

$$\{x_\nu, y_\nu\} \in E(X/\nu) \Leftrightarrow \{x,y\} \in E(X) \Leftrightarrow \{x\varphi, y\varphi\} \in E(X) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(x\varphi)_\nu, (y\varphi)_\nu\} = \{x_\nu, y_\nu\}\varphi^* \in E(X/\nu).$$

Таким образом, φ^* — сильный мономорфизм графа X/ν.

Пусть теперь преобразование φ графа X такое, что $\varphi^* \in S\mathrm{Mon}X/\nu$. Тогда для любых $x,\ y \in X$

$$\{x,y\} \in E(X) \Leftrightarrow \{x_\nu, y_\nu\} \in E(X/\nu) \Leftrightarrow \{x_\nu, y_\nu\}\varphi^* =$$

$$= \{(x\varphi)_\nu, (y\varphi)_\nu\} \in E(X/\nu) \Leftrightarrow \{x\varphi, y\varphi\} \in E(X).$$

Лемма 3.1 доказана.

Предложение 3.1. *Для каждого графа X класса $\mathfrak{G}$ справедливо $S\mathrm{End}X/\nu = S\mathrm{Mon}X/\nu$.*

Доказательство. Пусть $\pi \in S\mathrm{End}X/\nu$. Зафиксируем в каждом классе $A \in X/\nu$ по представителю $\hat{A}$ и определим на множестве X преобразование f, положив $af = \widehat{a_\nu\pi}$ для всех $a \in X$. Для любых не ν-эквивалентных $x,\ y \in X$

$$\{x,y\} \in E(X) \Leftrightarrow \{x_\nu, y_\nu\} \in E(X/\nu) \Leftrightarrow \{x_\nu\pi, y_\nu\pi\} \in E(X/\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\widehat{x_\nu\pi}, \widehat{y_\nu\pi}\} = \{x,y\}f \in E(X).$$

Если же $x\nu y$, то

$$\{x,y\} \in E(X) \Leftrightarrow \{x_\nu\} \in E(X/\nu) \Leftrightarrow \{x_\nu\pi\} \in E(X/\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\widehat{x_\nu\pi}\} = \{x,y\}f \in E(X).$$

Таким образом, $f \in S\mathrm{End}X$ и по лемме 3.1 $f^* = \pi \in S\mathrm{MonX}/\nu$.

Предложение 3.1 доказано.

Обобщенным лексикографическим произведением $U[(Y_u)_{u\in U}]$ графа X и графов $(Y_u)_{u\in U}$ называется такой граф, у которого

$$V(U[(Y_u)_{u\in U}]) = \{(u, y_u) | u \in U, y_u \in Y_u\},$$

а $\{(u,y_u),(v,y'_v)\}$ является ребром $U[(Y_u)_{u\in U}]$ тогда и только тогда, когда $\{u,v\} \in E(U)$ или $u = v$ и $\{y_u, y'_u\} \in E(Y_u)$.

Вполне несвязный граф, т. е. граф без ребер, называется 0-графом.

Предложение 3.2 [4]. *Пусть X — произвольный неориентированный граф без кратных ребер, $U = X/\nu$ — его канонический сильный фактор-граф, Y_u, $u \in U$ — 0-графы такие, что $|Y_u| = |u|$ для всех $u \in U$. Тогда*

$$X \cong U[(Y_u)_{u \in U}].$$

Далее будем отождествлять вершины графа X и соответствующие им элементы из обобщенного лексикографического произведения $U[(Y_u)_{u\in U}]$.

Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория, R — моноид, который действует справа на множестве $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ объектов этой категории, и $M = \bigcup\limits_{x,y\in \operatorname{Ob}\mathcal{C}} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(x,y)$ — множество всех морфизмов категории $\mathcal{C}$. Через $\operatorname{Map}(\operatorname{Ob}\mathcal{C}, M)$ обозначим множество всех отображений из $\operatorname{Ob}\mathcal{C}$ в M.

Положим

$$W = \{(r,f)|\ r \in R,\ f \in \operatorname{Map}(\operatorname{Ob}\mathcal{C}, M),\ xf \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(x, xr) \text{ для всех } \ x \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}\}$$

и для всех (r,f), $(s,g) \in W$ определим умножение

$$(r,f)(s,g) = (rs, fg_r),$$

где $x(fg_r) = xf(xr)g$ для любого $x \in \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ и $xf(xr)g$ — композиция морфизмов xf и $(xr)g$ в категории $\mathcal{C}$. Заданная таким образом операция ассоциативна. Кроме того, в полугруппе W есть единица $(1,e)$, где $e \in \operatorname{Map}(X, M)$ такой, что $xe \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(x,x)$ — тождественный морфизм i_x для любого объекта x из $\mathcal{C}$.

Моноид W с таким умножением называется сплетением моноида R с категорией $\mathcal{C}$ и обозначается $R \operatorname{wr} \mathcal{C}$. Данная конструкция является двойственной к конструкции, определенной в [4], где умножение определялось следующим образом:

$$(r,f)(s,g) = (rs, f_p g).$$

Пусть $G = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — произвольный граф класса $\mathfrak{G}$. Определим малую категорию $\mathcal{K}_G$, положив $\operatorname{Ob}\mathcal{K}_G = \{Y_u \,|u \in U\}$ и обозначив для любых двух объектов Y_u, $Y_v \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}_G$ через $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(Y_u, Y_v)$ множество всех отображений из Y_u в Y_v. Тогда

$$\operatorname{Mor}\mathcal{K}_G = \bigcup_{u,v\in U} \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}_G}(Y_u, Y_v)$$

и моноид $S\mathrm{Mon}U$ естественно действует справа на $\operatorname{Ob}\mathcal{K}_G$:

$$Y_u\alpha = Y_{u\alpha},\ \alpha \in S\mathrm{Mon}U.$$

Таким образом, получаем сплетение $S\,\mathrm{Mon}\,U \operatorname{wr} \mathcal{K}_G$ моноида $S\,\mathrm{Mon}\,U$ и малой категории $\mathcal{K}_G$.

Пусть $(\alpha, f) \in S\,\mathrm{Mon}\,U \operatorname{wr} \mathcal{K}_G$, где $\alpha \in S\,\mathrm{Mon}\,U$, $f \in \operatorname{Map}(\operatorname{Ob}\mathcal{K}_G, \operatorname{Mor}\mathcal{K}_G)$. Тогда $Y_u f \in$ $\in \operatorname{Map}(Y_u, Y_{u\alpha})$ для всех $Y_u \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}_G$. Через f_u будем обозначать $Y_u f$, где $y_u f_u \in Y_{u\alpha}$ для всех $y_u \in Y_u$. Одним из основных результатов данной работы является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $G = U[(Y_u)_{u \in U}]$ *— произвольный граф класса* $\mathfrak{G}$, $\mathcal{K}_G$ *— малая категория, определенная ранее. Тогда*

$$S\mathrm{End}G \cong S\mathrm{Mon}\,U \ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_G.$$

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{G}$ — произвольный граф, $\zeta \in S\mathrm{End}G$. По лемме 3.1 преобразование $\zeta^* \in S\mathrm{Mon}\,U$. Определим отображение

$$p : \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_G \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}_G \colon Y_u \mapsto p_u,$$

где для каждого $u \in U$ имеем

$$p_u \colon Y_u \to Y_{u\zeta^*} \colon y_u \mapsto y_v, \quad \text{если } (u, y_u)\zeta = (v, y_v).$$

Таким образом, $(u, y_u)\zeta = (u\zeta^*, y_u p_u)$, и корректно заданным будет отображение

$$\xi : S\mathrm{End}G \to S\mathrm{Mon}\,U \ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_G : \zeta \mapsto (\zeta^*, p).$$

Пусть $\varphi, \psi \in S\mathrm{End}G$ и $\varphi\xi = (\varphi^*, g), \psi\xi = (\psi^*, h), (\varphi\psi)\xi = \big((\varphi\psi)^*, f\big)$. Тогда

$$(u(\varphi\psi)^*, y_u f_u) = (u, y_u)(\varphi\psi) = \big((u, y_u)\varphi\big)\psi = (u\varphi^*, y_u g_u)\psi =$$

$$= \big((u\varphi^*)\psi^*, (y_u g_u)h_{u\varphi^*}\big) = \big(u(\varphi^*\psi^*), y_u(g_u h_{u\varphi^*})\big).$$

Следовательно,

$$u(\varphi\psi)^* = u(\varphi^*\psi^*), \ y_u f_u = y_u(g_u h_{u\varphi^*}).$$

Итак,

$$(\varphi\psi)\xi = \big((\varphi\psi)^*, f\big) = (\varphi^*\psi^*, g h_{\varphi^*}) = (\varphi^*, g)(\psi^*, h) = (\varphi\xi)(\psi\xi),$$

т. е. ξ — гомоморфизм.

Пусть $\varphi, \psi \in S\mathrm{End}G$ такие, что $\varphi \neq \psi$. Тогда $(u, y_u)\varphi \neq (u, y_u)\psi$ для некоторого $(u, y_u) \in \in G$. Следовательно, либо $u\varphi^* \neq u\psi^*$, либо $u\varphi^* = u\psi^*$ и $y_u g_u \neq y_u h_u$, т. е. $\varphi\xi \neq \psi\xi$ в обоих случаях.

Далее, возьмем произвольный элемент $(\gamma, q) \in S\mathrm{Mon}\,U \ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_G$. Отсюда $\gamma \in S\mathrm{Mon}\,U$, $q_u \in \in \mathrm{Map}(Y_u, Y_{u\gamma})$. Рассмотрим преобразование μ графа G такое, что $(u, y_u)\mu = (u\gamma, y_u q_u)$ для всех $(u, y_u) \in G$. Поскольку для любого $(v, y_v) \in G$

$$v\mu^* = ((v, y_v)\mu)_\nu = ((v\gamma, y_v q_v))_\nu = v\gamma,$$

то $\mu^* \in S\mathrm{Mon}\,U$, откуда по лемме 3.1 имеем $\mu \in S\mathrm{End}G$. При этом ясно, что $\mu\xi = (\gamma, q)$.

Теорема 3.1 доказана.

Заметим, что все конечные неориентированные графы без кратных ребер также удовлетворяют условию (1). В самом деле, пусть G — конечный неориентированный граф без кратных ребер и γ — его сильный эндоморфизм. Так же, как и при доказательстве леммы 3.1, можно показать, что γ отображает элементы различных классов эквивалентности ν в элементы разных классов. Следовательно, в силу конечности G в образе любого сильного эндоморфизма этого графа всегда будет хотя бы один представитель каждого класса эквивалентности ν. Предположим, что элементы x, y из G ν-эквивалентны, при этом $(x\gamma, y\gamma) \notin \nu$. Тогда для некоторого $z' \in G$ имеем $\{x\gamma, z'\} \in E(G)$ и $\{y\gamma, z'\} \notin E(G)$. Если $z \in z'_\nu \gamma^{-1}$, то $\{x, z\} \in E(G)$ и $\{y, z\} \notin E(G)$, что противоречит условию $x\nu y$.

Таким образом, теорема 3.1 справедлива для любых неориентированных графов без кратных ребер, удовлетворяющих условию (1). В частности, если граф G конечен, то в качестве следствия получаем следующий результат.

Теорема 3.2 [4]. *Пусть $G = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — конечный неориентированный граф без кратных ребер. Тогда*

$$S\mathrm{End}G \cong \mathrm{Aut}U \text{ wr } \mathcal{K}_G.$$

4. Сильные эндоморфизмы бесконечных n-однородных гиперграфов. Для конечных n-однородных гиперграфов описание моноида сильных эндоморфизмов в терминах сплетения группы и малой категории было анонсировано в [14]. В настоящей работе получен подобный результат для бесконечных n-однородных гиперграфов, удовлетворяющих условию, аналогичному (1).

Пусть V — произвольное непустое множество, $\mathcal{E}$ — семейство непустых (необязательно различных) подмножеств из V. Пара $(V, \mathcal{E})$ называется гиперграфом с множеством вершин V и множеством ребер $\mathcal{E}$.

Равные подмножества в $\mathcal{E}$ называются кратными ребрами. Если вершина $x \in V$ принадлежит ребру $e \in \mathcal{E}$, говорят, что они инцидентны. Число вершин, инцидентных данному ребру $e \in \mathcal{E}$, называется степенью ребра e и обозначается $|e|$. Степенью $\rho(v)$ вершины $v \in V$ называется число ребер, инцидентных вершине v.

Через H будем обозначать произвольный гиперграф $(V, \mathcal{E})$. Множество вершин и множество ребер гиперграфа H будем обозначать также через $V(H)$ и $\mathcal{E}(H)$ соответственно.

Пусть n — целое неотрицательное число. Если в гиперграфе H нет кратных ребер и степень любого ребра e равна n, то гиперграф H называется n-однородным гиперграфом [15]. Обозначим через C_n класс всех n-однородных гиперграфов.

Преобразование $\alpha\colon V \to V$ множества вершин гиперграфа $H \in C_n$ называется эндоморфизмом гиперграфа, если для любого $A \subseteq V$ из того, что $A \in \mathcal{E}$, следует $A\alpha \in \mathcal{E}$. Эндоморфизм $\alpha\colon V \to V$ гиперграфа $H \in C_n$ называется сильным эндоморфизмом [16], если для любого $A \subseteq V,\ |A| = n$ из того, что $A\alpha \in \mathcal{E}$, следует $A \in \mathcal{E}$. Множество всех сильных эндоморфизмов гиперграфа $H \in C_n$ относительно композиции преобразований является полугруппой, которую далее будем обозначать через $S\mathrm{End}H$.

Семейством связности $\mathcal{N}(x)$ вершины x гиперграфа $H \in C_n,\ n \geq 2$, назовем семейство подмножеств $A \subseteq V$ таких, что

$$|A| = n - 1 \ \&\ A \cup \{x\} \in \mathcal{E}.$$

Лемма 4.1. *Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n и $x, y \in H$. Тогда существует сильный эндоморфизм f гиперграфа H такой, что $xf = yf$ в том и только в том случае, когда выполняется одно из условий*:

(i) $n = 0$;
(ii) $n = 1$ & $\rho(x) = \rho(y)$;
(iii) $n \geq 2$ & $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$.

Доказательство. Пусть $f \in S\mathrm{End}H$ и $xf = yf$ для некоторых $x,\ y \in H$. Понятно, что возможен один из случаев (i), (ii).

Пусть $n \geq 2$ и $A \subseteq X$. Тогда

$$A \in \mathcal{N}(x) \Leftrightarrow A \cup \{x\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow Af \cup \{xf\} = Af \cup \{yf\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A \cup \{y\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A \in \mathcal{N}(y).$$

Таким образом, $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$ и необходимость доказана.

Пусть теперь преобразование f гиперграфа $H \in C_n$ определяется правилом

$$zf = \begin{cases} x, & \text{если } z = y, \\ z & \text{— в остальных случаях} \end{cases}$$

для всех $z \in V$. Очевидно, $f \in S\mathrm{End}H$, если $n = 0$.

Пусть выполняется условие (ii) и $a \in V$. Равносильность $a \in \mathcal{E} \Leftrightarrow af \in \mathcal{E}$ справедлива для $a = y$, так как $\rho(x) = \rho(y)$, и для $a \neq y$, так как в этом случае $af = a$. Следовательно, $f \in S\mathrm{End}H$.

Пусть далее выполняется условие (iii) и $e \subseteq V$, $|e| = n$. Если $y \notin e$, то из $e \in \mathcal{E}$ следует $ef = e \in \mathcal{E}$. Если же $y \in e$, то $e = A \cup \{y\}$ и, значит, $A \in \mathcal{N}(x)$, следовательно,

$$e \in \mathcal{E} \Rightarrow ef = Af \cup \{yf\} = A \cup \{x\} \in \mathcal{E}.$$

Таким образом, f — эндоморфизм.

Пусть $ef \in \mathcal{E}$. Если $x \notin ef$, то для любого $a \in ef$ справедливо $af^{-1} = a$, поэтому $e = ef \in \mathcal{E}$. Предположим, что $x \in ef$, т. е. $ef = M \cup \{x\}$, где $M \in \mathcal{N}(x)$. Тогда либо $e = M \cup \{x\} = ef \in \mathcal{E}$, либо $e = M \cup \{y\} \in \mathcal{E}$, поскольку $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$. Случай, когда $e = M \cup \{x, y\}$, не рассматривается, так как $|e| > n$. Следовательно, $f \in S\,\mathrm{End}\,H$.

Лемма 4.1 доказана.

Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n. Из леммы 4.1 следует, что на H естественно возникает бинарное отношение δ:

$$x\delta y \Leftrightarrow \begin{cases} \rho(x) = \rho(y), & \text{если } n \in \{0, 1\}, \\ \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y), & \text{если } n \geq 2. \end{cases}$$

Ясно, что δ — отношение эквивалентности. Обозначим класс эквивалентности, содержащий элемент $a \in H$, через a_δ. Если $A \subseteq V$, то положим $A_\delta = \{a_\delta \mid a \in A\}$. Напомним, что если $D = \{Y_i \mid i \in I\}$ — совокупность некоторых подмножеств данного множества X, то трансверсалью семейства D называется множество всех представителей, взятых в точности по одному из каждого подмножества $Y_i, i \in I$.

Через H/δ будем обозначать гиперграф, вершины которого состоят из классов эквивалентности x_δ, $x \in V$, а множество ребер $\mathcal{E}(H/\delta)$ содержит A_δ, $A \subseteq V$ тогда и только тогда, когда некоторая трансверсаль семейства A_δ является ребром гиперграфа H. Полученный гиперграф назовем каноническим сильным фактор-гиперграфом гиперграфа H. Понятно, что если $A_\delta \in \mathcal{E}(H/\delta)$, то любая трансверсаль семейства A_δ является ребром гиперграфа H.

Обобщенным лексикографическим произведением $U[(Y_u)_{u\in U}]$ гиперграфа U и гиперграфов $(Y_u)_{u\in U}$ назовем такой гиперграф, у которого

$$V(U[(Y_u)_{u\in U}]) = \{(u, y_u)|u \in U, y_u \in Y_u\},$$

а подмножество $A \subseteq V(U[(Y_u)_{u\in U}])$ будет ребром тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

(i) $\mathrm{dom}\,(A) \in \mathcal{E}(U)$;

(ii) $\mathrm{dom}\,(A) = \{a\} \notin \mathcal{E}(U)$ & $\mathrm{im}\,(A) \in \mathcal{E}(Y_a)$.

Предложение 4.1. *Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n, $\mathcal{U} = H/\delta$ — его канонический сильный фактор-гиперграф, Y_u, $u \in \mathcal{U}$ — 0-однородные гиперграфы такие, что $|Y_u| = |u|$ для всех $u \in \mathcal{U}$. Тогда*

$$H \cong \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}].$$

Доказательство. Для каждого $u \in \mathcal{U}$ пусть τ_u — произвольная биекция из класса эквивалентности u на множество Y_u. Положим

$$\psi\colon H \to \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]\colon x \mapsto (x_\delta, x\tau_{x_\delta}).$$

Пусть x, y — произвольные различные вершины из H. Если $(x, y) \notin \delta$, то $x_\delta \neq y_\delta$ и, следовательно, $x\psi \neq y\psi$. Если $(x, y) \in \delta$, то $x\tau_{x_\delta} \neq y\tau_{x_\delta}$ в силу биективности τ_u, $u \in \mathcal{U}$, и тогда $x\psi \neq y\psi$. Поскольку τ_u сюръективно, то для любой пары $(u, y_u) \in \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ существует $t \in u$ такой, что $t\tau_u = y_u$, т. е. $t\psi = (u, y_u)$.

Поскольку $Y_u, u \in \mathcal{U}$ — 0-однородные гиперграфы, в лексикографическом произведении $\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ все ребра определяются только условием (i) соответствующего определения. Тогда для всех $A \subseteq V$

$$A \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow A_\delta \in \mathcal{E}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \{(x_\delta, x\tau_{x_\delta}) \mid x \in A\} = A\psi \in \mathcal{E}\left(\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]\right).$$

Предложение 4.1 доказано.

Далее будем отождествлять вершины гиперграфа H и соответствующие им элементы обобщенного лексикографического произведения $\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$.

Пусть $\mathfrak{C}_n$ — класс всех бесконечных n-однородных гиперграфов H, для которых при любом $\varphi \in S\mathrm{End}H$ выполняется условие

$$\forall\, x_\delta \in \mathcal{U}\ \ \exists\, y_\delta \in \mathcal{U}\colon x_\delta\varphi \subseteq y_\delta. \tag{2}$$

Ясно, что класс $\mathfrak{C}_0(\mathfrak{C}_1)$ совпадает с классом всех бесконечных 0-однородных (1-однородных) гиперграфов. В случае, когда $n \geq 2$ — натуральное, $\mathfrak{C}_n$ является непустым собственным подклассом класса всех бесконечных n-однородных гиперграфов.

Лемма 4.2. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$. Преобразование φ гиперграфа H будет его сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда преобразование*

$$\varphi^*\colon \mathcal{U} \to \mathcal{U}\colon x_\delta \mapsto (x\varphi)_\delta$$

является сильным инъективным эндоморфизмом гиперграфа U.

Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1.

Множество всех сильных инъективных эндоморфизмов гиперграфа H образует относительно композиции преобразований полугрупппу, которую обозначим через $S\,\mathrm{Mon}\,H$. Элементы из $S\mathrm{Mon}H$ будем называть сильными мономорфизмами.

Предложение 4.2. *Для каждого гиперграфа H класса $\mathfrak{C}_n$ справедливо равенство*

$$S\,\mathrm{End}\mathcal{U} = S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U}.$$

Доказательство. Пусть $H \in \mathfrak{C}_n$. Канонический сильный фактор-гиперграф 0-однородного гиперграфа является одноэлементным 0-однородным гиперграфом, следовательно, при $n = 0$ имеем $S\,\mathrm{End}\mathcal{U} = S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U}$. Для случая $n \geq 1$ доказательство аналогично доказательству предложения 3.1.

Предложение 4.2 доказано.

Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$. Определим малую категорию $\mathcal{K}_H$, положив $\mathrm{Ob}\mathcal{K}_H = \{Y_u\,|u \in \mathcal{U}\}$, $\mathrm{Mor}\mathcal{K}_H = \bigcup_{u,v\in\mathcal{U}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}_H}(Y_u, Y_v)$, где $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}_H}(Y_u, Y_v)$ — множество отображений из Y_u в Y_v. Моноид $\mathrm{Mon}\,\mathcal{U}$ при этом естественно действует справа на множестве объектов этой категории.

Теорема 4.1. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$, $\mathcal{K}_H$ — малая категория, определенная ранее. Тогда*

$$S\,\mathrm{End}\,H \cong S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U}\ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_H.$$

Доказательство. Пусть φ — произвольный сильный эндоморфизм гиперграфа $H \in \mathfrak{C}_n$. По лемме 4.2 $\varphi^* \in S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U}$. Для каждого $u \in \mathcal{U}$ определим отображение f_u множества Y_u в $Y_{u\varphi^*}$, положив $y_u f_u = y_v$, если $(u, y_u)\varphi = (v, y_v)$. Тогда корректно определенным будет отображение

$$f\colon \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_H \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}_H\colon Y_u \mapsto f_u.$$

Аналогично доказательству теоремы 3.1 можно показать, что отображение

$$\xi\colon S\,\mathrm{End}\,H \to S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U}\ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_H\colon \varphi \mapsto (\varphi^*, f)$$

является изоморфизмом.

Теорема 4.1 доказана.

Заметим, что, как и в случае конечных графов (см. пункт 3), аналогичным образом можно показать, что конечные n-однородные гиперграфы удовлетворяют условию (2). Следовательно, теорема 4.1 справедлива для любых n-однородных гиперграфов, удовлетворяющих условию (2).

5. Регулярность $S\mathrm{End}H$. Условия регулярности моноида сильных эндоморфизмов для конечных неориентированных графов изучались в [4, 10]. В [11] было доказано, что полугруппа сильных эндоморфизмов произвольного графа регулярна тогда и только тогда, когда сильный фактор-граф U является S-неразложимым или, что эквивалентно, когда U не содержит ни одного изоморфного себе собственного подграфа. В этом пункте мы, использовав теорему 4.1, исследуем регулярность моноида сильных эндоморфизмов гиперграфов класса $\mathfrak{C}_n$.

Напомним, что моноид M называется регулярным, если для любого $a \in M$ существует $b \in M$ такой, что $a = aba$.

Теорема 5.1. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$. Моноид $S\mathrm{End}H$ регулярен тогда и только тогда, когда гиперграф $\mathcal{U}$ не содержит собственных подгиперграфов, изоморфных $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть моноид $S\mathrm{End}H$ регулярен и $\varphi,\psi \in S\mathrm{End}H$ такие, что $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Согласно теореме 4.1 $\varphi = (\varphi^*, f)$, $\psi = (\psi^*, g)$. Тогда, так как $\varphi^* = \varphi^*\psi^*\varphi^*$, имеем

$$a\psi^* = a\varphi^{*-1} \ \text{ для всех } \ a \in \mathrm{Im}\varphi^*,$$

и, следовательно, $(\mathrm{Im}\varphi^*)\psi^* = \mathcal{U}$. Таким образом, если $v \in \mathcal{U} \setminus \mathrm{Im}\varphi^* \neq \varnothing$, то каким бы ни был образ $v\psi^*$, найдется $m \in \mathrm{Im}\varphi^*$, $m \neq v$, такой, что $m\psi^* = v\psi^*$, что противоречит инъективности ψ^*. Следовательно, $\mathrm{Im}\varphi^* = \mathcal{U}$. Таким образом, $S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U} = \mathrm{Aut}\mathcal{U}$, и, значит, гиперграф $\mathcal{U}$ не содержит собственных подгиперграфов, изоморфных $\mathcal{U}$.

Наоборот, если $\mathcal{U}$ не содержит собственных подгиперграфов, изоморфных $\mathcal{U}$, то все элементы из $S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U}$ сюрьективны и тогда полугруппа $S\,\mathrm{Mon}\mathcal{U}$ совпадает с $\mathrm{Aut}\mathcal{U}$. Следовательно, для любого φ можно построить $\psi = (\varphi^{*-1}, g)$, где

$$g_v \in \mathrm{Map}(Y_v, Y_{v\varphi^{*-1}}), \qquad y_v g_v \in \begin{cases} y_v(f_{v\varphi^{*-1}})^{-1}, & \text{если } y_v \in \mathrm{Im}f_{v\varphi^{*-1}}, \\ Y_{v\varphi^{*-1}} & \text{— в остальных случаях.} \end{cases} \tag{3}$$

Для любой пары $(u, y_u) \in \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ имеем

$$(u, y_u)\varphi\psi\varphi = (u\varphi^*\varphi^{*-1}\varphi^*, y_u f_u g_{u\varphi^*} f_{u\varphi^*\varphi^{*-1}}) = (u\varphi^*, y_u f_u g_{u\varphi^*} f_u).$$

Положим $y_u f_u = y_{u'} \in Y_{u\varphi^*=u'}$, т. е. $y_{u'} \in Imf_{u'\varphi^{*-1}}$. Тогда согласно (3)

$$y_{u'}g_{u'} \in y_{u'}(f_{u'\varphi^{*-1}})^{-1} = y_{u'}(f_u)^{-1}.$$

Кроме того, для любого $b \in \mathrm{Im}f_u \subseteq Y_{u'}$ и такого $a \in Y_u$, что $b = af_u$, справедливо $bf_u^{-1}f_u = af_u = b$, поэтому

$$y_{u'}g_{u'}f_u \in y_{u'}f_u^{-1}f_u = \{y_{u'}\} = \{y_u f_u\},$$

$$y_u f_u g_{u\varphi^*} f_u = y_{u'}g_{u'}f_u = y_u f_u.$$

Таким образом, $(u, y_u)\varphi\psi\varphi = (u\varphi^*, y_u f_u g_{u\varphi^*} f_u) = (u\varphi^*, y_u f_u) = (u, y_u)\varphi$ и, следовательно, $S\mathrm{End}H$ — регулярный моноид.

Теорема 5.1 доказана.

1. *Molchanov V. A.* Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. – 1983. – **27**. – P. 155 – 199.
2. *Fan S.H.* Generalized symmetry of graphs // Electron. Notes Discrete Math. – 2005. – **23**. – P. 51 – 60.
3. *Kelarev A., Ryan J., Yearwood J.* Cayley graphs as classifiers for data mining: The influence of asymmetries // Discrete Math. – 2009. – **309**, № 17. – P. 5360 – 5369.
4. *Knauer U., Nieporte M.* Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math. – 1989. – **52**. – P. 607 – 614.
5. *Жучок Ю. В.* Ендоморфізми відношень еквівалентності // Вісн. Київ. ун-ту. Фіз.-мат. науки. – 2007. – **3**. – С. 22 – 26.
6. *Жучок Ю. В.* Полугруппы эндоморфизмов 2-нильпотентных бинарных отношений // Фундам. и прикл. математика. – 2008. – **14**, № 6. – С. 75 – 83.

7. *Čulík K.* Zur Theorie der Graphen // Časopis Pěst. Mat. – 1958. – **83**. – P. 133 – 155.
8. *Böttcher M., Knauer U.* Endomorphism spectra of graphs // Discrete Math. – 1992. – **109**. – P. 45 – 57.
9. *Böttcher M., Knauer U.* Postscript: Endomorphism spectra of graphs // Discrete Math. – 2003. – **270**. – P. 329 – 331.
10. *Wilkeit E.* Graphs with a regular endomorphism monoid // Arch. Math. – 1996. – **66**. – P. 344 – 352.
11. *Fan S. H.* Graphs whose strong endomorphism monoids are regular // Arch. Math. – 1999. – **73**. – P. 419 – 421.
12. *Li W.-M.* Green's relations on the strong endomorphism monoid of a graph // Semigroup Forum. – 1993. – **47**. – P. 209 – 214.
13. *Li W.-M.* The monoid of strong endomorphisms of a graph // Semigroup Forum. – 1994. – **49**. – P. 143 – 149.
14. *Bondar E.* The monoid of strong endomorphisms of hypergraphs // 8-ма міжнар. алгебр. конф. в Україні: збірник тез (англ. мовою) (Луганськ, 5 – 12 липня 2011 р.). – Луганськ: Луган. нац. ун-т ім. Т. Шевченка, 2011. – С. 248 – 250.
15. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. – М.: Наука, 1990. – 384 с.
16. *Решетников А. В.* Об определениях гомоморфизма гиперграфов // Материалы X междунар. сем. „Дискретная математика и ее приложения” (Москва, 1 – 6 февр. 2010 г.). – М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2010. – С. 325 – 328.

Получено 02.02.12