УДК 517.5

В. Г. Доронин (Днепропетр. ун-т), **А. А. Лигун** (Днепродзерж. техн. ун-т)

ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВАХ ТИПА ДЖЕКСОНА ДЛЯ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ

We prove that if $R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})$ is an error of simple quadrature formula and $\omega(\varphi, \delta)_1$ is an integral module of continuity, then, for arbitrary $\delta \geq \pi/n$ and any $n, r = 1, 2, \ldots$, the equality

$$\inf_{\{t_k\}, \{p_k\}} \sup_{f \in L_1^r \setminus R_1} \frac{|R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})|}{\omega\left(f^{(r)}, \delta\right)_1} = \frac{\pi \| D_r \|_\infty}{n^r}$$

holds, where D_r is the Bernoulli kernel.

Доведено, що якщо $R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})$ — похибка простої квадратурної формули та $\omega(\varphi, \delta)_1$ — інтегральний модуль неперервності, то для довільних $\delta \geq \pi/n$ при будь-яких $n, r = 1, 2, \ldots$ справджується рівність

$$\inf_{\{t_k\}, \{p_k\}} \sup_{f \in L_1^r \setminus R_1} \frac{|R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})|}{\omega\left(f^{(r)}, \delta\right)_1} = \frac{\pi \| D_r \|_\infty}{n^r},$$

де D_r — ядро Бернуллі.

Пусть L_p — пространство измеримых, суммируемых в p-й степени 2π-периодических функций $f(t)$ с обычной нормой

$$\|f\|_p = \left(\int_0^{2\pi} | f(t) |^p \, dt \right)^{1/p};$$

L_p^r — множество всех 2π-периодических функций f, у которых $(r-1)$-я производная $f^{(r-1)}(t)$ $(f^{(0)} = f)$ локально абсолютно непрерывна на всей оси и $f^{(r)} \in L_p$; $\omega(f, t)_p$ — интегральный модуль непрерывности функции $f \in L_p$:

$$\omega(f, t)_p = \sup_{|h| \leq t} \| f(\cdot + h/2) - f(\cdot - h/2) \|_p.$$

Как обычно, назовем квадратурной формулой с узлами $\{t_k\}$ и весами $\{p_k\}$ выражение вида

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) + R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\}), \tag{1}$$

в частности

$$\int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + R_n(f)$$

— квадратурная формула прямоугольников.

Неравенство вида

$$\left| R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\} \right| \leq \frac{\kappa}{n^r} \omega(f^{(r)}, \delta)_p \tag{2}$$

называют неравенством типа Джексона для погрешности квадратурной формулы (1), а наименьшую константу в неравенстве (2), т. е. константу

$$\kappa := \kappa_{r,p}(n, \delta) := \inf_{\{t_k\},\{p_k\}} \sup_{p \in L_p^r \setminus R_1} \frac{n^r \,|\, R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\}) \,|}{\omega(f^{(r)}, \delta)_p} \tag{3}$$

— точной.

Здесь исследуются точные константы $\kappa_{r,p}(n, \delta)$ при $p = 1$. Аналогичные вопросы в пространствах C и L_2 изучались в работах [1, 2].

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Для любых* n, $r = 1, 2, \ldots$ *и любых* $\delta \geq \pi/n$ *справедливо равенство*

$$\kappa_{r,1}(n, \delta) = \pi \| D_r \|_\infty, \tag{4}$$

где

$$D_r(t) := \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt - \pi r/2)}{k^r}. \tag{5}$$

Прежде чем приступить к доказательству этого результата, приведем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Имеет место равенство*

$$D_r(t) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \varphi_{r-1}(2^\mu t), \tag{6}$$

где

$$\varphi_r(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\big((2m-1)t - \pi(r+1)/2\big)}{(2m-1)^{(r+1)}}$$

— *r-й периодический интеграл, в среднем равный нулю на периоде, от функции* $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin(t)$.

Действительно,

$$D_r(t) = \frac{1}{\pi} \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos\big((2m-1)t - \pi r/2\big)}{(2m-1)^r} +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2mt - \pi r/2)}{(2m)^r} := \frac{1}{4}\varphi_{r-1}(t) + \frac{1}{2^r} D_r(2t),$$

т. е.

$$D_r(t) = \frac{1}{4}\varphi_{r-1}(t) + \frac{1}{2^r} D_r(2t) =$$

$$= \frac{1}{4}\varphi_{r-1}(t) + \frac{1}{2^r}\left(\frac{1}{4}\varphi_{r-1}(2t) + \frac{1}{2^r} D_r(2^2 t)\right) = \ldots = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \varphi_{r-1}(2^\mu t).$$

***Следствие* 1.** *При четном* r

$$D_r(0) = \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{K_{r-1}}{2^{\mu r}} = \frac{K_{r-1}}{4} \frac{2^r}{2^r - 1}, \tag{7}$$

где $K_r := \| \varphi_r \|_C$ — *константы Фавара.*

Теорема 2 [3]. *Пусть* $g_k(t) \in L_\infty$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, — *унимодальные, неотрицательные, равноизмеримые функции и*

$$g(t) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k g_k(t).$$

Тогда для любой функции $f \in L_1$ *выполняется неравенство*

$$\left| \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt \right| \le \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \omega(f, t)_1 \, dp(g_1, t), \tag{8}$$

где $p(x, t)$ — *убывающая перестановка функции* $|x(t)|$.

Теорема 3. *Для любой функции* $f \in L_1^r$ *при каждом* $r = 1, 2, \ldots$ *выполняется неравенство*

$$\left| R_n(f) \right| \le \frac{\pi K_{r-1}}{4n^r} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n 2^{\mu}} \right)_1. \tag{9}$$

Доказательство. Из интегрального представления

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) D_r(x - t)\, dt$$

получаем

$$R_n(f) = \frac{2\pi}{n^r} \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) D_r(nt)\, dt. \tag{10}$$

Отсюда, применяя сначала лемму 1, а затем теорему 2, имеем

$$\left| R_n(f) \right| = \frac{2\pi}{n^r} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t) \frac{1}{4} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \varphi_{r-1}(2^{\mu} nt)\, dt \right| \le$$

$$\le \frac{\pi}{2n^r} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \left| \int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\, \varphi_{r-1}(2^{\mu} nt)\, dt \right| \le$$

$$\le \frac{\pi}{4n^r} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \left| \int_0^{\infty} \omega\left(f^{(r)}, t\right)_1 \, dp_*(\varphi_{r-1}(n 2^{\mu} \cdot), t) \right|, \tag{11}$$

где $p_*(\varphi_{r-1}(m\cdot), t)$ — перестановка одной „шляпки" функции $\varphi_{r-1}(mt)$.

Учитывая, что при четных r

$$p_*(\varphi_{r-1}(m\cdot), t) = \begin{cases} |\varphi_{r-1}(mt/2)|, & 0 \le t \le \pi/m, \\ 0, & t > \pi/m, \end{cases}$$

а при нечетных r

$$p_*(\varphi_{r-1}(m\cdot), t) = \begin{cases} \varphi_{r-1}(mt/2 - \pi/2), & 0 \le t \le \pi/m, \\ 0, & t > \pi/m, \end{cases}$$

из неравенства (11) получаем:

при четных r

$$\left| R_n(f) \right| \le \frac{\pi}{4n^r} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} A_{\mu}, \tag{12}$$

где

$$A_{\mu} := \left| \int_0^{\pi/(n 2^{\mu})} \omega\left(f^{(r)}, t\right)_1 \, d\varphi_{r-1}\left(n 2^{\mu-1} t\right) \right|;$$

при нечетных r

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{\pi}{4n^r}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\mu r}}B_\mu, \tag{13}$$

где

$$B_\mu := \left|\int_0^{\pi/(n2^\mu)} \omega(f^{(r)},t)_1\, d\varphi_{r-1}(n2^{\mu-1}t-\pi/2)\right|.$$

Оценим сверху величину A_μ:

$$A_\mu \le \omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n2^\mu}\right)_1\left|\int_0^{\pi/(n2^\mu)} d\varphi_{r-1}(n2^{\mu-1}t)\right| =$$

$$= \omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n2^\mu}\right)_1\|\varphi_{r-1}\|_C = \omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n2^\mu}\right)_1 K_{r-1}. \tag{14}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$B_\mu \le \omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n2^\mu}\right)_1 K_{r-1}. \tag{15}$$

Используя оценки (14), (15), из неравенств (12) и (13) получаем, что для любых $r = 1, 2, \dots$ выполняется неравенство (9). Теорема 3 доказана.

Следствие 2. *При четном r для любой функции $f \in L_1^r$ выполняется неравенство*

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{\pi\,|D_r(0)|}{n^r}\omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_1. \tag{16}$$

Теорема 4. *Для любой функции $f \in L_1^r$ при каждом $r = 1, 2, \dots$ для произвольного $\delta \ge \pi/n$ выполняется неравенство*

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{\pi\,\|D_r\|_C}{n^r}\omega(f^{(r)},\delta)_1. \tag{17}$$

Доказательство. Для четных r из теоремы 3 имеем

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{\pi K_{r-1}}{4n^r}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\mu r}}\omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_1. \tag{18}$$

Отсюда с учетом следствия 1 непосредственно следует утверждение теоремы 4 для четных r.

Если r — нечетно, то $D_r(nt)$ — нечетная $2\pi/n$-периодическая функция (состоящая на периоде из равноизмеримых „шляпок"). Отсюда и из теоремы 2 следует

$$\left|R_n(f)\right| = \frac{2\pi}{n^r}\left|\int_0^{2\pi} f^{(r)}(t)\,D_r(nt)\,dt\right| \le \frac{\pi}{n^r}\left|\int_0^{\pi/n}\omega(f^{(r)},t)_1\,dp_*(D_r(n\cdot),t)\right|, \tag{19}$$

где $p_*(D_r(n\cdot),t)$ — перестановка одной „шляпки" функции $D_r(nt)$. Следовательно,

$$\left|R_n(f)\right| \le \frac{\pi}{n^r}\omega(f^{(r)},\pi/n)_1\,p_*(D_r(n\cdot),0) = \frac{\pi\,\|D_r\|_C}{n^r}\omega\left(f^{(r)},\frac{\pi}{n}\right)_1.$$

Остается заметить, что при $\delta \ge \pi/n$

$$\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_1 \le \omega(f^{(r)}, \delta)_1.$$

***Доказательство теоремы* 1.** Рассмотрим погрешность квадратурной формулы (1):

$$R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\}) = \int\limits_0^{2\pi} f(t)\,dt - \sum_{k=1}^{n} p_k f(t_k) \tag{20}$$

с узлами t_k и весами p_k. Естественно, что веса p_k должны быть такими, что

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 2\pi.$$

Пусть $M_n(\{t_k\}, \{p_k\}, t)$ — моносплайн наименьшего дефекта, в среднем равный нулю на периоде и такой, что его $(r-1)$-я производная в его узлах t_k терпит разрывы, соответственно равные p_k. Тогда, как известно [4] (гл. 8),

$$\left|R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})\right| = \left|\int\limits_0^{2\pi} f^{(r)}(t) M_n(\{t_k\}, \{p_k\}, t)\,dt\right|. \tag{21}$$

Отсюда и из теоремы двойственности (см., например, [5, с. 42]) следует

$$\sup_{E(f^{(r)}, R_1)_p \le 1} |R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})| = \| M_n(\{t_k\}, \{p_k\}) \|_q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{22}$$

Дословно повторяя рассуждения В. П. Моторного [6] (см. также [7, 8]), устанавливаем, что

$$\inf_{\{\{t_k\}, \{p_k\}\}} \| M_n(\{t_k\}, \{p_k\}) \|_q = \frac{2\pi}{n^r} \| D_r(n\cdot) \|_q = \frac{2\pi}{n^r} \| D_r \|_q. \tag{23}$$

Следовательно, для любого моносплайна $M_n(\{t_k\}, \{p_k\}, t)$ выполняется неравенство

$$\| M_n(\{t_k\}, \{p_k\}) \|_q \ge \frac{2\pi}{n^r} \| D_r \|_q. \tag{24}$$

Отсюда и из соотношения (22) следует, что для любой квадратурной формулы вида (1) и любого $\delta > 0$

$$\sup_{f \in L_1^r \setminus R_1} \frac{|R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})|}{\omega(f^{(r)}, \delta)_p} \ge \sup_{f \in L_1^r \setminus R_1} \frac{|R_n(f, \{t_k\}, \{p_k\})|}{2E(f^{(r)}, R_1)_p} \ge$$

$$\ge \frac{\| M_n(\{t_k\}, \{p_k\}) \|_q}{2} \ge \frac{2\pi}{n^r} \| D_r \|_q, \tag{25}$$

что вместе с теоремой 4 и завершает доказательство.

***Следствие* 3.** *При четном r для любой функции $f \in L_1^r$ имеет место неравенство*

$$|R_n(f)| \le \frac{\pi \| D_r \|_C}{n^r} \left\{ \left(1 - \frac{1}{2^r}\right) \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_1 + \frac{1}{2^r} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right)_1 \right\}. \tag{26}$$

Действительно, из (9) вытекает неравенство

$$|R_n(f)| \le \frac{\pi K_{r-1}}{4n^r} \left\{ \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_1 + \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}} \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2^\mu n}\right)_1 \right\} \le$$

$$\leq \frac{\pi K_{r-1}}{4n^r}\left\{\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_1 + \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right)_1 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\mu r}}\right\}$$

и остается лишь заметить, что

$$\frac{K_{r-1}}{4}\sum_{\mu=0}^{\infty}\frac{1}{2^{\mu r}} = \| D_r \|_C,$$

а

$$\frac{K_{r-1}}{4}\sum_{\mu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\mu r}} = \frac{1}{2^r}\| D_r \|_C.$$

Принимая во внимание, что

$$\omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{2n}\right)_1 \leq \omega\left(f^{(r)}, \frac{\pi}{n}\right)_1,$$

заключаем, что неравенство (26) является уточнением неравенства (18). Следовательно, ни для одной простой квадратурной формулы вида (1) в неравенстве типа Джексона (26) константу $\pi \| D_r \|_C$ уменьшить нельзя.

1. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле для периодических дифференцируемых функций // Приближение функций и суммирование рядов. – Днепропетровск : Изд-во Днепропетр. ун-та, 1991. – С. 37 – 40.
2. *Doronin V. G., Ligun A. A.* On the exact constants in Jackson's type inequalities in the space L_2 // E. j. Approxim. – 1995. – **1**, № 2.– P. 189 – 196.
3. *Доронин В. Г., Лигун А. А.* Точное решение некоторых экстремальных задач на классах функций, определяемых интегральным модулем непрерывности // Докл. АН СССР. Сер. мат. – 1980. – **251**, № 1. – С. 1233 – 1236.
4. *Корнейчук Н. П., Бабенко В. Ф., Лигун А. А.* Экстремальные свойства полиномов и сплайнов. – Киев : Наук. думка, 1992. – 304 с.
5. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
6. *Моторный В. П.* О наилучшей квадратурной формуле вида $\sum_{k=1}^{n} p_k\, f(x_k)$ для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1974. – **38**, № 3.– С. 583 – 614.
7. *Женсыкбаев А. А.* Наилучшая квадратурная формула для некоторых классов периодических дифференцируемых функций // Там же. – 1977. – **41**, № 5. – С. 1110 – 1124.
8. *Боянов Б. Д.* Характеристика и существование оптимальных квадратурных формул для некоторых классов дифференцируемых функций // Докл. АН СССР. Сер. мат. – 1977. – **232**, № 6. – С. 1233 – 1236.

Получено 07.07.98,
после доработки — 13.05.99