УДК 519.21

Я. Ф. Виннишин

О сходимости рядов из независимых гауссовых операторов

Изучению сходимости рядов из независимых случайных элементов в банаховых и более общих пространствах посвящены многие работы (см., например, [1]). В настоящей статье изучается сходимость одного класса рядов из независимых гауссовых операторов.

1. Основные определения. Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, рассматриваемое над полем действительных чисел, $L(H)$ — пространство линейных ограниченных операторов из H в H с операторной нормой $\| A \| = \sup\limits_{\|x\| \leqslant 1} \| Ax \|$, $(\Omega, \mathscr{F}, P)$ — вероятностное пространство. $L(\Omega, H)$ — множество отображений $A(\omega)$ из Ω в $L(H)$ такое, что $\forall x, y \in H$ отображение $(A(\omega)x, y)$ из Ω в $\mathbb{R}^1$ $\mathscr{F}$, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$-измеримо, $\mathscr{B}(\mathbb{R}^1)$ — σ-алгебра борелевских множеств прямой $\mathbb{R}^1$.

Пространство $L(\Omega, H)$ называется пространством ограниченных случайных линейных операторов. Наряду с пространством $L(\Omega, H)$ рассматривается пространство сильных случайных операторов $L_s(\Omega, H)$. Пусть $A(\omega)x$ — отображение из H в $H(\Omega)$, где $H(\Omega)$ — пространство случайных величин со значениями в H, т. е. $\mathscr{F}$, $\mathscr{B}(H)$-измеримых функций ($\mathscr{B}(H)$ — σ-алгебра борелевских множеств в H), причем выполнены следующие условия:

1) $\forall x, y \in H\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}^1 : P\{A(\omega)(\alpha x + \beta y) = \alpha A(\omega) x + \beta A(\omega) y\} = 1$;

2) $A(\omega) x$ непрерывно по x по вероятности: $\forall \varepsilon > 0\ \lim\limits_{x_n \to x} P\{\| A(\omega) x_n - A(\omega) x \| > \varepsilon\} = 0$.

Такие операторы называются сильными случайными операторами. Кроме того, рассматривается пространство $L_w(\Omega, H)$ слабых случайных операторов. Отображение $(A(\omega) x, y)$ пространства $H \times H$ в $\mathbb{R}(\Omega)$ называется слабым случайным оператором, если выполнены следующие условия:

1) $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in H\ \forall \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}^1 : P\left\{(A(\omega)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2) = \sum\limits_{i,j=1}^{2} \alpha_i \beta_j (A(\omega) x_i, y_j)\right\} = 1$;

2) $(A(\omega) x, y)$ непрерывно на $H \times H$ по вероятности: $\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{x_n \to x, y_n \to y} P \times \{|(A(\omega) x_n, y_n) - (A(\omega) x, y)| > \varepsilon\} = 0$.

Замечание. Имеют место включения $L(\Omega, H) \subset L_s(\Omega, H) \subset L_w(\Omega, H)$, причем все включения строгие.

В пространстве слабых случайных линейных операторов можно ввести понятие сходимости. Пусть $A_k \in L_w(\Omega, H)$, $k = 0, 1, 2 \ldots$. Последовательность $A_k(\omega)$, $k \geqslant 1$, сходится к $A_0(\omega)$, если $\forall x, y \in H$ последовательность случайных величин $(A_k(\omega) x, y)$ сходится к случайной величине $(A_0(\omega) x, y)$ по вероятности.

2. Гауссовы случайные операторы и их представление. Случайный оператор $A(\omega) \in L_w(\Omega, H)$ называется гауссовым, если $(A(\omega) x, y)$ — гауссова случайная функция на $H \times H$. Гауссов случайный оператор характеризуется функциями $\alpha(x, y) = M(A(\omega) x, y)$ и $\beta(x, y, u, v) = M[(A(\omega) x, y)(A(\omega) u, v)] - \alpha(x, y)\alpha(u, v)$. Как известно, эти функции полностью определяют распределение гауссового случайного оператора, $\alpha(x, y)$ — ограниченная билинейная форма; следовательно $\alpha(x, y) = (Bx, y)$, где $B \in L(H)$. Поэтому в дальнейшем будет рассматриваться гауссов случайный оператор с $\alpha(x, y) = 0$ и дисперсионной формой $\beta(x, y, u, v)$, так как для оператора $A_1(\omega) = A(\omega) - B$ $\alpha_1(x, y) = 0$ и $\beta_1(x, y, u, v) = B(x, y, u, v)$. $\beta(x, y, u, v)$ — ограниченная четырехлинейная форма, обладающая тем свойством, что $\beta(x, y, u, v) = \beta(u, v, x, y)$ и $\forall x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n\ \forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{C}^1 : \sum\limits_{i,j=1}^{n} c_i \bar{c}_j \beta(x_i, y_i, x_j, y_j) \geqslant 0$.

Справедлива теорема.

Теорема 1. *Имеет место представление* $\beta(x, y, u, v) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (C_k x, y) \times (C_k u, v)$, *где* $C_k \in L(H)$ *и ряд в правой части сходится поточечно.*

Доказательство. Рассмотрим конечную меру μ на $H \oplus H$, обладающую теми свойствами, что для любого открытого множества A $\mu(A) > 0$ и $\int\limits_{H \oplus H} \| x \|^2 \| y \|^2 d\mu(x, y) = M < \infty$. Примером такой меры может служить следующая дискретная мера: пусть множество $\{\langle x_n, y_n \rangle\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно в $H \oplus H$, мера μ сосредоточена на этом множестве и

$$\mu(B) = \sum_{n : \langle x_n, y_n \rangle \in B} 1/2^n (\| x_n \|^2 \| y_n \|^2 + 1).$$

Рассмотрим оператор T, действующий из $H_1 = L_2(H \oplus H, d\mu)$ в H_1: $(T\varphi)(x, y) = \int\limits_{H \oplus H} \beta(x, y, u, v) \varphi(u, v) d\mu(u, v)$. Легко показать, что T — неотрицательный самосопряженный компактный оператор. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис в $H_1 \ominus \operatorname{Ker} T$ из собственных функций с собственными значениями λ_n. Обозначим через T_n оператор $(T_n \varphi)(x, y) = \int\limits_{H \oplus H} \beta_n \times$

$\times (x, y, u, v)\, \varphi(u, v)\, d\mu(u, v)$, где $\beta_n(x, y, u, v) = \beta(x, y, u, v) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \varphi_k \times$ $\times (x, y)\, \varphi_k(u, v)$. Оператор $T^{\cdot}$ неотрицателен, поскольку $\forall f \in H_1\ (T_n f, f) =$ $= (Tf_1, f_1)$, где $f_1 = f - \sum_{k=1}^{n} (f, \varphi_k)\, \varphi_k$.

Покажем, что $\beta_n(x, y, u, v) \geqslant 0$. Каждая собственная функция оператора T — ограниченная билинейная форма. Поэтому $\beta_n(x, y, u, v)$ — непрерывная функция на $H \oplus H \oplus H \oplus H$. Если бы $\beta(x_0, y_0, x_0, y_0) < 0$, то для функции $\Psi_r = \max(0, 1 - \| \langle x, y\rangle - \langle x_0, y_0\rangle \|/r)$ выполнялось бы $(T_n \Psi_r, \Psi_r) \leqslant$ $\leqslant \beta_n(x_0, y_0, x_0, y_0) \| \Psi_r \| \, 4/2 < 0$, если r выбрано столь малым, что $\forall x, y,$ $u, v : \langle x, y\rangle,\ \langle u, v\rangle \in B_r(\langle x_0, y_0\rangle) : |\beta_n(x, y, u, v) - \beta_n(x_0, y_0, x_0, y_0)| < -\beta_n \times$ $\times (x_0, y_0, x_0, y_0)/2$ ($\| \Psi_r \| \neq 0$ при $r > 0$, так как $\mu(A)$ положительна для любого открытого множества A). Выбор такого r возможен в силу непрерывности $\beta_n(x, y, u, v)$. Отсюда получаем, что ряд с положительными членами $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k^2(x, y)$ сходится и его сумма не превышает $\beta(x, y, u, v)$. Если $\langle u, v\rangle \in B_R(0)$, то

$$\left| \sum_{k=m}^{n} \lambda_k \varphi_k(x, y)\, \varphi_k(u, v) \right| \leqslant \left(\sum_{k=m}^{n} \lambda_k \varphi_k^2(x, y) \right)^{1/2} \left(\sum_{k=m}^{n} \lambda_k \varphi_k^2(u, v) \right)^{1/2} \leqslant$$
$$\leqslant C \left(\sum_{k=m}^{n} \lambda_k \varphi_k^2(x, y) \right)^{1/2},$$

так как $\exists C : |\beta(u, v, u, v)| \leqslant C$, если $\langle u, v\rangle \in B_R(0)$.

Следовательно, при фиксированном $\langle x, y\rangle$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x, y)\, \varphi_k(u, v)$ сходится равномерно по $\langle u, v\rangle \in B_R(0)$.

Пусть $\gamma(x, y, u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x, y)\, \varphi_k(u, v)$. Для ограниченной функции $\Psi(x, y)$ с носителем $\underline{\Psi} \subset B_R(0)$

$$\int_{H \oplus H} \gamma(x, y, u, v)\, \Psi(u, v)\, d\mu(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\Psi, \varphi_k)\, \varphi_k(x, y); \quad \Psi = \Psi_0 + \Psi_1,$$

где $\Psi_0 \in \operatorname{Ker} T$, $\Psi_1 \perp \operatorname{Ker} T$; $\Psi_n = \Psi_0 + \sum_{k=1}^{n} (\Psi, \varphi_k)\, \varphi_k$ сходится к Ψ по норме пространства H_1:

$$\exists C_1 : |(T\Psi)(x, y) - (T\Psi_n)(x, y)| = \left| \int_{H \oplus H} \beta(x, y, u, v)\, (\Psi(u, v) - \right.$$
$$\left. - \Psi_n(u, v))\, d\mu(u, v) \right| \leqslant C_1 \|x\| \|y\| \|\Psi - \Psi_n\|, \quad (T\Psi_n)(x, y) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (\Psi, \varphi_k)\, \varphi_k(x, y).$$

Отсюда $(T\Psi)(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k (\Psi, \varphi_k)\, \varphi_k(x, y)$. Значит, $\int_{H \oplus H} (\beta(x, y, u, v) -$ $- \gamma(x, y, u, v))\, \Psi(u, v)\, d\mu(u, v) = 0$. Положив $\Psi(u, v) = \beta(x, y, u, v) -$ $- \gamma(x, y, u, v)$ ($\langle x, y\rangle$ фиксировано), получим (поскольку R может быть выбрано произвольным)

$$\beta(x, y, u, v) = \gamma(x, y, u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \varphi_k(x, y)\, \varphi_k(u, v) = \sum_{k=1}^{\infty} (c_k x, y)\, (C_k u, v),$$

где $\varphi_k(x, y) = (C_k x / \sqrt{\lambda_k}, y)$. ■

Пусть задан гауссов случайный линейный оператор с $\alpha(x, y) = 0$ и дисперсионной формой $\beta(x, y, u, v)$. Рассмотрим последовательность независимых $N(0, 1)$-распределенных случайных величин, заданных на вероятностном пространстве (Ω_1, F_1, P_1). Согласно теореме 1 $\beta(x, y, u, v) = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k x, y)(C_k u, v)$, где $C_k \in L(H)$, и, как следует из теоремы 1 работы [2, с. 30], последовательность $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n}\xi_k C_k$ ограниченных случайных операторов сходится к случайному оператору $A_1 \in L_w(\Omega, H)$, поскольку $\forall x, y \in H$ последовательность случайных величин $\eta_n = \sum_{k=1}^{n}\xi_k(C_k x, y)$ сходится по вероятности к гауссовой случайной величине η с $M\eta = 0$ и $D\eta = \sum_{k=1}^{\infty}(C_k x, y)(C_k x, y) = \beta(x, y, u, v)$, причем оператор $A_1(\omega)$ гауссов.

Гауссовы случайные функции $(A(\omega)x, y)$ и $(A_1(\omega)x, y)$ имеют одинаковые распределения, поэтому вместо гауссового случайного оператора $A(\omega)$ можно рассматривать эквивалентный оператор $A_1(\omega)$, для которого справедливо представление $A_1(\omega) = \sum_{k=1}^{\infty}\xi_k C_k$.

3. Достаточные условия ограниченности предельного оператора. В дальнейшем будем рассматривать последовательность независимых $N(0, 1)$-распределенных случайных величин ξ_k, C_k — последовательность операторов $(C_k \in L(H))$, и будем изучать сходимость последовательности $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^{n}\xi_k C_k$. Согласно теореме 1 из [2, с. 30], для сходимости $S_n(\omega)$ в $L_w(\Omega, H)$ необходимо и достаточно, чтобы сходился по вероятности ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k(C_k x, y)$ для всех $x, y \in H$. Но так как ξ_k независимы и $N(0, 1)$-распределены, то для сходимости по вероятности этого ряда необходимо и достаточно, чтобы $\sum_{k=1}^{\infty}(C_k x, y)^2 < \infty$. Итак, справедлива теорема.

Теорема 2. *Ряд* $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k C_k$, *где* ξ_k $N(0, 1)$*-распределены и независимы,* $C_k \in L(H)$, *сходится в* $L_w(\Omega, H)$ *тогда и только тогда, когда* $\forall x, y \in H$: $\sum_{k=1}^{\infty}(C_k x, y)^2 < \infty$.

Чтобы дать некоторые достаточные условия ограниченности, докажем аналог теоремы о сходимости абсолютно сходящегося ряда. Для этого понадобится несколько вспомогательных утверждений.

Пусть X — гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Из принципа равномерной ограниченности легко получается лемма.

Лемма 1. *Пусть* $B_n(x, y)$ — *последовательность ограниченных билинейных форм. Пусть* $\forall x, y \in X$ $\exists \lim_{n\to\infty} B_n(x, y) = B(x, y)$. *Тогда* $B(x, y)$ *тоже ограниченная билинейная форма.*

Пусть B — самосопряженный оператор, $E(\lambda)$ — его разложение единицы. Модулем оператора B называем оператор $|B| = \int_{\mathbb{R}^1}\lambda dE(\lambda)$.

Лемма 2. *Если* B — *самосопряженный ограниченный оператор, то* $\forall x \in X: |(Bx, x)| \leqslant (|B|x, x)$.

Доказательство. $|(Bx, x)| = \left|\int\limits_{\mathbb{R}^1} \lambda d(E(\lambda)x, x)\right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^1} |\lambda| d(E(\lambda)x, x) = (|B|x, x)$. ■

Будем говорить, что последовательность ограниченных операторов B_n слабо сходится к оператору B, если $\forall x, y \in X: (B_n x, y) \underset{n\to\infty}{\to} (Bx, y)$.

Лемма 3. *Пусть B_n, $n \geqslant 1$, — последовательность самосопряженных ограниченных операторов и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |B_n|$ слабо сходится. Тогда и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} B_n$ слабо сходится.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall x \in X$ сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (B_n x, x)$, поскольку $(B_n x, y) = ((B_n(x+y), x+y) - (B_n(x-y), x-y) + i(B_n(x+iy), x+iy) - iB_n(x-iy), x-iy))/4$. Из леммы 2 и сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (|B_n|x, x)$ следует абсолютная сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (B_n x, x)$. ■

Пусть $B \in L(H)$. Модулем оператора B назовем оператор $|B| = ((BB^* + B^*B)/2)^{1/2}$, где для неотрицательного самосопряженного A $A^{1/2} = \int\limits_0^{\infty} \sqrt{\lambda}\, dE(\lambda)$.

Теорема 3. *Пусть $B_k \in L(X)$, $k \geqslant 1$, и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |B_k|$ слабо сходится. Тогда и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ слабо сходится.*

Доказательство. $B_k = (B_k + B_k^*)/2 + i(B_k - B_k^*)/2i$. Значит, слабая сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_k + B_k^*)/2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_k - B_k^*)/2i$ влечет слабую сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Но операторы $(B_k + B_k^*)/2$ и $(B_k - B_k^*)/2i$ самосопряженные, поэтому применима лемма 3, дающая достаточные условия слабой сходимости этих рядов. Согласно лемме, достаточно сходимости рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_k B_k + B_k B_k^* + B_k^* B_k + B_k^* B_k^*)^{1/2}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_k B_k^* + B_k^* B_k - B_k B_k - B_k^* B_k^*)^{1/2}$. Но так как имеют место неравенства $(B_k B_k + B_k B_k^* + B_k^* B_k + B_k^* B_k^*) \leqslant 2(B_k B_k^* + B_k^* B_k)$ и $(B_k B_k^* + B_k^* B_k - B_k B_k - B_k^* B_k^*) \leqslant 2(B_k B_k^* + B_k^* B_k)$, то из теоремы о монотонности корня (см. [3, с. 352]) и слабой сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |B_k|$ получаем слабую сходимость рядов $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_k + B_k^*)/2$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (B_k - B_k^*)/2i$, а значит, и ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. ■

Легко убедиться (см. [4]) в справедливости следующего утверждения.

Лемма 4. *Пусть ξ $N(0, 1)$-распределена. Для $c > 0$ справедлива оценка:* $P\{|\xi| > c\} \leqslant \sqrt{2/\pi}\, e^{-c^2/2}/c$.

Если задано гильбертово пространство H над полем действительных чисел, то можно рассматривать его комплексацию H_c. Для этого в $H \times H$ вводятся операции следующим образом: сложение — $\langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle = \langle x_1 + y_1, x_2 + y_2\rangle$; умножение на комплексные числа — $(\alpha + i\beta)\langle x, y\rangle = \langle \alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y\rangle$; скалярное произведение — $(\langle x, y\rangle, \langle u, v\rangle)_{H_c} = (x, u)_H + (y, v)_H + i(y, u)_H - i(x, v)_H$.

H_c с введенными таким образом операциями представляет собой гильбертово пространство над полем комплексных чисел. Для операторов $B \in \in L(H)$ можно рассматривать их продолжение на H_c, положив $B\langle x, y\rangle = = \langle Bx, By\rangle$ (мы говорим о продолжении, так как $\{\langle x, 0\rangle\}$, рассматриваемое над полем действительных чисел, изометрично H). Теперь можно рассмотреть $|B| \in L(H_c)$. По теореме 3 для слабой сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} B_k$, $B_k \in \in L(H)$, достаточно слабой сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|$, $|B_k| \in L(H_c)$.

Теорема 4. *Пусть $B_k \in L(H)$, ξ_k имеют распределение $N(0, 1)$ и независимы, $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$—последовательность положительных чисел такая, что для некоторого $c > 0$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-c/a_k^2} < \infty$. Пусть, кроме того, слабо сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |B_k|/a_k$. Тогда сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k$ и предел представляет собой ограниченный случайный оператор.*

Доказательство. $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k\xi_k)(B_k/a_k)$. Покажем, что $P \times \times \{\omega : \exists M : |a_k\xi_k| \leqslant M \ \forall k \in \mathcal{N}\} = 1$. Для этого рассмотрим события $A_k = = \{\omega : |a_k\xi_k| > \sqrt{2}\, c\}$ (c из условия теоремы). Из сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} e^{-c/a_k^2}$ следует сходимость ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sqrt{2/\pi}\, e^{-c/a_k^2}/\sqrt{2c}$. Но согласно лемме 4 $P(A_k) \leqslant \sqrt{2/\pi}\, a_k e^{-c/a_k^2}/\sqrt{2c}$, значит, $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$. Отсюда получаем $P\{\omega : \exists M : \forall k \in \mathcal{N} : |a_k\xi_k| \leqslant M\} = 1$, поэтому с вероятностью 1 слабо сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k\xi_k| (|B_k|/a_k) = \sum_{k=1}^{\infty} |\xi_k B_k|$. Применяя теорему 3, получаем, что с вероятностью 1 слабо сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k$. Случайные величины $\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k B_k x, y\right)$ сходятся по вероятности $\forall x, y \in H$, поскольку они сходятся с вероятностью 1. Поэтому ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k B_k$ сходится в $L_w(\Omega, H)$ и предел принадлежит $L(\Omega, H)$. ■

4. Условия, при которых $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k \in L_s(\Omega, H)$.

Теорема 5. *Пусть $\xi_k(\omega)$ $N(0, 1)$-распределены и независимы, $C_k \in L(H)$, $k \geqslant 1$. Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k$ слабо сходится и предел представляет собой сильный случайный оператор тогда и только тогда, когда слабо сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} C_k^* C_k$.*

Доказательство. Пусть $x \in H$ фиксировано, $\{\mathbf{e}_k\}$ — ортонормированный базис в H. Так как предел — сильный случайный оператор, то $\sum_{k=1}^{n} \xi_k (C_k x, \mathbf{e}_m)$ сходится по вероятности к $(\eta_x, \mathbf{e}_m)$, где η_x — гауссова случайная величина со значениями в H. Поскольку ξ_k независимы и $N(0, 1)$-

распределены, то $M(\eta_x, \mathrm{e}_m)^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (C_k x, \mathrm{e}_m)$; $M\|\eta_x\|^2 < \infty$. Но $M\|\eta_x\|^2 =$ $= \sum\limits_{m=1}^{\infty} M(\eta_x, \mathrm{e}_m)^2 = \sum\limits_{m=1}^{\infty}\sum\limits_{k=1}^{\infty} (C_k x, \mathrm{e}_m)^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|C_k x\|^2$.

Итак, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|C_k x\|^2 < \infty$ $\forall x \in H$, т. е. $\forall x \in H$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (C_k^* C_k x, x)$ сходится. Поскольку $C_k^* C_k$ самосопряжен, то $(C_k^* C_k x, y) = [(C_k^* C_k (x+y), x+y) - (C_k^* C_k (x-y), x-y)]/4$. Отсюда получаем, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^* C_k$ слабо сходится.

Наоборот, пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^* C_k$ слабо сходится. Покажем сначала, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k$ сходится в $L_w(\Omega, H)$. Согласно теореме 2 для этого нужно, чтобы $\forall x, y \in H$ сходился ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k x, y)^2$. Но $C_k x, y)^2 \leqslant \|C_k x\|^2 \|y\|^2$, а $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|C_k x\|^2$ сходится. Значит, ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k C_k$ сходится в $L_w(\Omega, H)$. Покажем далее, что предел — сильный случайный оператор. Пусть $x \in H$ фиксировано. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|C_k x\|^2$ сходится, то можно выбрать n_1 так, чтобы $\sum\limits_{k=n_1}^{\infty} \|C_k x\|^2 \leqslant 1/2^3$, далее выбрать $n_2 > n_1$ так, чтобы $\sum\limits_{k=n_2}^{\infty} \|C_k x\|^2 < 1/2^{3\cdot 2}$, и вообще выбрать n_p так, чтобы $n_p > n_{p-1}$ и $\sum\limits_{k=n_p}^{\infty} \|C_k x\|^2 < 1/2^{3p}$. В таком случае выполняются неравенства $\sum\limits_{k=n_p}^{n_{p+1}} \|C_k x\|^2 < 1/2^{3p}$. Согласно неравенству Чебышева, $P\left\{\omega : \left\| \sum\limits_{k=n_p}^{n_{p+1}} \xi_k C_k x \right\| > 1/2^p \right\} < 1/2^p$. Так как $\sum\limits_{p=1}^{\infty} P\left\{\omega : \left\| \sum\limits_{k=n_p}^{n_{p+1}} \xi_k C_k x \right\| > 1/2^p \right\} < \infty$, то из леммы Бореля—Кантелли следует, что с вероятностью 1 сходится последовательность случайных величин $S_p = \sum\limits_{k=1}^{n_p} \xi_k C_k x$ со значениями в H к случайной величине η_x. Пусть пределом будет слабый случайный оператор $A(\omega)$. Тогда с вероятностью 1 выполняется равенство $(A(\omega)x, y) = (\eta_x, y)$. Согласно теореме 1 из [2, с. 12] $A(\omega) \in L_s(\Omega, H)$, так как $P\left\{\omega : \sum\limits_{k=1}^{\infty} (A(\omega)x, \mathrm{e}_k)^2 < \infty\right\} = P\{\omega : \|\eta_x\| < \infty\} = 1$. ■

Замечание. Слабая сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^* C_k$ эквивалентна сильной сходимости этого ряда.

Действительно, пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} C_k^* C_k$ слабо сходится и x фиксировано. Покажем, что последовательность $\sum_{k=1}^{n} C_k^* C_k x$ фундаментальна:

$$\left\| \sum_{k=n}^{m} C_k^* C_k x \right\| = \sup_{\|y\| \leqslant 1} \sum_{k=n}^{m} (C_k^* C_k x, y) \leqslant \sup_{\|y\| \leqslant 1} \sum_{k=n} \| C_k x \| \| C_k y \| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{k=n}^{m} \| C_k x \|^2 \right)^{1/2} \sup_{\|y\| \leqslant 1} \left(\sum_{k=n}^{m} \| C_k y \|^2 \right)^{1/2}.$$

Но $\sup_{\|y\| \leqslant 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \| C_k y \|^2 \right)^{1/2} \leqslant M < \infty$.

1. *Булдыгин В. В.* Сходимость случайных элементов в топологических пространствах.— Киев : Наук. думка, 1980.— 240 с.
2. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы.— Киев : Наук. думка, 1978.— 200 с.
3. *Рид М.*, *Саймон Б.* Методы современной математической физики : В 4-х т. Т. 2.— М.: Мир, 1978.— 396 с.
4. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения.— М. : Мир, 1967.— 498 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 23.06.83