УДК 517.53

О. М. Мулява (Київ. нац. ун-т харч. технологій)

ІНТЕГРАЛЬНИЙ АНАЛОГ ОДНОГО УЗАГАЛЬНЕННЯ НЕРІВНОСТІ ГАРДІ ТА ЙОГО ЗАСТОСУВАННЯ

Under some conditions on continuous functions μ, λ, a, f the inequality

$$\int_0^y \mu(x)\lambda(x) f\left(\frac{\int_0^x \lambda(t)a(t)\,dt}{\int_0^x \lambda(t)\,dt}\right)dx \;\le\; K\int_0^y \mu(x)\lambda(x) f\big(a(x)\big)\,dx, \qquad y \le \infty,$$

is proved and its application to the study of the problem of belonging of Laplace integrals to the convergence class is shown.

За деяких умов на неперервні функції μ, λ, a і f доведено нерівність

$$\int_0^y \mu(x)\lambda(x) f\left(\frac{\int_0^x \lambda(t)a(t)\,dt}{\int_0^x \lambda(t)\,dt}\right)dx \;\le\; K\int_0^y \mu(x)\lambda(x) f\big(a(x)\big)\,dx, \qquad y \le \infty,$$

і вказано на її застосування до вивчення належності інтегралів Лапласа до класу збіжності.

Нагадаємо класичну нерівність Гарді [1, с. 289]: для кожного $p > 1$ і будь-якої послідовності (a_n) невід'ємних чисел

$$\sum_{n=1}^{\omega}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^p \;\le\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\omega} a_n^p, \quad \omega \le \infty.$$

Для дослідження класів збіжності рядів Діріхле в [2] цю нерівність узагальнено. Доведено, що якщо $-\infty \le A < a_n < B \le +\infty$, послідовність (λ_n) є додатною, послідовність (μ_n) — додатною і незростаючою, а функція f — додатною на (A, B) і такою, що $f^{1/p}$, $p > 1$, — опукла на (A, B) функція, то

$$\sum_{n=1}^{\omega} \mu_n\lambda_n f\left(\frac{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k a_k}{\sum_{k=1}^{n}\lambda_k}\right) \;\le\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum_{n=1}^{\omega}\mu_n\lambda_n f(a_n), \quad \omega \le \infty. \tag{1}$$

У даній статті доведено наступний інтегральний аналог нерівності (1) і вказано на його можливі застосування.

Теорема. *Нехай* $a(x)$, $\mu(x)$ *і* $\lambda(x)$ — *неперервні на* $(0, +\infty)$ *функції, причому* $-\infty \le A < a(x) < B \le +\infty$, $\lambda(x) > 0$ *і* $\mu(x) \searrow \mu \ge 0$ *при* $x \to +\infty$, *крім цього, додатна на* (A, B) *функція* f *така, що функція* $f^{1/p}$, $p > 1$, *є опуклою на* (A, B). *Тоді*

$$\int_0^y \mu(x)\lambda(x) f\left(\frac{\int_0^x \lambda(t)a(t)\,dt}{\int_0^x \lambda(t)\,dt}\right)dx \;\le\; \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^y \mu(x)\lambda(x) f\big(a(x)\big)\,dx, \quad y \le \infty. \tag{2}$$

Доведення. Позначимо $\Lambda(x) = \int_0^x \lambda(t)\,dt$ і $A(x) = \int_0^x \lambda(t)a(t)\,dt$. Тоді для довільного $\eta > 0$

$$\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)} = \frac{A(x)}{\Lambda(x)}\frac{\Lambda(x)}{\Lambda(x+\eta)} + \frac{A(x+\eta)-A(x)}{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}\frac{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}{\Lambda(x+\eta)}$$

і

$$\frac{\Lambda(x)}{\Lambda(x+\eta)} + \frac{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}{\Lambda(x+\eta)} = 1,$$

а оскільки функція $f^{1/p}$ є опуклою, то

$$f^{1/p}\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right) \leq f^{1/p}\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\frac{\Lambda(x)}{\Lambda(x+\eta)} + $$
$$+ f^{1/p}\left(\frac{A(x+\eta)-A(x)}{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}\right)\frac{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}{\Lambda(x+\eta)},$$

тобто

$$-f^{1/p}\left(\frac{A(x+\eta)-A(x)}{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}\right) \leq f^{1/p}\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\frac{\Lambda(x)}{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)} -$$
$$- f^{1/p}\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)\frac{\Lambda(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}.$$

Тому з $1/q + 1/p = 1$ маємо

$$Q(x) := f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)) -$$
$$- qf^{1/p}\left(\frac{A(x+\eta)-A(x)}{\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)}\right)f^{1/q}\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)) \leq$$
$$\leq f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)) + q\left\{f^{1/p}\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)f^{1/q}\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)\Lambda(x) -\right.$$
$$\left.- f^{1/p}\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)f^{1/q}\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)\Lambda(x+\eta)\right\} =$$
$$= f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)-q\Lambda(x+\eta)) +$$
$$+ qf^{1/p}\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)f^{1/q}\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x).$$

Оскільки $\frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q \geq ab$ для всіх $a \geq 0$ та $b \geq 0$ [2], то

$$Q(x) \leq f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)((1-q)\Lambda(x+\eta)-\Lambda(x)) +$$
$$+ q\left\{\frac{1}{p}f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)+\frac{1}{q}f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)\right\}\Lambda(x) =$$
$$= f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(1-q)\Lambda(x+\eta) + \frac{q}{p}f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x) =$$
$$= \frac{1}{p-1}\left\{f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x) - f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)\Lambda(x+\eta)\right\}.$$

Тому для $y > \eta$

$$(p-1)\int_0^y \mu(x)Q(x)dx \leq \int_0^y \mu(x)\left\{f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x) - f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)\Lambda(x+\eta)\right\}dx \leq$$
$$\leq \int_0^y \mu(x)f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x)dx - \int_0^y \mu(x+\eta)f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)\Lambda(x+\eta)dx =$$

$$= \int_0^y \mu(x) f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x)\,dx - \int_\eta^{y+\eta} \mu(x) f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x)\,dx =$$

$$= \int_0^\eta \mu(x) f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x)\,dx - \int_y^{y+\eta} \mu(x) f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x)\,dx.$$

За правилом Лопіталя

$$\lim_{\eta\to 0} \frac{\int_0^\eta \mu(x) f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x)\,dx}{\int_y^{y+\eta} \mu(x) f\left(\frac{A(x)}{\Lambda(x)}\right)\Lambda(x)\,dx} = \lim_{\eta\to 0} \frac{\mu(\eta) f\left(\frac{A(\eta)}{\Lambda(\eta)}\right)\Lambda(\eta)}{\mu(y+\eta) f\left(\frac{A(y+\eta)}{\Lambda(y+\eta)}\right)\Lambda(y+\eta)} =$$

$$= \frac{\mu(0) f(a(0))}{\mu(y) f(A(y)/\Lambda(y))\Lambda(y)} \lim_{\eta\to 0} \Lambda(\eta) = 0.$$

Тому $\eta = \eta(y)$ можна вибрати так, щоб $\int_0^y \mu(x) Q(x)\,dx < 0$, і, отже, на підставі означення Q і нерівності Гельдера маємо

$$\int_0^y \mu(x) f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x))\,dx \le$$

$$\le q \int_0^y \mu(x) f^{1/p}\left(\frac{A(x+\eta) - A(x)}{\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x)}\right) f^{1/q}\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x))\,dx \le$$

$$\le q \left(\int_0^y \mu(x) f\left(\frac{A(x+\eta) - A(x)}{\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x)}\right)(\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x))\,dx\right)^{1/p} \times$$

$$\times \left(\int_0^y \mu(x) f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x))\,dx\right)^{1/q},$$

звідки

$$\left(\int_0^y \mu(x) f\left(\frac{A(x+\eta)}{\Lambda(x+\eta)}\right)(\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x))\,dx\right)^{1/p} \le$$

$$\le q \left(\int_0^y \mu(x) f\left(\frac{A(x+\eta) - A(x)}{\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x)}\right)(\Lambda(x+\eta) - \Lambda(x))\,dx\right)^{1/p},$$

тобто

$$\int_0^y \mu(x) f\left(\frac{\int_0^{x+\eta} \lambda(t) a(t)\,dt}{\int_0^{x+\eta} \lambda(t)\,dt}\right) \int_x^{x+\eta} \lambda(t)\,dt\,dx \le$$

$$\le q^p \int_0^y \mu(x) f\left(\frac{\int_x^{x+\eta} \lambda(t) a(t)\,dt}{\int_x^{x+\eta} \lambda(t)\,dt}\right) \int_x^{x+\eta} \lambda(t)\,dt\,dx.$$

Використовуючи теорему про середнє і спрямовуючи η до 0, звідси отримуємо нерівність (2).

Теорему доведено.

Вибираючи $\mu(x) = \lambda(x) = 1$, з теореми одержуємо такий наслідок.

***Наслідок* 1.** *Нехай* $a(x)$ — *неперервна на* $(0, +\infty)$ *функція*, $-\infty \le A < a(x) < B \le +\infty$, *а додатна на* (A, B) *функція* f *така, що функція* $f^{1/p}$, $p > 1$, *є опуклою на* (A, B). *Тоді*

$$\int_0^y f\left(\frac{1}{x}\int_0^x a(t)\,dt\right)dx \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^y f(a(x))\,dx, \quad y \le \infty.$$

Умови наслідку 1 з $p = 2$ задовольняє функція $f(x) = e^{-\rho x}$, $\rho \in (0, +\infty)$. Тому має місце наступний наслідок.

***Наслідок* 2.** *Нехай* $\kappa(x)$ — *додатна, неперервна і зростаюча на* $(0, +\infty)$ *функція. Тоді*

$$\int_0^y \exp\{-\rho\kappa(x)\}\,dx \le \int_0^y \exp\left\{-\frac{\rho}{x}\int_0^x \kappa(t)\,dt\right\}dx \le$$

$$\le 4\int_0^y \exp\{-\rho\kappa(x)\}\,dx, \quad y \le \infty.$$

Припустимо, що функція φ є додатною, неперервно диференційовною на $(0, +\infty)$ і такою, що $\varphi(0) = 1$ і $\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{\varphi(x)} \to +\infty$ при $x \to +\infty$. Тоді

$$\varphi(x)e^{\sigma x} = \exp\left\{-x\left(\frac{1}{x}\ln\frac{1}{\varphi(x)} - \sigma\right)\right\} \le e^{-x}$$

для будь-якого $\sigma \in \mathbb{R}$ і всіх $x \ge x_0(\sigma)$ і, отже, інтеграл Лапласа

$$F(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(x)e^{\sigma x}\,dx$$

є збіжним для всіх $\sigma \in \mathbb{R}$. Використовуючи теорему або її наслідки, можна вказати умови на φ, за яких F належить до цього чи іншого узагальненого класу збіжності [2]. Тут ми зупинимось лише на класичному класі збіжності, який визначається умовою

$$\int_0^\infty e^{-\rho\sigma}\ln F(\sigma)\,d\sigma < +\infty, \quad \rho = \text{const} > 0. \tag{3}$$

Покладемо $\kappa(x) = -\varphi'(x)/\varphi(x)$ і припустимо, що $\kappa(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$. Нехай $\mu(\sigma) := \max\{\varphi(x)e^{\sigma x} : x \ge 0\}$. Тоді $\ln\mu(\sigma) := \max\{-\ln(1/\varphi(x)) + \sigma x : x \ge 0\}$, і оскільки $\dfrac{d\ln(1/\varphi(x))}{dx} = \kappa(x) \uparrow +\infty$, $x \to +\infty$, то $\ln\mu(\sigma) = \ln\varphi(\nu(\sigma)) + \sigma\nu(\sigma)$, де $\nu(\sigma)$ — єдина точка максимуму функції $-\ln(1/\varphi(x)) + \sigma x$, причому $\kappa(\nu(\sigma)) \equiv \sigma$. Легко побачити, що $\nu(\sigma)$ — невід'ємна, неперервна і зростаюча до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функція.

Для $\delta > 0$ маємо

$$F(\sigma) = \int_0^\infty \varphi(x)e^{(\sigma+\delta)x}e^{-\delta x}\,dx \le \mu(\sigma+\delta)\int_0^\infty e^{-\delta x}\,dx = \frac{\mu(\sigma+\delta)}{\delta},$$

а якщо $\varphi(x) \searrow 0$, $x \to +\infty$, то для $\sigma \ge 0$

$$F(\sigma) \geq \int_{\nu(\sigma)-1}^{\nu(\sigma)} \varphi(x) e^{\sigma x}\, dx \geq \varphi(\nu(\sigma)) e^{\sigma(\nu(\sigma)-1)} = \mu(\sigma) e^{-\sigma},$$

тобто $\ln\mu(\sigma) \leq \ln F(\sigma) + \sigma$. Звідси випливає, що умова (3) рівносильна умові

$$\int_0^\infty e^{-\rho\sigma} \ln\mu(\sigma)\, d\sigma < +\infty. \tag{4}$$

Далі, для будь-якого $h > 0$ маємо

$$\ln\mu(\sigma+h) = \ln\varphi(\nu(\sigma+h)) + \nu(\sigma+h)(\sigma+h) \leq \ln\mu(\sigma) + h\nu(\sigma+h)$$

і

$$\ln\mu(\sigma) = \ln\varphi(\nu(\sigma)) + \nu(\sigma)(\sigma+h) - h\nu(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma+h) - h\nu(\sigma),$$

тобто $\nu(\sigma) \leq (\ln\mu(\sigma+h) - \ln\mu(\sigma))/h \leq \nu(\sigma+h)$. Така ж нерівність виконується і у випадку, коли $h < 0$. Спрямовуючи h до 0, звідси отримуємо рівність $\dfrac{d\ln\mu(\sigma)}{d\sigma} = \nu(\sigma)$. Використовуючи це співвідношення, неважко показати, що умова (4) рівносильна умові

$$\int_0^\infty e^{-\rho\sigma} \nu(\sigma)\, d\sigma < +\infty. \tag{5}$$

Але

$$\int_0^y e^{-\rho\sigma}\nu(\sigma)\, d\sigma = -\frac{1}{\rho}\int_0^y \nu(\sigma)\, d(e^{-\rho\sigma}) = -\frac{1}{\rho}\int_{\nu(0)}^{\nu(y)} t\, d(e^{-\rho\kappa(t)}).$$

Тому, інтегруючи частинами, неважко показати, що умова (5) рівносильна умові

$$\int_0^\infty e^{-\rho\kappa(x)}\, dx < +\infty. \tag{6}$$

Оскільки $\varphi(0) = 1$, то $\ln\dfrac{1}{\varphi(x)} = \displaystyle\int_0^y \kappa(t)\, dt$, і за наслідком 2 умова (6) рівносильна умові

$$\int_0^\infty \exp\left\{-\frac{\rho}{x}\ln\frac{1}{\varphi(x)}\right\} dx < +\infty.$$

Отже, доведено наступний наслідок.

Наслідок 3. *Нехай функція* φ *є додатною, неперервно диференційовною на* $(0, +\infty)$ *і такою, що* $\varphi(0) = 1$, $\varphi(x) \searrow 0$, $\dfrac{1}{x}\ln\dfrac{1}{\varphi(x)} \to +\infty$ *і* $-\varphi'(x)/\varphi(x) \uparrow$ $\uparrow +\infty$ *при* $x \to +\infty$. *Тоді умова* (3) *рівносильна умові* $\int_0^\infty \varphi(x)^{\rho/x}\, dx < +\infty$.

1. *Харди Г. Г., Литлвуд Д. Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
2. *Мулява О. М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1485 – 1494.

Одержано 26.05.2005,
після доопрацювання — 14.02.2006