УДК 517.98

К. А. Юсенко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО ЧЕТВІРКИ ПРОЕКТОРІВ, ПОВ'ЯЗАНИХ ЛІНІЙНИМ СПІВВІДНОШЕННЯМ*

We describe the set of values $\gamma \in \mathbb{R}$ for which there exist quadruples of projectors P_i, for a fixed collection of numbers $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,4}$, such that $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \gamma I$.

Описано множину тих $\gamma \in \mathbb{R}$, при яких існують четвірки проекторів P_i для фіксованого набору чисел $\alpha_i \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,4}$, такі, що $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \gamma I$.

Вступ. Нехай $M_i = \{0 = \alpha_0^{(i)} < \alpha_1^{(i)} < \ldots < \alpha_{m_i}^{(i)}\}$, $i = \overline{1,n}$, — задані множини в $\mathbb{R}_+$. Набори самоспряжених операторів $A_i = A_i^*$ зі спектрами $\sigma(A_i) \subset M_i$ та сумою, кратною скалярному операторові, вивчалися в багатьох роботах (див., наприклад, бібліографію в [1]). Розглядаючи такі оператори як зображення твірних інволютивної алгебри, отримуємо еквівалентну задачу опису незвідних $*$-зображень алгебри

$$\mathcal{A}_{M_1, M_2, \ldots, M_n; \gamma} = \mathbb{C}\left\langle a_1 \ldots a_n \;\middle|\; a_i = a_i^*,\ R_i(a_i) = 0,\ a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \gamma e \right\rangle,$$

де R_i — анулюючий поліном відповідної твірної a_i. Така алгебра ізоморфна алгебрі, породженій набором проекторів

$$\mathcal{P}_{M_1, M_2, \ldots, M_n; \gamma} = \mathbb{C}\left\langle p_1^{(1)}, \ldots, p_{m_1}^{(1)}, \ldots, p_1^{(n)}, \ldots, p_{m_n}^{(n)} \;\middle|\; p_i^{(k)} = p_i^{(k)2} = p_i^{(k)*}, \right.$$

$$\left. \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{m_i} \alpha_k^{(i)} p_k^{(i)} = \gamma e,\ p_j^{(i)} p_k^{(i)} = 0 \right\rangle.$$

З кожною такою алгеброю можна пов'язати граф Γ, яких має n гілок, що сходяться в одній вершині (корінь графа). Кожна i-та гілка графа містить m_i вершин, відмічених числами $\alpha_i^{(k)}$, $k = \overline{1, m_i}$. Кореню графа ставиться у відповідність число γ (більш детально про зв'язок задачі із зображеннями графів див. [2]). Вектор $\chi = (\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_{m_1}^{(1)}; \ldots; \alpha_n^{(1)}, \ldots, \alpha_{m_n}^{(n)})$ будемо називати характером алгебри $\mathcal{P}_{M_1, M_2, \ldots, M_n; \gamma}$. Алгебра $\mathcal{P}_{M_1, M_2, \ldots, M_n; \gamma}$ однозначно задається своїм графом, характером χ та числом γ. Далі будемо позначати її $\mathcal{P}_{\Gamma, \chi, \gamma}$. У роботі [3] показано, що незалежно від χ та γ алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma, \chi, \gamma}$: 1) скінченновимірна, якщо Γ — діаграма Динкіна типу D_n, E_6, E_7, E_8; 2) нескінченновимірна, поліноміального росту, якщо Γ — розширена діаграма Динкіна $\tilde{D}_4$, $\tilde{E}_6$, $\tilde{E}_7$, $\tilde{E}_8$; 3) для всіх інших графів містить вільну алгебру з двома самоспряженими твірними.

При вивченні $*$-зображень таких алгебр природно виникають задачі:

1а) описати множину пар $(\chi; \gamma)$, для яких алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma, \chi, \gamma}$ має $*$-зображення; таку множину позначимо Σ_Γ;

* Частково підтримано Державним фондом фундаментальних досліджень України (грант №01.07/071).

© К. А. ЮСЕНКО, 2006

1б) для кожного характера χ описати множину тих γ, для яких алгебра $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ має $*$-зображення; таку множину позначимо $\Sigma_{\Gamma,\chi}$;

2) для кожної пари $(\chi;\gamma)\in\Sigma_\Gamma$ описати всі незвідні, з точністю до унітарної еквівалентності, $*$-зображення алгебри $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$.

Структура множин Σ_Γ, $\Sigma_{\Gamma,\chi}$ та $*$-зображень $\mathcal{P}_{\Gamma,\chi,\gamma}$ суттєво залежить від графа Γ. Роботу [4] присвячено задачам 1 та 2 для звичайних діаграм Динкіна. У випадку, коли Γ — розширена діаграма Динкіна, рядом авторів було описано множини $\Sigma_{\Gamma,\chi}$ для спеціальних характерів (див. бібліографію в [1]). Повний опис множини $\Sigma_{\tilde{D}_4}$ наведено у роботі [5]. Але, незважаючи на те що множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ є підмножиною $\Sigma_{\tilde{D}_4}$, виявилося, що отримати її опис із результатів роботи [5] нелегко.

У даній роботі наведено безпосередній опис множини $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$. Досліджено, в яких випадках така множина є нескінченною (наведено необхідну та достатню умову: всі компоненти характеру $\chi=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3;\alpha_4)$ задовольняють нерівність $\alpha_i<(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)/2$ (п. 3)), що дозволило, подібно до [5], дослідити, у яких випадках алгебра $\mathcal{P}_{\tilde{D}_4,\chi,\gamma}$ має зображення на гіперплощині $\gamma=(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)/2$ (п. 3). Описано структуру множини $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ для спеціального характеру $\chi_\delta=(1,1,\delta,\delta)$ (п. 5).

1. Допоміжні твердження. Нагадаємо, що множина можливих значень γ, для яких існують трійки проекторів P_1, P_2, P_3 такі, що $\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3=\gamma I$, для фіксованого впорядкованого за зростанням набору $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=1,2,3$, описується формулою (див. [4])

$$\Sigma_{D_4,(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)}=\{0\}\cup\left\{\sum_{i\in J}\alpha_i,\ J\subset\{1,2,3\}\right\}\cup\{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)/2\}. \tag{1}$$

Будемо вважати, що $\alpha_3<\alpha_1+\alpha_2$, інакше множина не містить точку $(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)/2$.

Твердження 1. *Якщо набір проекторів $P_1, P_2, \ldots, P_n$ задовольняє рівність*

$$\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\ldots+\alpha_{n-1}P_{n-1}+P_n=I,$$

то проектор P_n комутує з усіма іншими, тобто $[P_n,P_i]=0$, $i=\overline{1,n-1}$.

Доведення. Розглянемо оператор $Q=I-P_n$. Домноживши рівність $\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\ldots+\alpha_{n-1}P_{n-1}=Q$ на P_n справа і зліва та врахувавши, що $QP_n=P_nQ=0$, отримаємо

$$\alpha_1P_nP_1P_n+\alpha_2P_nP_2P_n+\ldots+\alpha_3P_nP_{n-1}P_n=0.$$

Оскільки всі оператори $P_nP_iP_n$ невід'ємні, то $P_nP_iP_n=0$, $i=\overline{1,n-1}$. Можна перевірити, що $P_nP_iQP_iP_n=0$, тому $P_nP_iQ=QP_iP_n=0$. Внаслідок того, що $P_nP_iQ=P_nP_i(I-P_n)=P_nP_i$, маємо $P_nP_i=0$. Аналогічно можна показати, що $P_iP_n=0$. А це означає, що $[P_n,P_i]=0$, $i=\overline{1,n-1}$.

Наслідок 1. *Існує набір проекторів P_i, $i=\overline{1,4}$, таких, що $\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3+\alpha_4P_4=\alpha_4I$.*

2. Четвірки проекторів та функтори Кокстера. Нехай задано набір чисел $\alpha_i\in\mathbb{R}$, $i=\overline{1,4}$. Наша мета — описати множини тих γ, для яких існують четвірки проекторів P_i, $i=\overline{1,4}$, такі, що $\alpha_1P_1+\alpha_2P_2+\alpha_3P_3+\alpha_4P_4=\gamma I$.

З такими четвірками проекторів можна пов'язати асоціативну $\mathbb{C}$-алгебру $\mathcal{P}_{\tilde{D}_4,\chi,\gamma}$, породжену твірними $\{p_i\}_{i=1}^4$ та співвідношеннями

$$p_i = p_i^2 = p_i^*,$$

$$\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \alpha_4 p_4 = \gamma e,$$

де через $\chi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ позначено характер алгебри (будемо вважати, що $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \alpha_4$). Тоді задачу можна переформулювати так: для кожного характеру описати множину $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ тих γ, для яких алгебра $\mathcal{P}_{\tilde{D}_4,\chi,\gamma}$ має $*$-зображення. Позначимо через χ_i i-ту компоненту характеру χ, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$.

Множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ має такі властивості (див. [6]):

1) $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi} \subset [0, \alpha]$;

2) $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi} \ni \sum_{i \in J} \alpha_i$, $\quad J \subset \{0, 1, 2, 3, 4\}$;

3) $\tau \in \Sigma_{\tilde{D}_4,\chi} \Leftrightarrow \alpha - \tau \in \Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$.

Оскільки множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ симетрична відносно $\alpha/2$ (властивість 3), то будемо вивчати множину $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi} \bigcap [0; \alpha/2)$.

Для дослідження множини $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ використаємо техніку функторів Кокстера (введених у [6]), що встановлюють еквівалентність між категоріями $*$-зображень $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{\tilde{D}_4,\chi,\gamma}$ при різних значеннях параметрів χ, γ. У роботі [6] побудовано лінійний T та гіперболічний S функтори. Дія цих функторів між категоріями породжує дію на парі $(\chi; \gamma)$:

$$S: (\chi;\gamma) \mapsto (\gamma-\alpha_1,\ \gamma-\alpha_2,\ \gamma-\alpha_3,\ \gamma-\alpha_4;\ \gamma),$$

$$T: (\chi;\gamma) \mapsto (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4;\ \alpha-\gamma).$$

Нехай $(\chi^{(n)}; \gamma^{(n)}) = (ST)^n(\chi;\gamma)$, $\quad \lambda = \alpha/2 - \gamma$. Тоді має місце таке твердження.

Твердження 2. *Компоненти характеру $\chi^{(n)}$ та число $\gamma^{(n)}$ визначаються за формулами*

$$\chi_i^{(2n-1)} = \frac{\alpha}{2} - \alpha_i - (2n-1)\lambda, \qquad \chi_i^{(2n)} = \alpha_i - 2n\lambda, \qquad i = \overline{1,4}, \tag{2}$$

$$\gamma^{(n)} = \frac{\alpha}{2} - (2n+1)\lambda, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Для доведення твердження слід записати дію функтора ST на парі $(\chi; \gamma)$ та застосувати метод математичної індукції.

Наслідок 2. *Для будь-якого $\gamma \in [0, \alpha/2)$ існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що або один з компонентів характеру $\chi^{(n)}$, або число $\gamma^{(n)}$ є меншим або дорівнює нулю.*

Доведення. Оскільки для будь-якого $\gamma \in [0, \alpha/2)$ число $\lambda > 0$, то з формул (2) та (3) випливає, що всі три послідовності $\{\chi_i^{(2n)}\}_{n=1}^\infty$, $\{\chi_i^{(2n-1)}\}_{n=1}^\infty$ та $\{\gamma_i^{(n)}\}_{n=1}^\infty$ необмежено спадають, а отже, існує таке n, для якого твердження виконується.

Теорема 1. *Число $\gamma \in [0, \alpha/2)$ належить множині $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ тоді і тільки тоді, коли існують $n \in \mathbb{Z}_+$ і $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ такі, що виконуються дві умови*

$$\chi_j^{(n)} \le 0, \quad \chi_i^{(k)} > 0, \quad \gamma^{(k)} \ge 0 \quad \forall k < n, \tag{4}$$

$$\gamma^{(n-1)} \in \Sigma_{D_4, \chi^*}. \tag{5}$$

Тут характер χ^* *задається трійкою коефіцієнтів* $\chi_i^{(n-1)}$, $i = \overline{1,4}$, $i \ne j$.

Доведення випливає з наслідку 2 та функторіальності відображення (ST), за яким будуються відповідні послідовності.

3. Нескінченність множини $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ та зображення на гіперплощині.

Теорема 2. *Множина* $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ *містить нескінченну підмножину* Σ_∞ *з граничною точкою* $\alpha/2$ *тоді і тільки тоді, коли* $\alpha_i < \alpha/2$, $i = \overline{1,4}$. *Якщо при цьому така умова виконується, то*:

1) $\Sigma_\infty = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_1}{2n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$, *якщо* $\alpha_2 + \alpha_3 > \alpha_1 + \alpha_4$;

2) $\Sigma_\infty = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha - 2\alpha_4}{2(2n-1)} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$, *якщо* $\alpha_2 + \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_4$;

3) $\Sigma_\infty = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$, *якщо* $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4$.

Доведення. *Необхідність.* Якщо один із коефіцієнтів $\alpha_i \ge \alpha/2$, то відповідний проектор P_i комутує з іншими, а отже, дорівнює або 0, або I у незвідному зображенні. Тоді задача зведеться до трійки (чи відповідно меншого числа) проекторів. Тому згідно з теоремою 1 множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ є скінченною.

Достатність. Нехай, наприклад, $\alpha_2 + \alpha_3 > \alpha_1 + \alpha_4$. Покажемо, що для кожного $\gamma = \alpha/2 - \alpha_1/(2n)$, $n \in \mathbb{N}$, існує зображення алгебри $\mathcal{P}_{\tilde{D}_4,\chi,\gamma}$. При такому γ $\chi_1^{(2n)} = 0$, $\chi_i^{(2n-1)} > 0$, $i = \overline{1,4}$, і $\chi_1^{(2n-1)} = \gamma^{(2n-1)}$ ($\chi_1^{(2n-1)}$ дорівнює нулю на наступному кроці). Згідно з наслідком 1 така алгебра має зображення, а отже, має зображення і початкова алгебра. Випадок $\alpha_2 + \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_4$ доводиться аналогічно. Якщо ж $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4$, то дві такі множини є нескінченними, і, враховуючи рівності

$$\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha - 2\alpha_4}{2(2n-1)} = \frac{\alpha}{2} - \frac{2\alpha_1 + 2\alpha_4 - 2\alpha_4}{2(2n-1)} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_1}{2n-1},$$

отримуємо

$$\Sigma_\infty = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_1}{n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}.$$

***Зауваження* 1.** Аналогічно можна показати, що (при виконанні умови $\alpha_i < \alpha/2$, $i = \overline{1,4}$) поряд з нескінченною множиною Σ_∞ в $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ міститься також скінченна множина Σ_0, яка визначається за правилом:

1) $\Sigma_0 = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha - 2\alpha_4}{2(2n-1)} \;\middle|\; n < \frac{\alpha_1}{\alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_1 - \alpha_4},\; n \in \mathbb{N} \right\}$, якщо $\alpha_2 + \alpha_3 > \alpha_1 + \alpha_4$;

2) $\Sigma_0 = \left\{ \dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\alpha_1}{2n} \;\middle|\; n < \dfrac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_4 - \alpha_2 - \alpha_3},\ n \in \mathbb{N} \right\}$, якщо $\alpha_2 + \alpha_3 < \alpha_1 + \alpha_4$;

3) $\Sigma_0 = \varnothing$, якщо $\alpha_2 + \alpha_3 = \alpha_1 + \alpha_4$.

Теорема 3. *Нехай числа* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = \overline{1,4}$, *такі, що виконуються нерівності* $\alpha_i < \alpha/2$. *Тоді існує набір проекторів* P_1, P_2, P_3, P_4 *таких, що* $\alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 + \alpha_3 P_3 + \alpha_4 P_4 = \alpha I/2$.

Доведення. Необхідно показати, що множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ містить точку $\alpha/2$. Згідно з теоремою Шульмана [7] множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ є замкненою. Оскільки для характеру $\chi = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ виконується умова теореми 2, то множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ містить нескінченну підмножину Σ_∞, а отже, внаслідок замкненості, граничну точку серії $\alpha/2$.

Зауважимо, що таку теорему в дещо іншому формулюванні наведено у роботі А. А. Кириченка (див., наприклад, [5]).

4. Підмножини в множині $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$. Як було показано при доведенні теореми 2, задача зводиться до меншого числа проекторів, коли хоча б один з компонентів характеру $\chi_i \geq \alpha/2$, тому, без обмеження загальності, далі вважатимемо, що $\chi_i < \alpha/2$, $i = \overline{1,4}$.

Для опису інших множин використаємо теорему 1. Нехай $\gamma \in \Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ і k таке, що умова (4) виконується. Можливі два випадки: $k = 2n$ та $k = 2n - 1$.

1. *Випадок* $k = 2n$. Умову (4), використовуючи формули (2) та (3), можна записати у вигляді системи нерівностей

$$\lambda > \frac{\alpha_1}{2n}, \qquad \lambda < \frac{\alpha - 2\alpha_4}{2(2n-1)},$$
$$\lambda < \frac{\alpha_1}{2(n-1)}, \qquad \lambda \leq \frac{\alpha}{2(4n-1)}. \tag{6}$$

Тут, як і раніше, $\lambda = \alpha/2 - \gamma$. Умову (5) на підставі теореми 1 можна записати так:

$$0 = \frac{\alpha}{2} - (4n-1)\lambda,$$

$$\frac{\alpha}{2} - \alpha_i - (2n-1)\lambda = \frac{\alpha}{2} - (4n-1)\lambda,$$

$$\frac{\alpha}{2} - \alpha_i - (2n-1)\lambda + \frac{\alpha}{2} - \alpha_j - (2n-1)\lambda = \frac{\alpha}{2} - (4n-1)\lambda, \quad i, j = 2, 3, 4, \quad i \neq j, \tag{7}$$

$$\sum_{i=2}^{4} \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha_i - (2n-1)\lambda \right) = \frac{\alpha}{2} - (4n-1)\lambda,$$

$$\sum_{i=2}^{4} \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha_i - (2n-1)\lambda \right) = 2\left(\frac{\alpha}{2} - (4n-1)\lambda \right).$$

Розв'язуючи систему нерівностей (6) для кожного λ такого, що задовольняє одне з рівнянь (7), в $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ отримуємо такі підмножини:

$$\Sigma_1 = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2(4n-1)} \;\middle|\; n < \frac{\alpha_4}{4\alpha_4 - \alpha},\ n < \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha - 4\alpha_1},\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\Sigma_2^i = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha_i}{2n} \;\middle|\; n < \frac{\alpha_i}{2\alpha_i + 2\alpha_4 - \alpha},\ n < \frac{\alpha_i}{\alpha_i - \alpha_1},\ n < \frac{\alpha_i}{4\alpha_i - \alpha},\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\Sigma_3 = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha - 2\alpha_1}{2(2n+1)} \;\middle|\; n < \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha - 4\alpha_1},\ n < \frac{\alpha_2 + \alpha_3}{2(\alpha_4 - \alpha_1)},\ n(4\alpha_i - \alpha) < \alpha_i,\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$i = 2, 3, 4.$$

2. *Випадок* $k = 2n + 1$. Міркуючи, як і в попередньому випадку, одержуємо систему нерівностей

$$\lambda > \frac{\alpha - 2\alpha_4}{2(2n+1)}, \qquad \lambda < \frac{\alpha_1}{2n},$$
$$\lambda < \frac{\alpha - 2\alpha_4}{2(2n-1)}, \qquad \lambda \le \frac{\alpha}{2(4n+1)} \tag{8}$$

та рівняння

$$0 = \frac{\alpha}{2} - (4n+1)\lambda,$$
$$\alpha_i - 2n\lambda = \frac{\alpha}{2} - (4n+1)\lambda,$$
$$\alpha_i - 2n\lambda + \alpha_j - 2n\lambda = \frac{\alpha}{2} - (4n+1)\lambda, \tag{9}$$
$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i - 2n\lambda = \frac{\alpha}{2} - (4n+1)\lambda,$$
$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i - 2n\lambda = 2\left(\frac{\alpha}{2} - (4n+1)\lambda\right), \qquad i, j = 1, 2, 3, \qquad i \ne j.$$

Розв'язуючи систему нерівностей (8) для кожного λ, що задовольняє одне з рівнянь (9), в $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ отримуємо такі підмножини :

$$\Sigma_4 = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2(4n+1)} \;\middle|\; n < \frac{\alpha - \alpha_4}{4\alpha_4 - \alpha},\ n < \frac{\alpha_1}{\alpha - 4\alpha_1},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

$$\Sigma_5^i = \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha - 2\alpha_i}{2(2n+1)} \;\middle|\; n < \frac{\alpha_1}{\alpha - 2\alpha_i - 2\alpha_1},\ n < \frac{\alpha_i}{\alpha - 4\alpha_i},\ n < \frac{\alpha - \alpha_4 - \alpha_i}{2(\alpha_4 - \alpha_i)},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\},$$

$$i = 1, 2, 3.$$

Таким чином, структуру множини $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ повністю описує наступна теорема.

Теорема 4. *Множина тих* γ, *для яких алгебра* $\mathcal{P}_{\tilde{D}_4,\chi,\gamma}$ *має зображення, описується формулою*

$$\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi} \cap [0; \alpha/2) = \Sigma_\infty \cup \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2^i \cup \Sigma_3 \cup \Sigma_4 \cup \Sigma_5^j, \qquad i = 2, 3, 4, \quad j = 1, 2, 3.$$

Всю множину $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ *отримуємо симетричним відображенням відносно* $\alpha/2$ *та приєднанням точки* $\alpha/2$.

5. Множина $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ для характеру $\chi_\delta = (1, 1, \delta, \delta)$. Структура множини $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ значно спрощується, коли $\chi = \chi_1 = (1, 1, 1, 1)$ або $\chi_\delta = (1, 1, \delta, \delta)$ (див. [5, 8]). Покажемо, як, використовуючи теореми 2, 4, можна побудувати множину $\Sigma_{\tilde{D}_4,\chi}$ для характеру $\chi_\delta = (1, 1, \delta, \delta)$.

На підставі твердження 2 отримуємо

$$\Sigma_\infty = \left\{1 + \delta - \frac{1}{2n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\}, \qquad \Sigma_0 = \varnothing.$$

Множини Σ_2^i, Σ_5^j, $i = 2, 3, 4$, $j = 1, 2, 3$, та Σ_3 не існують, а множини Σ_1, Σ_4 наберуть вигляду

$$\Sigma_1 = \left\{1 + \delta - \frac{1+\delta}{4n-1} \;\middle|\; n < \frac{\delta}{2(\delta-1)},\ n \in \mathbb{N}\right\},$$

$$\Sigma_4 = \left\{1 + \delta - \frac{1+\delta}{4n+1} \;\middle|\; n < \frac{1}{2(\delta-1)},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Таким чином,

$$\Sigma_{\tilde{D}_4,(1,1,\delta,\delta)} \cap [0; \alpha/2) = \left\{1 + \delta - \frac{1}{2n} \;\middle|\; n \in \mathbb{N}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{1 + \delta - \frac{1+\delta}{4n-1} \;\middle|\; n < \frac{\delta}{2(\delta-1)},\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup$$
$$\cup \left\{1 + \delta - \frac{1+\delta}{4n+1} \;\middle|\; n < \frac{\delta}{2(\delta-1)},\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}.$$

Автор щиро вдячний В. Л. Островському за постановку задачі, Ю. С. Самойленку та Ю. П. Москальовій за корисні зауваження щодо змісту статті.

1. *Заводовський М. В., Самойленко Ю. С.* Теорія операторів та інволютивні зображення алгебр // Укр. мат. вісн. – 2004. – **1**, № 4. – С. 532 – 547.
2. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Функцион. анализ и его прил. – 2005. – **39**, № 2. – С. 13 – 30.
3. *Власенко М. А., Меллит А. С., Самойленко Ю. С.* Об алгебрах, порожденных линейно связанными образующими с заданным спектром // Там же. – № 3. – С. 14 – 27.
4. *Kruglyak S. A., Popovich S. V., Samoilenko Yu. S.* $*$-Representation of algebras associated with Dynkin graphs and Horn's problem // Учен. зап. Таврич. нац. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика и кибернетика. – 2003. – **16(55)**, № 2. – С. 132 – 139.
5. *Кириченко А. А.* Про лінійні комбінації ортопроекторів // Там же. – 2002. – № 2. – С. 31 – 39.
6. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анализ и его прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 35.
7. *Shulman V. S.* On representations of limit relations // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2001. – № 4. – P. 85 – 86.
8. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented $*$-algebras. 1. Representations by bounded operators // Revs Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**, pt 1. – 261 p.

Одержано 30.05.2005