УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетров. нац. ун-т)

О ТОЧНЫХ НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА БЕРНШТЕЙНА ДЛЯ СПЛАЙНОВ

New sharp inequalities of Bernstein and Kolmogorov type are established. The principal result of the present paper is the following sharp inequality for periodic splines s of order r and defect 1 with knots at the points $i\pi/n$, $i \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$:

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \le n^{k+1/p-1/q} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{\| \varphi_r \|_p} \| s \|_p,$$

where $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p = 1$ or $p = 2$, $q > p$, and φ_r is the perfect Euler spline of order r.

Отримано нові точні нерівності типу Бернштейна і Колмогорова. Основним результатом роботи є точна нерівність для періодичних сплайнів s порядку r дефекту 1 з вузлами в точках $i\pi/n$, $i \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$:

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \le n^{k+1/p-1/q} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{\| \varphi_r \|_p} \| s \|_p,$$

де $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p = 1$ або $p = 2$, $q > p$, φ_r — ідеальний сплайн Ейлера порядку r.

1. Введение. Будем рассматривать пространства $L_p[a, b]$ измеримых функций $x : [a, b] \to \mathbf{R}$ таких, что $\| x \|_{L_p[a,b]} < \infty$, где

$$\| x \|_{L_p[a,b]} := \begin{cases} \left(\int\limits_a^b | x(t) |^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai} \sup\limits_{t \in [a,b]} | x(t) |, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

В случае 2π-периодических функций вместо $L_p[0, 2\pi]$ и $\| x \|_{L_p[0,2\pi]}$ будем писать L_p и $\| x \|_p$.

Для $r \in \mathbf{N}$ через L_∞^r обозначим множество 2π-периодических функций $x : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до порядка $r - 1$ включительно, причем $x^{(r)} \in L_\infty$. Положим $W_\infty^r := \left\{ x \in L_\infty^r : \left\| x^{(r)} \right\|_\infty \le 1 \right\}$.

Символом $S_{n,r}$, $n, r \in \mathbf{N}$, обозначим множество 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $i\pi/n$, $i \in \mathbf{Z}$.

Данная работа посвящена решению задачи о точной константе в неравенствах типа Бернштейна для сплайнов $s \in S_{n,r}$:

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \le M n^{k+(1/p-1/q)_+} \| s \|_p, \tag{1}$$

где $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r$; $q > 0$, $p > 0$, $u_+ = \max\{u, 0\}$.

Для $r \in \mathbf{N}$ через $\varphi_r(t)$ обозначим r-й 2π-периодический интеграл с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$.

Ниже приведены некоторые точные неравенства типа (1), необходимые в дальнейшем. В случае $q \le p$ известны следующие точные неравенства такого типа:

$$\left\| s^{(k)} \right\|_p \le n^k \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_p}{\| \varphi_r \|_p} \| s \|_p, \quad p \in \{1, 2, \infty\}, \tag{2}$$

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \le n^k \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{\| \varphi_r \|_p} \| s \|_p, \quad q \ge 1, \quad p = \infty, \text{ или } q = 1, \quad p > 1. \tag{3}$$

Неравенство (2) в случае $p = \infty$ установлено В. М. Тихомировым [1], в случае $p = 1$ — Ю. М. Субботиным [2], а в случае $p = 2$ — В. Ф. Бабенко и С. А. Пичуговым (см., например, теорему 6.3.6 из [3]). Неравенства (3) доказаны А. А. Лигуном [4, 5].

В случае $q > p$ отметим точное неравенство

$$\left\| s^{(k)} \right\|_\infty \le n^{k+1/p} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_\infty}{\| \varphi_r \|_p} \| s \|_p, \quad k = 1, \ldots, r, \quad p \ge 1, \tag{4}$$

полученное В. Ф. Бабенко, В. А. Кофановым и С. А. Пичуговым [6, 7].

Заметим, что неравенства (2) и (3) являются точными на классе $S_{n,r}$ (они обращаются в равенство для сплайнов $s(t) = a\varphi_{n,r}(t)$), а неравенство (4) точное на классе $S = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} S_{n,r}$ (оно обращается в равенство лишь для сплайнов $s(t) = a\varphi_r(t)$).

Основным результатом настоящей работы является точное неравенство типа Бернштейна

$$\left\| s^{(k)} \right\|_q \le n^{k+1/p-1/q} \frac{\left\| \varphi_{r-k} \right\|_q}{\| \varphi_r \|_p} \| s \|_p \tag{5}$$

для сплайнов $s \in S_{n,r}$ и произвольного $q > p$, где $p = 1$ или $p = 2$ (теорема 4).

Кроме того, в данной работе получены точные неравенства типа Колмогорова и Бернштейна в пространствах с локальными „нормами” (теоремы 1 и 2), а также доказана теорема сравнения перестановок производных сплайнов $s \in S_{n,r}$ (теорема 3). Именно эти три теоремы составляют основу доказательства неравенства (5).

2. Точные неравенства типа Колмогорова и Бернштейна с локальными „нормами”. Для l-периодической функции $x \in L_p[0, l]$ положим

$$L(x)_p := \sup \left\{ \| x \|_{L_p[a,b]} : |x(t)| > 0 \quad \forall t \in (a, b), \quad a, b \in \mathbf{R} \right\}. \tag{6}$$

Характеристики такого типа изучались в работе [8]. Функционал $L(x)_p$ не является нормой (он не имеет свойства полуаддитивности). Тем не менее, в работе [8] показано, что в пространствах с локальными „нормами” $L(x)_p$ остаются справедливыми многие важные утверждения теории аппроксимации.

Для $p > 0$ символом $E_0(x)_{L_p[a,b]}$ обозначим наилучшее приближение функции $x \in L_p[a, b]$ константами в пространстве $L_p[a, b]$, т. е.

$$E_0(x)_{L_p[a,b]} := \inf \left\{ \| x - c \|_{L_p[a,b]} : c \in \mathbf{R} \right\}.$$

В случае 2π-периодической функции x будем писать $E_0(x)_p$ вместо $E_0(x)_{L_p[0,2\pi]}$. Через $c_p(x)$ обозначим константу наилучшего L_p-приближения функции $x \in L_p$.

Для $x \in L_1[a, b]$ обозначим через $r(x, t)$ перестановку функции $|x|$ (см., например, [9], § 6.1). Положим также $r(x, t) = 0$ для $t \ge b - a$. Каждой l-периодической функции x поставим в соответствие перестановку $r(x, t)$ сужения $|x|$ на $[0, l]$.

Теорема 1. *Пусть* $k, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p > 0$, $q \geq 1$. *Для любой функции* $x \in L_\infty^r$ *выполнено точное неравенство*

$$L(x^{(k)})_q \leq \frac{L(\varphi_{r-k})_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} \|x\|_p^\alpha \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \tag{7}$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$. *Неравенство* (7) *обращается в равенство для функций* $x(t) = a[\varphi_r(t+b) - c_p(\varphi_r)]$, $a, b \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольную функцию $x \in L_\infty^r$. Вследствие однородности неравенства (7) можно предположить, что

$$\|x^{(r)}\|_\infty = 1. \tag{8}$$

Тогда $x \in W_\infty^r$. Выберем $\lambda > 0$ из условия

$$\|x\|_p = E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p[0,2\pi/\lambda]}. \tag{9}$$

Нетрудно видеть, что $E_0(\varphi_{\lambda,r})_{L_p[0,2\pi/\lambda]} = \lambda^{-r-1/p} E_0(\varphi)_p$. Поэтому из (9) в силу неравенства [10]

$$E_0(x)_\infty \leq \frac{\|\varphi_r\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p^{r/(r+1/p)}} \|x\|_p^{r/(r+1/p)} \|x^{(r)}\|_\infty^{1-(r/(r+1/p))}$$

и условия (8) следует оценка

$$E_0(x)_\infty \leq \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty. \tag{10}$$

Применяя неравенство Колмогорова [11]

$$\|x^{(i)}\|_\infty \leq \frac{\|\varphi_{r-i}\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty^{1-i/r}} E_0(x)_\infty^{1-i/r} \|x^{(r)}\|_\infty^{i/r}, \qquad i = 1, \ldots, r-1,$$

из (10) и (8) получаем соотношение

$$\|x^{(i)}\|_\infty \leq \|\varphi_{\lambda,r-i}\|_\infty, \qquad i = 1, \ldots, r-1. \tag{11}$$

Из (11) и (10), в свою очередь, следует неравенство

$$L(x^{(k)})_1 \leq L(\varphi_{\lambda,r-k})_1. \tag{12}$$

Действительно, пусть $[a, b]$ — произвольный промежуток, такой, что $|x^{(k)}(t)| > 0$ для $t \in (a, b)$, и c — нуль функции $\varphi_{\lambda,r-k}$. Тогда вследствие (11) и (10)

$$\left| \int_a^b x^{(k)}(t)\,dt \right| = |x^{(k-1)}(b) - x^{(k-1)}(a)| \leq 2E_0(x^{(k-1)})_\infty \leq 2\|\varphi_{\lambda,r-(k-1)}\|_\infty =$$

$$= |\varphi_{\lambda,r-(k-1)}(c+\pi/\lambda) - \varphi_{\lambda,r-(k-1)}(c)| = \left| \int_c^{c+\pi/\lambda} \varphi_{\lambda,r-k}(t)\,dt \right| = L(\varphi_{\lambda,r-k})_1,$$

где $L(x)_p$ определено согласно (6). Поэтому отсюда следует (12).

Положим $\sigma := [a, b]$ и обозначим через x_σ сужение функции x на σ. Поскольку производная $x^{(k)}$ непрерывна, точная верхняя грань в определении (6) величины $L(x^{(k)})_p$ достигается на таких a и b, что

$$x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0. \tag{13}$$

Будем считать условие (13) выполненным и докажем неравенство

$$\int_0^\xi r(x_\sigma^{(k)}, t)\,dt \le \int_0^\xi r\big((\varphi_{\lambda, r-k})_+, t\big)\,dt, \qquad \xi > 0. \tag{14}$$

Для доказательства (14) заметим, что вследствие (11)

$$r(x_\sigma^{(k)}, 0) \le r\big((\varphi_{\lambda, r-k})_+, 0\big).$$

Покажем, что разность

$$\Delta(t) := r(x_\sigma^{(k)}, t) - r\big((\varphi_{\lambda, r-k})_+, t\big)$$

меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза.

Чтобы доказать этот факт, заметим, что в силу (11) и (13) для любого $y \in \in \left(0, \left\| x_\sigma^{(k)} \right\|_\infty\right)$ найдутся точки $t_i \in (a, b)$, $i = 1, \ldots, m$, $m \ge 2$, и две точки $y_j \in \in (c, c + 2\pi/\lambda)$ такие, что

$$y = \left| x_\sigma^{(k)}(t_i) \right| = (\varphi_{\lambda, r-k})_+(y_j),$$

где $u_+ := \max\{u, 0\}$. При этом согласно теореме сравнения Колмогорова [11], примененной к функции $x_\sigma^{(k)}$ (ее условия выполнены вследствие (8) и (11)), выполняется неравенство

$$\left| x_\sigma^{(k+1)}(t_i) \right| \le \left| (\varphi'_{\lambda, r-k})_+(y_j) \right|.$$

Поэтому в силу теоремы о производной перестановки (см., например, [3], предложение 1.3.2), если точки θ_1 и θ_2 выбраны так, что

$$y = r(x_\sigma^{(k)}, \theta_1) = r\big((\varphi_{\lambda, r-k})_+, \theta_2\big),$$

то

$$\left| r'(x_\sigma^{(k)}, \theta_1) \right| = \left[\sum_{i=1}^m \left| x_\sigma^{(k+1)}(t_i) \right|^{-1} \right]^{-1} \le$$

$$\le \left[\sum_{j=1}^2 \left| (\varphi'_{\lambda, r-k})_+(y_j) \right|^{-1} \right]^{-1} = \left| r'\big((\varphi_{\lambda, r-k})_+, \theta_2\big) \right|.$$

Отсюда следует, что разность Δ меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза.

Рассмотрим интеграл

$$I(\xi) := \int_0^\xi \left[r(x_\sigma^{(k)}, t) - r\big((\varphi_{\lambda, r-k})_+, t\big) \right] dt.$$

Ясно, что $I(0) = 0$. Далее, вследствие (12)

$$\int_0^{2\pi} r(x_\sigma^{(k)}, t)\,dt = \int_0^{2\pi} \left| x_\sigma^{(k)}(t) \right| dt \le L(x^{(k)})_1 \le$$

$$\leq \; L(\varphi_{\lambda, r-k})_1 \; = \; \int\limits_0^{2\pi/\lambda} r\big((\varphi_{\lambda, r-k})_+, t\big)\, dt.$$

Поэтому если мы положим $M := \max\{2\pi, 2\pi/\lambda\}$, то $I(M) \leq 0$. Кроме того, как мы видели, $I'(t) = \Delta(t)$ меняет знак (с $-$ на $+$) не более одного раза. Таким образом, $I(\xi) \leq 0$ для всех $\xi \geq 0$, т. е. неравенство (14) доказано.

Из неравенства (14) в силу теоремы Харди – Литлвуда (см., например, [3], предложение 1.3.10) получаем

$$\| x^{(k)} \|_{L_q[a,b]} \leq \| (\varphi_{\lambda, r-k})_+ \|_{L_q[0, 2\pi/\lambda]}$$

для любого $q \geq 1$ и для любого промежутка $[a, b]$, для которого $|x^{(k)}(t)| > 0$, $t \in (a, b)$. Отсюда согласно определению (6) следует

$$L(x^{(k)})_q \leq L(\varphi_{\lambda, r-k})_q, \qquad q \geq 1. \tag{15}$$

Легко видеть, что

$$L(\varphi_{\lambda, r})_q = \lambda^{-r-1/q} L(\varphi_r)_q, \qquad E_0(\varphi_{\lambda, r})_{L_p[0, 2\pi/\lambda]} = \lambda^{-r-1/p} E_0(\varphi_r)_p. \tag{16}$$

Поэтому из (9) и (15) с учетом того, что $\alpha = (r - k + 1/q)/(r + 1/p)$, выводим

$$\frac{L(x^{(k)})_q}{\| x \|_p^\alpha} \leq \frac{L(\varphi_{\lambda, r-k})_q}{E_0(\varphi_{\lambda, r})^\alpha_{L_p[0, 2\pi/\lambda]}} = \frac{\lambda^{-(r-k)-1/q} L(\varphi_{r-k})_q}{[\lambda^{-r-1/p} E_0(\varphi_r)_p]^\alpha} = \frac{L(\varphi_{r-k})_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha}.$$

Это вследствие (8) завершает доказательство неравенства (7).

Точность (7) очевидна.

Теорема доказана.

Поскольку $L(x)_\infty = \| x \|_\infty$ для $x \in L_\infty$, из теоремы 1 вытекает такое следствие.

***Следствие* 1.** *В условиях теоремы* 1 *для функций* $x \in L^r_\infty$ *выполняется точное неравенство*

$$\| x^{(k)} \|_\infty \leq \frac{\| \varphi_{r-k} \|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} \| x \|_p^\alpha \, \| x^{(r)} \|_\infty^{1-\alpha}, \tag{17}$$

где $\alpha = (r - k)/(r + 1/p)$.

Неравенство (17) было доказано в [6].

***Замечание* 1.** Используя критерий элемента наилучшего L_p-приближения (при $p \geq 1$), нетрудно проверить справедливость равенства

$$E_0(\varphi_r)_p = \| \varphi_r \|_p. \tag{18}$$

С другой стороны, существует $p_0 < 1/2$ такое, что равенство (18) уже не выполняется для нечетных r в случае $p \in (0, p_0)$ [12]. В то же время это равенство сохраняет силу для нечетных r в случае любого $p \in (0, 1)$ и для любого r в случае $p \geq 1/2$ [12].

***Замечание* 2.** В работах [13 – 15] получены точные неравенства типа Колмогорова, которые оценивают L_q-норму производной $\| x^{(k)} \|_q$ функции $x \in L^r_\infty$ через локальную „норму”

$$|||x|||_p := \sup \{ E_0(x)_{L_p[a,b]} : x'(t) \neq 0 \quad \forall t \in (a, b), \quad a, b \in \mathbf{R} \} \tag{19}$$

и L_∞-норму производной $\| x^{(r)} \|_\infty$.

Теорема 2. *Пусть* $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p > 0$, $q \geq 1$. *Тогда для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *выполняется неравенство*

$$L(s^{(k)})_q \leq n^{k+1/p-1/q} \frac{L(\varphi_{r-k})_q}{E_0(\varphi_r)_p} \|s\|_p. \tag{20}$$

Неравенство (20) *точное на классе* $S = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} S_{n,r}$ *и обращается в равенство для сплайнов* $s(t) = a[\varphi_r(t) - c_p(\varphi_r)]$, $a \in \mathbf{R}$.

Доказательство. Зафиксируем произвольный сплайн $s \in S_{n,r}$. Ясно, что $s \in L_\infty^r$. Применим неравенство (7) к сплайну s:

$$L(s^{(k)})_q \leq \frac{L(\varphi_{r-k})_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} \|s\|_p^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = \dfrac{r-k+1/q}{r+1/p}$. Оценим норму $\|s^{(r)}\|_\infty$. Воспользуемся неравенством (4), которое сохраняет силу и для $p \in (0, 1)$, если в нем $\|\varphi_r\|_p$ заменить на $E_0(\varphi_r)_p$ [7], т. е. имеет место неравенство

$$\|s^{(k)}\|_\infty \leq n^{k+1/p} \frac{\|\varphi_{r-k}\|_\infty}{E_0(\varphi_r)_p} \|s\|_p, \quad k = 1, \ldots, r, \quad p > 0. \tag{21}$$

Оценивая норму $\|s^{(r)}\|_\infty$ с помощью неравенства (21), получаем

$$L(s^{(k)})_q \leq \frac{L(\varphi_{r-k})_q}{E_0(\varphi_r)_p^\alpha} \|s\|_p^\alpha \left[\frac{n^{r+1/p}}{E_0(\varphi_r)_p} \|s\|_p\right]^{1-\alpha}.$$

Отсюда следует (20), если учесть, что

$$(r + 1/p)(1-\alpha) = k + \frac{1}{p} - \frac{1}{q}.$$

Точность неравенства (20) очевидна.

Теорема доказана.

***Следствие* 2**. *Пусть* $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p > 0$, $q \geq 1$. *Если сплайн* $s \in S_{n,r}$ *удовлетворяет условию*

$$\|s\|_p = E_0(\varphi_{n,r})_{L_p[0,2\pi/n]},$$

то

$$L(s^{(k)})_q \leq L(\varphi_{n,r-k})_q,$$

в частности

$$\|s^{(k)}\|_\infty \leq \|\varphi_{n,r-k}\|_\infty.$$

Доказательство. Вследствие (16) неравенство (20) можно переписать в виде

$$L(s^{(k)})_q \leq \frac{L(\varphi_{n,r-k})_q}{E_0(\varphi_{n,r})_{L_p[0,2\pi/n]}} \|s\|_p.$$

Теперь утверждение следствия очевидно.

***Замечание* 3.** Неравенства (4) и (21) при $k < r$ непосредственно следуют из

(20). Из неравенства (21) при $k = r$ в условиях следствия 2 вытекает также оценка

$$\| s^{(r)} \|_\infty \le \| \varphi_{n,0} \|_\infty = 1.$$

***Замечание* 4.** В работах [13 – 15] получены точные неравенства типа Бернштейна, которые оценивают L_q-норму $\| s^{(k)} \|_q$ производной сплайна $s \in S_{n,r}$ через локальную „норму” $|||s|||_p$ (см. (19)).

3. Теорема сравнения перестановок и точное неравенство типа Бернштейна.

Теорема 3. *Пусть* $k, n, r \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p = 1$ *или* $p = 2$. *Если сплайн* $s \in S_{n,r}$ *удовлетворяет условию*

$$\| s \|_p = \| \varphi_{n,r} \|_{L_p[0, 2\pi/n]}, \tag{22}$$

то для любого $\xi > 0$

$$\int_0^\xi r^p(s^{(k)}, t)\,dt \le \int_0^\xi r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt. \tag{23}$$

Доказательство. Будем следовать идее Н. П. Корнейчука и А. А. Лигуна, использованной ими при доказательстве теоремы сравнения производных перестановок функций $x \in W^r_\infty$ (см., например, [16], теорема 5.5.1).

Поскольку перестановка $r(s^{(k)}, t)$ инвариантна относительно сдвига аргумента, а производная $s^{(k)}$ имеет нули, можно считать, что $s^{(k)}(0) = 0$.

Зафиксируем произвольный сплайн $s \in S_{n,r}$, удовлетворяющий условию (22), и пусть

$$\delta(t) := r(\varphi_{n,r-k}, t) - r(s^{(k)}, t).$$

Для каждого $\xi \in (0, 2\pi/n)$, для которого $\delta(\xi) = 0$, положим

$$z := r(s^{(k)}, \xi) = r(\varphi_{n,r-k}, \xi).$$

Тогда

$$\int_0^\xi r^p(s^{(k)}, t)\,dt = \int_{E_z} \left| s^{(k)}(t) \right|^p dt, \tag{24}$$

где

$$E_z := \{ t : |s^{(k)}(t)| > z, \ t \in (0, 2\pi) \}. \tag{25}$$

Через (t_i, τ_i), $i = 1, \ldots, m$, обозначим составляющие интервалы открытого множества E_z. Таким образом, $E_z = \bigcup_{i=1}^m (t_i, \tau_i)$. Для продолжения доказательства теоремы нам понадобится оценка сверху числа m этих интервалов, содержащаяся в следующей лемме.

Лемма 1. *Пусть точка* $\xi \in (0, 2\pi/n)$ *такова, что* $\delta(\xi) = 0$, *причем для некоторого* $\varepsilon > 0$

$$\delta(t) < 0, \qquad t \in (\xi - \varepsilon, \xi).$$

Тогда множество E_z *содержит не более двух составляющих интервалов.*

Доказательство леммы. Предположим противное, т. е. допустим, что в условиях леммы существует $m > 2$ интервалов $(t_i, \tau_i) \subset E_z \subset (0, 2\pi)$ таких, что

$$z = r(\varphi_{n,r-k}, \xi) = r(s^{(k)}, \xi) = \left| s^{(k)}(t_i) \right| = \left| s^{(k)}(\tau_i) \right|,$$

$$\left| s^{(k)}(t) \right| > z, \quad t \in (t_i, \tau_i), \quad i = 1, \ldots, m.$$

Выберем $h > 0$ столь малым, чтобы

$$E_{z+h} = \bigcup_{i=1}^{m} (t_i', \tau_i'), \quad (t_i', \tau_i') \subset (t_i, \tau_i),$$

и если

$$r(s^{(k)}, \xi - \gamma) = z + h,$$

то

$$\delta(t) < 0, \quad t \in (\xi - \gamma, \xi). \tag{26}$$

Согласно определению (25)

$$\left| s^{(k)}(t_i') \right| = \left| s^{(k)}(\tau_i') \right| = z + h, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

и, вследствие (26), если

$$r(\varphi_{n,r-k}, \xi - \gamma_0) = z + h,$$

то $\xi - \gamma_0 < \xi - \gamma$, т. е.

$$\gamma < \gamma_0. \tag{27}$$

Кроме того, в силу свойства равноизмеримости перестановки

$$\operatorname{mes}\{t \in (0, 2\pi) : \left| r(s^{(k)}, t) \right| > y\} = \operatorname{mes}\{t \in (0, 2\pi) : \left| s^{(k)}(t) \right| > y\}$$

для любого $y > 0$. Следовательно,

$$\gamma = \sum_{i=1}^{m} (|t_i' - t_i| + |\tau_i' - \tau_i|).$$

Аналогично, если точки $\alpha_1, \alpha_2 \in \left[0, \dfrac{\pi}{2n}\right]$ определены условиями

$$\varphi_{n,r-k}(\alpha_1) = z, \quad \varphi_{n,r-k}(\alpha_2) = z + h,$$

то

$$4\left| \alpha_2 - \alpha_1 \right| = \gamma_0.$$

Из условия (22) в силу следствия 2, замечания 3 и равенства

$$E_0(\varphi_{n,r})_{L_p[0, 2\pi/n]} = \left\| \varphi_{n,r} \right\|_{L_p[0, 2\pi/n]}, \quad p \geq 1,$$

следует неравенство

$$\left\| s^{(k)} \right\|_\infty \leq \left\| \varphi_{n,r-k} \right\|_\infty, \quad k = 1, \ldots, r. \tag{28}$$

Таким образом, применяя теорему сравнения Колмогорова (к сплайну $s^{(k)}$), получаем

$$\left| \alpha_2 - \alpha_1 \right| \leq |t_k' - t_k|, \quad \left| \alpha_2 - \alpha_1 \right| \leq |\tau_k' - \tau_k|.$$

Это позволяет вследствие предположения $m > 2$ заключить, что

$$\gamma = \sum_{k=1}^{m}(|t_k' - t_k| + |\tau_k' - \tau_k|) \geq 2m|\alpha_2 - \alpha_1| = 2m\frac{\gamma_0}{4} > 4\frac{\gamma_0}{4} = \gamma_0.$$

Последнее невозможно вследствие (27).

Лемма доказана.

Продолжение доказательства теоремы **3.** Прежде всего заметим, что из условия (22) и неравенства (2), которое с учетом равенства $\|\varphi_{n,r}\|_{L_p[0,2\pi/n]} = n^{-r-1/p}\|\varphi_r\|_p$ можно переписать в виде

$$\|s^{(k)}\|_p \leq \frac{\|\varphi_{n,r-k}\|_{L_p[0,2\pi/n]}}{\|\varphi_{n,r}\|_{L_p[0,2\pi/n]}}\|s\|_p,$$

следует оценка

$$\|s^{(k)}\|_p \leq \|\varphi_{n,r-k}\|_{L_p[0,2\pi/n]}. \tag{29}$$

Предположим, что утверждение теоремы неверно. Это означает, что

$$\min_{\eta}\int_0^{\eta}[r^p(\varphi_{n,r-k},t) - r^p(s^{(k)},t)]dt = \int_0^{\xi}[r^p(\varphi_{n,r-k},t) - r^p(s^{(k)},t)] < 0. \tag{30}$$

Поскольку согласно (29) для любого $\eta \geq 2\pi/n$

$$\int_0^{\eta} r^p(s^{(k)},t)dt \leq \|s^{(k)}\|_p^p \leq \|\varphi_{n,r-k}\|_{L_p[0,2\pi/n]}^p =$$

$$= \int_0^{2\pi/n} r^p(\varphi_{n,r-k},t)dt = \int_0^{\eta} r^p(\varphi_{n,r-k},t)dt,$$

для точки ξ, реализующей минимум в (30), справедливо включение $\xi \in (0, 2\pi/n)$. При этом точка ξ будет такой, что $\delta(\xi) = 0$ и для некоторого $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $\delta(t) < 0$, $t \in (\xi - \varepsilon, \xi)$, т. е. точка ξ будет удовлетворять условиям леммы 1. Согласно этой лемме, если (a_j, b_j), $j = 1, \ldots, l$, — составляющие интервалы множества $E_0 = \{t : |s^{(k)}(t)| > 0,\ t \in (0, 2\pi)\}$, такие, что $(a_j, b_j) \supset (t_i, \tau_i)$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, m\}$, то

$$l \leq m \leq 2. \tag{31}$$

Применяя к сплайну $s^{(k)}$ теорему сравнения Колмогорова (ее условия выполнены вследствие (28)), получаем

$$\int_{(a_j,b_j)\setminus E_z} |s^{(k)}(t)|^p dt \geq \frac{1}{2}\int_{L_z}|\varphi_{n,r-k}(t)|^p dt,$$

где $L_z := \{t : |\varphi_{n,r-k}(t)| < z,\ t \in (0, 2\pi/n)\}$. Ясно, что

$$\int_{L_z}|\varphi_{n,r-k}(t)|^p dt = \int_{\xi}^{2\pi/n} r^p(\varphi_{n,r-k},t)dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{(a_j,b_j)\setminus E_z} \left|s^{(k)}(t)\right|^p dt \;\geq\; \frac{1}{2}\int\limits_{\xi}^{2\pi/n} r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt. \tag{32}$$

Кроме того, согласно следствию 2 теоремы 2 (для $q = p$)

$$\int\limits_{a_j}^{b_j}\left|s^{(k)}(t)\right|^p dt \;\leq\; L(s^{(k)})_p^p \;\leq\; L(\varphi_{n,r-k})_p^p \;=$$

$$=\; \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi/n}\left|\varphi_{n,r-k}(t)\right|^p dt \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_0^{2\pi/n} r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt. \tag{33}$$

Применяя (24) и (31) – (33), имеем

$$\int\limits_0^{\xi} r^p(s^{(k)}, t)\,dt \;=\; \int\limits_{E_z}\left|s^{(k)}(t)\right|^p dt \;=\; \sum_{i=1}^{m}\int\limits_{t_i}^{\tau_i}\left|s^{(k)}(t)\right|^p dt \;=$$

$$=\; \sum_{j=1}^{l}\int\limits_{a_j}^{b_j}\left|s^{(k)}(t)\right|^p dt \;-\; \sum_{j=1}^{l}\int\limits_{(a_j,b_j)\setminus E_z}\left|s^{(k)}(t)\right|^p dt \;\leq$$

$$\leq\; \frac{l}{2}\int\limits_0^{2\pi/n} r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt \;-\; \frac{l}{2}\int\limits_{\xi}^{2\pi} r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt \;=$$

$$=\; \frac{l}{2}\int\limits_0^{\xi} r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt \;\leq\; \int\limits_0^{\xi} r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt,$$

что противоречит (30).

Теорема доказана.

Теорема 4. *Пусть* $k, r, n \in \mathbf{N}$, $k < r$, $p = 1$ *или* $p = 2$, $q > p$. *Для любого сплайна* $s \in S_{n,r}$ *выполняется неравенство*

$$\|s^{(k)}\|_q \;\leq\; n^{k+1/p-1/q}\,\frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p}\,\|s\|_p. \tag{34}$$

Неравенство (34) *неулучшаемо в том смысле, что*

$$\sup_{n\in\mathbf{N}}\;\sup_{\substack{s\in S_{n,r}\\ s\neq 0}} \frac{\|s^{(k)}\|_q}{n^{k+1/p-1/q}\,\|s\|_p} \;=\; \frac{\|\varphi_{r-k}\|_q}{\|\varphi_r\|_p}.$$

Доказательство. Зафиксируем любой сплайн $s \in S_{n,r}$, $s \neq 0$. Вследствие однородности неравенства (34) можно считать, что

$$\|s\|_p \;=\; \|\varphi_{n,r}\|_{L_p[0,2\pi/n]}. \tag{35}$$

Тогда согласно теореме 3

$$\int\limits_0^{\xi} r\left(\left|s^{(k)}\right|^p, t\right)dt \;=\; \int\limits_0^{\xi} r^p(s^{(k)}, t)\,dt \;\leq$$

$$\leq\; \int\limits_0^{\xi} r^p(\varphi_{n,r-k}, t)\,dt \;=\; \int\limits_0^{\xi} r\left(\left|\varphi_{n,r-k}\right|^p, t\right)dt, \qquad \xi > 0.$$

Отсюда согласно теореме Харди – Литлвуда (см., например, [3], предложение 1.3.10) следует, что для любого $m > 1$

$$\| |s^{(k)}|^p \|_m \leq \| |\varphi_{n,r-k}|^p \|_{L_m[0,2\pi/n]}.$$

Поэтому для любого $q > p$

$$\| s^{(k)} \|_q = \left\| |s^{(k)}|^p \right\|_{q/p}^{1/p} \leq \left\| |\varphi_{n,r-k}|^p \right\|_{L_{q/p}[0,2\pi/n]}^{1/p} = \| \varphi_{n,r-k} \|_{L_q[0,2\pi/n]}. \qquad (36)$$

Поскольку $\| \varphi_{n,r} \|_{L_p[0,2\pi/n]} = n^{-r-1/p} \| \varphi_r \|_p$, из (35) и (36) выводим

$$\frac{\| s^{(k)} \|_q}{\| s \|_p} \leq \frac{\| \varphi_{n,r-k} \|_{L_q[0,2\pi/n]}}{\| \varphi_{n,r} \|_{L_p[0,2\pi/n]}} = n^{k+1/p-1/q} \frac{\| \varphi_{r-k} \|_q}{\| \varphi_r \|_p}.$$

Тем самым (34) доказано.

Ясно, что (34) обращается в равенство для сплайнов $s(t) = a\varphi_r(t)$.

Теорема доказана.

1. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
2. *Субботин Ю. Н.* О кусочно-полиномиальной интерполяции // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 1. – С. 24 – 29.
3. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с.
4. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.
5. *Лигун А. А.* О неравенствах между нормами производных периодических функций // Там же. – 1983. – **33**, № 3. – С. 385 – 391.
6. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities for norms of intermediate derivatives of periodic functions and their applications // East J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 351 – 376.
7. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Неравенства для производных и их приложения. – Киев: Наук. думка, 2003. – 590 с.
8. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L_p-theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – P. 148 – 168.
9. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближений. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
10. *Babenko V. F., Kofanov V. A., Pichugov S. A.* Inequalities of Kolmogorov type and some their applications in approximation theory // Rend. Circolo mat. Palermo. Ser. II, Suppl. – 1998. – **52**. – P. 223 – 237.
11. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.
12. *Бабенко В. Ф., Кофанов В. А., Пичугов С. А.* Аппроксимация синусоподобных функций константами в пространствах L_p, $p < 1$ // Укр. мат. журн. – 2004. – **56**, № 6. – С. 745 – 762.
13. *Kofanov V. A.* Some exact inequalities of Kolmogorov type // Мат. физика, анализ, геометрия. – 2002. – **9**, № 3. – С. 412 – 419.
14. *Кофанов В. А.* О некоторых неравенствах типа Колмогорова, учитывающих число перемен знака // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 4. – С. 456 – 469.
15. *Кофанов В. А.* О точных неравенствах типа Колмогорова и Бернштейна // Теория наближень та гармонічний аналіз: Пр. Укр. мат. конгресу. – 2001. – С. 84 – 99.
16. *Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г.* Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наук. думка, 1982. – 250 с.

Получено 13.01.2005