

УДК 517.94

Л. В. Попова, асист. (Запоріж. ун-т)

Про тривіальне диференціальне рівняння у просторах L_p , $0 < p < 1$

Наведено опис множини X_p всіх розв'язків тривіальної задачі Коші в L_p , $0 < p < 1$. Основним результатом є теорема 2, в якій стверджується, що X_p є замкнений підпростір p -базахового простору H_p всіх кривих у L_p , що задовольняють умову Гельдера з показником p і виходять із нуля, відносно p -норми, що дорівнює мінімальній константі в умові Гельдера.

© Л. В. ПОПОВА, 1992

Приведено описання множини X_p всіх рішень тривіальної задачі Коші в L_p , $0 < p < 1$. Основним результатом являється теорема 2, котра утверджує, що X являється замкнутим підпростором p -банасова простору H_p всіх кривих в L_p , удовлетворяющих умову Гельдера з показателем p і виходящих из нуля, относительно p -нормы, равной наименьшей константе в условии Гельдера.

Легко бачити, що якщо X — топологічний векторний простір з тотальним спряженням, то тривіальна задача Коші

$$x'(t) = 0, \quad x(0) = 0, \quad (1)$$

де $t \in [0, 1]$, $x: [0, 1] \rightarrow X$ та $x'(t)$ — границя відносно топології простору,

$$x'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}$$

має тільки нульовий розв'язок (див. [1, с. 198] для метризованого X). Зокрема, це має місце у локально опуклих просторах. Перший приклад ненульового розв'язку задачі (1) було наведено в [2]. Далі Ролевич [3, с. 116] висловив гіпотезу, що ненульовий розв'язок (1) існує в кожному F -просторі з нульовим спряженням. Твердження гіпотези довів Калтон [4].

Неважко переконатися в тому, що будь-яка крива $x(t)$ в L_p , що задовольняє умову Ліпшица

$$\|x(t) - x(s)\| \leq M |t - s|$$

при $t, s \in [0, 1]$, має нульову похідну. В п. 1 доводиться, що простір \mathcal{L}_p всіх кривих Ліпшица в L_p , які нуль перетворюють в нуль, утворює p -банасів простір відносно p -норми $\|x\|$ — мінімальної константи в умові Ліпшица; більш того, \mathcal{L}_p ізометричний просторові $\mathcal{L}(L_p)$ всіх лінійних неперервних операторів, що діють в L_p .

У п. 2 наведено опис множини X_p всіх розв'язків (1). Ми наділяємо X_p p -нормою, що перетворює X_p у p -банасів простір, ізометричний деякому підпросторові простору H_p всіх кривих у L_p , що перетворюють нуль в нуль та задовольняють умову Гельдера з показником p , з p -нормою, яка дорівнює мінімальної константи в умові Гельдера.

Нагадаємо, що L_p , $0 < p \leq 1$, — це F -простір усіх класів еквівалентності вимірних на $[0, 1]$ функцій x , для яких величина

$$\|x\| = \int_{[0,1]} |x|^p d\mu \quad (2)$$

скінченна, де μ — міра Лебега на $[0, 1]$.

Функція $\|\cdot\|$, що задана на векторному просторі E над полем дійсних або комплексних чисел та приймає значення на множині дійсних чисел, називається p -нормою, $0 < p \leq 1$, якщо для будь-яких $x, y \in E$ виконуються умови:

- 1) $\|x\| \geq 0$, причому $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- 2) $\|\lambda x\| = |\lambda|^p \|x\|$, де λ — довільний скаляр;
- 3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

p -Норма $\|\cdot\|$ на E визначає лінійну метрику, інваріантну відносно зсуву: $\rho(x, y) = \|x - y\|$. Якщо простір E повний відносно цієї метрики, то E називається p -банасовим простором (1-банасів простір називається банасовим простором). Наприклад, L_p є p -банасів простір відносно p -норми (2).

1. Криві, що задовольняють умову Ліпшица. Найпростішим прикладом кривої, що задовольняє умову Ліпшица та перетворює нуль в нуль, отже, прикладом ненульового розв'язку (1) є крива $x(t) = \chi([0, t])$, де $\chi(A)$ — характеристична функція множини A .

Наступна теорема характеризує криві Ліпшица за допомогою простору $\mathcal{L}(L_p)$. Величина $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ визначає p -норму на $\mathcal{L}(L_p)$, яка перетворює $\mathcal{L}(L_p)$ в p -банасів простір.

Теорема 1. Позначимо через \mathcal{L}_p множини всіх кривих Ліпшица $x(t): [0, 1] \rightarrow L_p$, $0 < p \leq 1$, таких, що $x(0) = 0$. Величина

$$\|x\| = \sup_{0 \leq t < s \leq 1} \frac{\|x(s) - x(t)\|}{s - t} = \\ = \inf \{M : (\forall t, s \in [0, 1]) \|x(s) - x(t)\| \leq M |s - t|\}$$

утворює p -норму на \mathcal{L}_p , відносно якої простір \mathcal{L}_p повний. Більш того, \mathcal{L}_p ізометричний просторові $\mathcal{L}(L_p)$.

Доведення. Побудуємо відображення $U: \mathcal{L}(L_p) \rightarrow \mathcal{L}_p$, поклавши для кожного $T \in \mathcal{L}(L_p)$

$$(UT)(t) = T\chi([0, t]).$$

Відзначимо, що $(UT)(0) = 0$. Крива $(UT)(t)$ задовольняє умову Ліпшиця з константою $\|T\|$. Дійсно, якщо $0 \leq t < s \leq 1$, то

$$\|(UT)(s) - (UT)(t)\| = \|T\chi([t, s])\| \leq \|T\| \|\chi([t, s])\| = \|T\| (s - t).$$

Далі нам потрібна лема, твердження якої при $p = 1$ нам сповістив Л. Н. Гурвіц.

Лема. Нехай $T \in \mathcal{L}(L_p)$, $0 < p \leq 1$. Для кожного $\varepsilon > 0$ існує інтервал $[t, s]$, $t < s$, для якого

$$\|T\chi([t, s])\| \geq (\|T\| - \varepsilon)(s - t).$$

Доведення. Для довільного натурального n позначимо через G_n лінійну оболонку функцій

$$\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right); \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

Оскільки $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$ щільне в L_p , то для довільного фіксованого $\varepsilon > 0$ можна вибрати n так, щоб $\|T_n\| \geq (\|T\| - \varepsilon)$, де T_n — звуження T на G_n . Для кожного

$$x = \sum_{k=1}^n a_k \chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \in G_n$$

маємо

$$\|Tx\| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^p \left\| T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \right\| \leq \\ \leq \max_k \left\| T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \right\| n \sum_{k=1}^n |a_k|^p \frac{1}{n} = \\ = \frac{\max_k \left\| T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \right\|}{\left\| \chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \right\|} \|x\|.$$

Отже,

$$\frac{\max_k \left\| T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \right\|}{\left\| \chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \right\|} = \|T_n\|.$$

Далі виберемо k так, щоб

$$\left\| T\chi\left(\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]\right) \right\| n = \|T_n\|.$$

Остаточно для $[t, s] = [(k-1)/n, k/n]$ маємо

$$\|T\chi([t, s])\| = \|T_n\| (s - t) \geq (\|T\| - \varepsilon)(s - t).$$

Таким чином, лема доведена. Продовжимо доведення теореми. З леми випливає, що $\|T\|$ — мінімальна константа в умові Ліпшиця для кривої $(UT)(t)$. Отже, $\|UT\| = \|T\|$. Залишилось довести, що U відображає сюр'єктивно простір $\mathcal{L}(L_p)$ на \mathcal{L}_p . Нехай $x \in \mathcal{L}_p$. Для функцій $y \in L_p$ вигляду

$$y = \sum_{k=1}^m a_k \chi((t_{k-1}, t_k)), \quad (3)$$

де $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m = 1$, покладемо

$$\hat{T}y = \sum_{k=1}^m a_k (x(t_k) - x(t_{k-1})).$$

Легко бачити, що \hat{T} — лінійний оператор, означений на лінійному підпросторі $E \in L_p$, що складається з усіх функцій вигляду (3), причому

$$\|\hat{T}y\| \leq \sum_{k=1}^m |a_k|^p \|x(t_k) - x(t_{k-1})\| \leq \|x\| \sum_{k=1}^m |a_k|^p (t_k - t_{k-1}) = \|x\| \|y\|.$$

Оскільки E щільний в L_p , \hat{T} може бути розповсюджений за лінійністю та неперервністю до деякого оператора $T \in \mathcal{L}(L_p)$. Отже, оскільки для кожного $t \in [0, 1]$ $x(t) = T\chi([0, t])$, одержуємо $(UT)(t) = x(t)$.

З а у в а ж е н н я. Оператор T , який було побудовано за допомогою кривої $x(t)$ при доведенні теореми 1, можна позначати таким чином:

$$Ty = \int_0^1 y(t) dx(t),$$

оскільки конструкція T співпадає з інтегралом Рімана — Стільтьєса. Виявляється можливим визначити інтеграл Рімана — Стільтьєса відносно будь-якої кривої $x(t)$ в L_p , яка має скінченну варіацію, однак не для довільної функції $y \in L_p$, а тільки для $y \in L_\infty$.

2. Криві Гельдера в L_p , $0 < p \leq 1$, з показником p . Для кривої x в L_p з початковою умовою $x(0) = 0$, яка задовольняє умову Гельдера з показником p

$$\|x(s) - x(t)\| \leq M |s - t|^p, \quad (4)$$

визначимо величину

$$\|x\|_{H_p} = \sup_{0 \leq t < s \leq 1} \frac{\|x(s) - x(t)\|}{(s - t)^p}.$$

Неважно переконатися в тому, що $\|x\|_{H_p}$ дорівнює мінімальній константі M в (4). Доведемо, що $\|\cdot\|_{H_p}$ визначає p -норму на лінійному просторі H_p всіх кривих Гельдера в L_p з нульовою початковою умовою. Перші дві аксіоми p -норми очевидні. Для доведення третьої достатньо помітити, що для довільних $x, y \in H_p$ та $0 \leq t < s \leq 1$ маємо

$$\begin{aligned} \frac{\|(x + y)(s) - (x + y)(t)\|}{(s - t)^p} &\leq \frac{\|x(s) - x(t)\| + \|y(s) - y(t)\|}{(s - t)^p} \leq \\ &\leq \|x\|_{H_p} + \|y\|_{H_p}. \end{aligned}$$

Повнота H_p відносно p -норми $\|\cdot\|$ може бути доведена за стандартною схемою. Отже, H_p — p -банахів простір.

Позначимо через X_p лінійний простір усіх розв'язків (1).

Теорема 2. X_p є замкненим підпростором H_p .

Доведення. Доведемо спочатку, що $X_p \subset H_p$. Нехай $x \in X_p$; припустимо, від супротивного, що для кожного n існують числа $s_n > t_n \in [0, 1]$ такі, що

$$\|x(s_n) - x(t_n)\| > n(s_n - t_n)^p.$$

Виберемо збіжну підпослідовність $\{s_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ з $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ та збіжну підпослідовність $\{t_{m_j}\}_{j=1}^{\infty}$ з $\{t_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Тоді $t_0 = \lim_j t_{m_j} < \lim_j s_{m_j} = s_0$ (рівність $t_0 = s_0$ неможлива, бо $x'(t_0) = 0$). З умови $x'(t) = 0$ випливає неперервність $x(t)$ в кожній точці $t \in [0, 1]$. Отже, з неперервності p -норми одержуємо

$$\|x(s_0) - x(t_0)\| = \lim_j \|x(s_{m_j}) - x(t_{m_j})\|.$$

Існує номер \bar{j}_0 такий, що для кожного $j \geq \bar{j}_0$

$$\|x(s_0) - x(t_0)\| \geq \frac{1}{2} \|x(s_{m_j}) - x(t_{m_j})\| \geq \frac{m_j}{2} (s_{m_j} - t_{m_j})^p,$$

що неможливо, оскільки права частина нерівності прямує до нескінченності при $j \rightarrow \infty$. Залишилось довести, що X_p є замкнений підпростір H_p . Нехай $x_n \in X_p$ та $\lim x_n = x \in H_p$. Зафіксуємо $t \in [0, 1]$ і $\varepsilon > 0$. Виберемо n так, щоб $\|x - x_n\| < \varepsilon/2$. Далі виберемо $\delta > 0$ так, щоб при $0 < |\Delta t| < \delta$ та $t + \Delta t \in [0, 1]$ виконувалось

$$\frac{\|x_n(t + \Delta t) - x_n(t)\|}{(\Delta t)^p} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Далі для фіксованого Δt маємо

$$\begin{aligned} \frac{\|x(t + \Delta t) - x(t)\|}{(\Delta t)^p} &= \frac{1}{(\Delta t)^p} \|x(t + \Delta t) - x_n(t + \Delta t) + \\ &+ x_n(t + \Delta t) - x_n(t) + x_n(t) - x(t)\| \leq \frac{1}{(\Delta t)^p} (\|(x - x_n)(t + \Delta t) - \\ &- (x - x_n)(t)\| + \|x_n(t + \Delta t) - x_n(t)\|) \leq \|x - x_n\| + \\ &+ \frac{\|x_n(t + \Delta t) - x_n(t)\|}{(\Delta t)^p} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже, $x \in X_p$.

Зауваження. Оскільки $\mathcal{L}_p \subset X_p \subset H_p$, то на \mathcal{L}_p визначені дві p -норми:

$$\|x\|_{H_p} \leq \|x\|.$$

1. Rolewicz S. Metric linear spaces.— Warszawa: PWN, 1985.— 458 p.
2. Rolewicz S. O funkcjach o pochodnej zero // Wiad. mat.— 1959.— 3.— P. 127—128.
3. Rolewicz S. Metric linear spaces.— Warszawa: PWN, 1972.— 287 p.
4. Kalton N. J. Curves with zero derivatives in F -spaces // Glasgow Math. J.— 1981.— 22.— P. 19—29.

Одержано 06.03.92