УДК 517.512

С. Б. Вакарчук (Акад. таможен. службы Украины, Днепропетровск)

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ В СРЕДНЕМ И СВЕРХСХОДИМОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ПОЛИНОМОВ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

We investigate a property of a sequence of polynomials of best approximation in the mean related to the convergence in a neighborhood of every point of regularity of a function on thee level line ∂G_R.

Досліджується властивість послідовності поліномів найкращого наближення в середньому, пов'язана зі збіжністю в деякому околі кожної точки регулярності функції на лінії рівня ∂G_R.

1. Пусть $\overline{\mathbb{C}}$ — множество всех точек расширенной комплексной плоскости. Ограниченное замкнутое множество $\overline{D} = D \cup \partial D$, принадлежащее $\overline{\mathbb{C}}$ и состоящее более чем из одной точки, дополнение которого G есть односвязная область, содержащая бесконечно удаленную точку, называют множеством типа $\mathfrak{M}$ [1]. Пусть функция $w = \Phi(z)$ однолистно и конформно отображает область G на область $|w| > 1$ при условиях $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi^{(1)}(\infty) = \lambda > 0$. Линией уровня ∂G_R, $R \geq 1$, множества $\overline{D}$ типа $\mathfrak{M}$ называют совокупность точек $z \in \in \overline{\mathbb{C}}$, которые при $R > 1$ удовлетворяют условию $|\Phi(z)| = R$, а при $R = 1$ совпадают с границей ∂D континуума $\overline{D}$. Внутренность линии уровня ∂G_R при $R > 1$ обозначим D_R, а внешность — G_R.

В конструктивной теории функций комплексного переменного хорошо известны результаты С. Н. Бернштейна [2], Дж. Уолша и Г. Рассела [3] о наилучшем равномерном приближении полиномами функций, аналитических на ограниченном континууме, и результаты А. Островского [4] о сверхсходимости степенного ряда. На основе работ [1 – 3, 5] изучение вопроса о сверхсходимости последовательности полиномов наилучшего равномерного приближения проводилось, например, Э. З. Шуваловой [4], Р. А. Симоненко [6]. Одним из основных результатов [4] является следующая теорема.

Теорема А [4]. *Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая на некотором ограниченном континууме $\overline{D}$, $P_n(f, z)$ — полином наилучшего равномерного приближения этой функции на $\overline{D}$, $\mathscr{E}_n(f, \overline{D})$ — соответствующее наилучшее приближение, причем*

а) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f, \overline{D})} = R^{-1}, \quad R > 1;$

б) $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f, \overline{D})} \neq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f, \overline{D})}.$

Тогда существует подпоследовательность полиномов $\{P_{n_k}(f, z)\}_{k=1}^{\infty}$, которая сходится равномерно к $f(z)$ в окрестности каждой регулярной точки $f(z)$ на ∂G_R.

Согласно [2, 3], из условия а) следует, что функция $f(z)$ аналитична в области D_R и имеет на линии уровня ∂G_R хотя бы одну особую точку. Дж. Уолш показал, что последовательность полиномов $\{P_n(f, z)\}_{n=1}^{\infty}$ равномерно сходится внутри ∂G_R, но не сходится ни в какой области, расположенной вне ∂G_R. Напомним также, что последовательность $\{P_{n_k}(f, z)\}_{k=1}^{\infty}$, имеющая указанное в теореме А свойство, называется сверхсходящейся.

Символом $L_p(\partial D)$, $p \geq 1$, обозначим множество комплекснозначных функций $f(z)$, определенных на кривой ∂D и удовлетворяющих условию $\|f\|_{L_p(\partial D)} = \left\{ \int_{\partial D} |f(z)|^p |dz| \right\}^{1/p} < \infty$. Для $f(z) \in L_p(\partial D)$, $p \geq 1$, полагаем

$$\mathscr{E}_n(f,\partial D)_p \overset{\text{df}}{=} \inf\left\{\left\| f(z)-\sum_{k=0}^{n-1} c_k z^k \right\|_{L_p(\partial D)} : c_k\in\mathbb{C},\ k=\overline{0,n-1}\right\}.$$

Пусть $z=\psi_0(w)$ — функция, которая конформно и однолистно отображает круг $|w|<1$ на односвязную область $D=\operatorname{int}\partial D$. При этом $\psi_0(0)=z_0$ и $\psi_0^{(1)}(0)>0$, где z_0 — некоторая фиксированная точка области D. Через Γ_r обозначим образ окружности $|w|=r$, $0<r<1$, при отображении $z=\psi_0(w)$. Если для аналитической в области D функции $f(z)$ при любых r, удовлетворяющих условию $0<r<1$, выполняется неравенство

$$\|f\|_{E_p} \overset{\text{df}}{=} \lim\left\{\|f\|_{L_p(\Gamma_r)} : r\to 1-0\right\} < \infty, \quad p\ge 1,$$

то говорят [7, 8], что функция $f(z)$ принадлежит введенному В. И. Смирновым банахову пространству $E_p(D)$. Поскольку для $f(z)\in E_p(D)$ почти всюду на ∂D существуют угловые граничные значения, то норма $\|f\|_{E_p}=\|f\|_{L_p(\partial D)}$.

Настоящая статья продолжает исследования, начатые в [1 – 6]; основными в ней являются следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть $\overline{D}$ есть множество типа $\mathfrak{M}$ со спрямляемой границей ∂D такой, что производная $\Phi^{(1)}(z)$ отображающей функции $w=\Phi(z)$ принадлежит в области G пространству $E_q(G)$, $q>1$; $f(z)$ — произвольный элемент пространства $L_p(\partial D)$ $(1/p+1/q=1;\ p>1)$, удовлетворяющий условию*

$$\int_{\partial D} |f(z)|^p \left|\Phi^{(1)}(z)\right| |dz| < \infty. \tag{1}$$

Для того чтобы $f(z)$ почти всюду на кривой ∂D совпадала с некоторой аналитической в области D_R, $R>1$, функцией $F(z)$, имеющей на линии уровня ∂D_R, по крайней мере, одну особую точку, необходимо и достаточно, чтобы

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f,\partial D)_p} = R^{-1}. \tag{2}$$

Обозначим через $\theta(s)$ угол между положительным направлением действительной оси и касательной к кривой ∂D (ограничивающей односвязную область D) в точке A, которая по длине дуги на кривой ∂D находится на расстоянии s от фиксированной точки. Полагаем, что кривая ∂D удовлетворяет условию

$$\int_0^{\varepsilon} \omega(\theta,s)\frac{ds}{s} < \infty, \qquad \varepsilon>0, \tag{3}$$

где $\omega(\theta,s)$ — модуль непрерывности функции $\theta(s)$ [9, с. 261].

Теорема 2. *Пусть граница ∂D области D удовлетворяет условию* (3), *комплекснозначная функция $f(z)$ принадлежит пространству $L_p(\partial D)$ и $\left\{\Pi_n^*(f,z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность полиномов наилучшего приближения в среднем p-й степени на кривой ∂D для $f(z)$. Если*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f,\partial D)_p} \ne \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f,\partial D)_p} = R^{-1}, \quad R>1, \tag{4}$$

то последовательность $\left\{\Pi_n^*(f,z)\right\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно в области D_R к некоторой аналитической в D_R функции $F(z)$, которая имеет на ∂D_R, по крайней мере, одну особую точку и сужение которой на ∂D почти всюду сов-

падает с $f(z)$. *При этом существует подпоследовательность* $\left\{\Pi^*_{n_k}(f,z)\right\}_{k=1}^{\infty}$, *которая сходится равномерно к функции* $F(z)$ *в некоторой окрестности каждой регулярной точки* $F(z)$ *на* ∂G_R.

2. Приведем понятия, определения и некоторые положения, необходимые для доказательства теорем 1 и 2.

Совокупность членов с неотрицательными степенями в лорановском разложении функции $[\Phi(z)]^k$ в окрестности точки $z=\infty$ называют многочленом Фабера k-го порядка и обозначают символом $\Phi_k(z)$.

Теорема B [1, с. 135, 136]. *Пусть* $\Phi_k(z)$, $k=0,1,2,\ldots$, *—последовательность полиномов Фабера для континуума* $\overline{D}$ *типа* $\mathfrak{M}$. *Если функция* $F(z)$ *регулярна в области* D_R, $1<R<\infty$, *и на линии уровня* ∂G_R *имеет особую точку, то:*

1) $F(z)$ *разлагается в ряд по полиномам Фабера*

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z), \tag{5}$$

где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=r} F(\Psi(w))\, w^{-k-1}\,dw, \quad 1<r<R;$$

2) *при этом*

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|} = R^{-1} \tag{6}$$

и ряд (5) *равномерно сходится в области* D_R *и расходится в области* G_R;

3) *разложение* (5) *функции* $F(z)$ *в ряд по полиномам Фабера, равномерно сходящийся в какой-либо области* $B\supset D$, *единственно*;

4) *обратно*: *если имеет место* (6), *то ряд* (5) *равномерно сходится в* D_R, *расходится в* G_R, *а функция* $F(z)$, *определенная рядом* (5), *регулярна в области* D_R *и на линии уровня* ∂G_R *имеет особую точку.*

Теорема C (Г. Ц. Тумаркин [7, с. 268 – 271]). *Если последовательность* $\{f_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ *угловых граничных значений функций* $f_n(z)\in E_p(D)$, $p>0$, *в области* D *сходится по мере на множестве* μ, $\operatorname{mes}(\mu)>0$, *границы* ∂D *области* D *и* $\|f_n\|_{L_p(\partial D)}<c$, *где* c *не зависит от* n, *то последовательность* $\{f_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ *равномерно сходится в области* D *к некоторой функции* $f(z)\in E_p(D)$ *и последовательность* $\{f_n(\xi)\}_{n=1}^{\infty}$ *сходится по мере на множестве* μ *к функции* $f(\xi)$ *— угловым граничным значениям функции* $f(z)$.

Сформулируем в удобном для нас виде теорему А. Островского о сверхсходящихся рядах.

Теорема D (см., например, [4]). *Если ряд* $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ *имеет радиус сходимости* r *и существуют числа* $\eta>0$, $\lambda>0$ *и последовательности* $\{m_k\}$ *и* $\{m_k'\}$ *такие, что* $m_k'>(1+\eta)m_k$ *и* $|c_m|<(r+\lambda)^{-m}$ *для* $m_k<m<m_k'$, *то последовательность частных сумм* $T_{m_k+1}(f,z)\overset{\text{df}}{=}\sum_{m=0}^{m_k} c_m z^m$ *равномерно сходится к* $f(z)$ *в некоторой окрестности каждой регулярной точки* $f(z)$ *на окружности* $|z|=r$.

При выполнении условий данной теоремы ряд $f(z)=\sum_{m=0}^{\infty} c_m z^m$ называют рядом лакунарной структуры, а указанное свойство последовательности $\{T_{m_k+1}(f,z)\}$ — сверхсходимостью.

Лемма А [4]. *Любая монотонная последовательность* $\{\delta_n\}$ $(\delta_n > 0)$, *для которой*

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{\delta_n} \neq \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\delta_n} = R^{-1},$$

содержит последовательность полусегментов $[n_k, n'_k)$, $k = 1, 2, \dots$, *имеющих следующие свойства*:

1) $n'_k > (1+\tau)n_k$, *где* $\tau = \text{const} > 0$;

2) *для всех* n *таких, что* $n_k < n < n'_k$, *справедливы неравенства* $\delta_n < (R+\nu)^{-n}$, *где* $\nu = \text{const} > 0$.

Пусть $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ — две последовательности положительных чисел. Запись $a_n \ll b_n$ означает, что для всех $n \in \mathbb{N}$ при некотором фиксированном $\kappa > 0$ выполнено неравенство $a_n \le \kappa b_n$. Запись $a_n \asymp b_n$ означает, что одновременно $a_n \ll b_n$ и $b_n \ll a_n$.

3. ***Доказательство теоремы*** **1.** Пусть для функции $f(z) \in L_p(\partial D)$, удовлетворяющей условию (1), справедливо равенство (2) и

$$\Pi_n(f,z) = \sum_{j=0}^{n-1} \beta_j^{(n)} \Phi_j(z)$$

— полином наилучшего приближения, т. е. $\| f - \Pi_n(f)\|_{L_p(\partial D)} = \mathscr{E}_n(f, \partial D)_p$. Очевидно, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\|\Pi_n(f)\|_{L_p(\partial D)} \le 2\|f\|_{L_p(\partial D)} < \infty$. Поскольку последовательность $\{\Pi_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится в среднем p-й степени на ∂D к $f(z)$, то она сходится и по мере [10, с. 93]. Отсюда в силу теоремы C следует, что $\{\Pi_n(f)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится равномерно в области D к некоторой аналитической функции $F(z) \in E_p(D)$ и угловые граничные значения F на ∂D почти всюду совпадают с f:

$$\text{mes}\,\{z \in \partial D : f(z) \neq F(z)\} = 0. \tag{7}$$

Так как для граничных значений функции F выполняется неравенство (1), то $F(z)$ разлагается в ряд Фабера [8, с. 107 – 109], сходящийся равномерно в $D = \operatorname{int} \partial D$: $F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \Phi_k(z)$, где

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=1} F(\Psi(w))\, w^{-k-1}\, dw, \quad k = 0, 1, 2, \dots . \tag{8}$$

Учитывая представление [8, с. 63]

$$\Phi_k(\Psi(w)) = w^k + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_j^{(k)}}{w^j}, \quad \alpha_j^{(k)} = \text{const},$$

а также используя (7), (8) и неравенство Гельдера, записываем

$$|c_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|w|=1} \left| F(\Psi(w)) - \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k^{(n)} \Phi_k(\Psi(w)) \right| |dw| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} \int_{\partial D} |F(z) - \Pi_n(f,z)| \left|\Phi^{(1)}(z)\right| |dz| \le \frac{1}{2\pi} \left\|\Phi^{(1)}\right\|_{E_q(G)} \mathscr{E}_n(f, \partial D)_p, \quad n \ge 1. \tag{9}$$

Из (2) и (9) следует, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \leq R^{-1}. \tag{10}$$

Покажем, что в соотношении (10) имеет место знак равенства. Известно [8, с. 65], что для любого $z \in \partial G_{R_1}$ и полинома Фабера $\Phi_n(z)$ степени n выполняется неравенство

$$|\Phi_n(z)| \leq \alpha_1(R_1) R_1^n, \tag{11}$$

где константа $\alpha_1(R_1) > 1$ и не зависит от n. Тогда для $1 < R_1 < R$ с учетом (11) и (1) получим

$$\mathscr{E}_n(f, \partial D)_p \leq \left\| F(z) - \sum_{k=0}^{n-1} c_k \Phi_k(z) \right\|_{L_p(\partial D)} \leq \tilde{a}_1(R_1) \sum_{k=n}^{\infty} |c_k| R_1^k. \tag{12}$$

Здесь $\tilde{a}_1(R_1)$ — также не зависящая от n постоянная.

Предположим, что имеет место неравенство

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} < R^{-1}.$$

Тогда существует число $\Delta \in (0, 1)$ такое, что

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = (1 - \Delta)/R. \tag{13}$$

Из (13) следует, что для $\varepsilon_1 = \varepsilon / R > 0$, $\varepsilon < \Delta$, существует $n_{\varepsilon_1} \in \mathbb{N}$ такое, что при любых натуральных $n > n_{\varepsilon_1}$ выполнено неравенство

$$|c_n| < (1 - \Delta + \varepsilon)^n / R^n. \tag{14}$$

Полагая, например, $\varepsilon = \Delta/2$, $R_1 = \min\{1 + \Delta/2;\ (1 + R)/2\}$, а также используя (7), (12) при $n > n_\varepsilon$ и (14), получаем

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(f, \partial D)_p} \leq R_1(1 - \Delta + \varepsilon)/R \leq (1 - \Delta^2/4)/R < R^{-1},$$

а это противоречит равенству (2). Следовательно,

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = R^{-1}.$$

На основании условия 4 теоремы B это означает регулярность функции $F(z)$ в области D_R, а также существование на линии уровня ∂G_R особой точки функции $F(z)$.

Докажем необходимость условия (2). Пусть $F(z)$ — аналитическая в области D_R функция, имеющая на ∂G_R хотя бы одну особую точку, а $f(z)$ — некоторая заданная на ∂D комплекснозначная функция, для которой имеет место (7). Из [2] следует

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(F, \partial D)_\infty} \leq R^{-1}. \tag{15}$$

Отсюда в силу соотношения $\mathscr{E}_n(F, \partial D)_p \ll \mathscr{E}_n(F, \partial D)_\infty$, $p \geq 1$, следует оценка сверху

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\mathscr{E}_n(F, \partial D)_p} \leq R^{-1}. \tag{16}$$

Поскольку для $F(z)$ справедливы все выводы теоремы B, то, используя (6), (9), (16) и (7), получаем соотношение (2). Теорема 1 доказана.

4. При доказательстве теоремы 2 потребуется следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть граница* ∂D *ограниченной односвязной области* D *удовлетворяет условию* (3). *Тогда для любой функции* $g(z) \in E_p(D)$, $1 < p < \infty$,

$$\mathscr{E}_n(g, \partial D)_p \asymp \|g - \mathscr{T}_n(g)\|_{L_p(\partial D)}, \tag{17}$$

где

$$\mathscr{T}_n(g, z) \overset{\text{df}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} c_j(g)\,\Phi_j(z)$$

— *частная сумма ряда Фабера* $\sum_{j=0}^{\infty} c_j(g)\,\Phi_j(z)$ *функции* $g(z)$.

Доказательство. Поскольку оценка сверху

$$\mathscr{E}_n(g, \partial D)_p \le \|g - \mathscr{T}_n(g)\|_{L_p(\partial D)} \tag{18}$$

очевидна, покажем справедливость оценки снизу для величины $\mathscr{E}_n(g, \partial D)_p$. Для этого докажем ограниченность оператора $\mathscr{T}_n(\cdot)$. Рассмотрим линейный оператор $T: w^n \to \Phi_n(z)$ $(\forall\, n \in \mathbb{Z}_+)$ и, распространив это правило со степеней на произвольные многочлены Π_n по линейности, т. е. T: $\Pi_n(w) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j \times w^j \to (T\Pi_n)(z) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\,\Phi_j(z)$, запишем следующее интегральное представление [8]:

$$(T\Pi_n)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\Pi_n(\Phi(\xi))}{\xi - z}\,d\xi, \quad z \in D. \tag{19}$$

Граница ∂D области D является гладкой кривой. Тогда, как известно [11, с. 139], сингулярный интегральный оператор

$$K(\phi, z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D} \frac{\phi(\xi)\,d\xi}{\xi - z}, \quad z \in \partial D,\ \phi = L_p(\partial D),$$

действует и ограничен в пространстве $L_p(\partial D)$ при любых $1 < p < \infty$, а его норма A_p удовлетворяет условию симметрии: $A_p = A_q$, если $q = p/(p-1)$. Следовательно, для полинома (19) имеем

$$\|T\Pi_n\|_{L_p(\partial D)} = \|K(\Pi_n(\Phi))\|_{L_p(\partial D)} \le A_p \left\{\int_0^{2\pi} \left|\Pi_n(e^{it})\right|^p \left|\Psi^{(1)}(e^{it})\right| dt\right\}^{1/p}. \tag{20}$$

Поскольку граница ∂D области D удовлетворяет ограничению (3), то, согласно [12], существуют две положительные константы α_1 и α_2, зависящие от D, такие, что выполняются неравенства

$$0 < \alpha_1 \le |\Psi^{(1)}(w)| \le \alpha_2 < \infty, \quad |w| \ge 1. \tag{21}$$

Учитывая (21), продолжим оценку (20):

$$\le A_p \alpha_2 \|\Pi_n\|_{L_p(|w|=1)}, \quad 1 < p < \infty. \tag{22}$$

Полагая $\tilde{\Pi}_n(w) \overset{\text{df}}{=} \sum_{j=0}^{n-1} c_j(g)\,w^j$ и используя (20), (22), получаем

$$\|\mathscr{T}_n(g)\|_{L_p(\partial D)} = \left\|T\tilde{\Pi}_n\right\|_{L_p(\partial D)} \ll \left\|\tilde{\Pi}_n\right\|_{L_p(|w|=1)}, \quad 1 < p < \infty. \tag{23}$$

Из результатов В. М. Кокилашвили [9, с. 263, 264] следует, что

$$\|g - \mathscr{T}_n(g)\|_{L_p(\partial D)} \le c_3\,\omega_m^{(p)}(g, 1/n), \quad m \in N, \tag{24}$$

где константа c_3 зависит от ∂D, p и m, а

$$\omega_m^{(p)}(g,\delta) = \sup\left\{\left[\int_0^{2\pi}\left|\Delta_m^h g_0(\tau)\right|^p d\tau\right]^{1/p} : |h|\le\delta\right\}$$

— модуль гладкости порядка m функции $g(z)$ на ∂D;

$$g_0(\tau) \overset{\mathrm{df}}{=} g\left[\Psi(e^{i\tau})\right],\ \Delta_m^h g_0(\tau) = \sum_{\nu=0}^m (-1)^{m-\nu}\binom{m}{\nu} g_0(\tau+\nu h).$$

В силу (24) последовательность частных сумм ряда Фабера $\{\mathcal{T}_n(g,z)\}_{n=1}^\infty$ сходится в среднем p-й степени на ∂D к угловым граничным значениям функции $g(z)\in E_p(D)$. Тогда на основании теоремы C данная последовательность также сходится и по мере на ∂D к $g(z)$. Известно (см., например, [10, с. 93, 94]), что из сходимости по мере на множестве μ последовательности функций $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ к некоторой функции f следует существование подпоследовательности $\left\{f_{n_j}\right\}_{j=1}^\infty$, которая сходится к f почти всюду на μ. Из этого следует, что существует подпоследовательность $\left\{\mathcal{T}_{n_j}(g,z)\right\}_{j=1}^\infty$, сходящаяся к $g(z)$ почти всюду на ∂D. Используя связь, существующую между сходящейся последовательностью и соответствующим ей сходящимся рядом, записываем представление

$$g(z) = \mathcal{T}_{n_1}(g,z) + \sum_{j=1}^\infty\left[\mathcal{T}_{n_{j+1}}(g,z) - \mathcal{T}_{n_j}(g,z)\right],$$

справедливое для почти всех $z\in\partial D$. Полагая $z=\Psi(w)$, переписываем данную формулу в виде

$$g[\Psi(w)] = \sum_{\nu=0}^{n_1-1} c_\nu(g)\,\Phi_\nu[\Psi(w)] + \sum_{j=1}^\infty\sum_{\nu=n_j}^{n_{j+1}-1} c_\nu(g)\,\Phi_\nu[\Psi(w)],$$

где $\Phi_\nu[\Psi(w)] = w^\nu + \sum_{j=1}^\infty \alpha_j^{(\nu)} w^{-j} = w^\nu + Q_\nu(w)$; формула справедлива почти всюду на окружности $|w|=1$. Очевидно, что функция $Q_\nu(w)$ аналитична на множестве $|w|\ge 1$ и $Q_\nu(\infty)=0$. Тогда на основании следствия из теоремы Коши для неограниченных областей имеем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{Q_\nu(t)\,dt}{t-w} = 0, \quad |w|<1.$$

На основании изложенного справедливо представление

$$X(w) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{j=0}^\infty c_j(g)\,w^j = K(g(\Psi),w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|t|=1}\frac{g(\Psi(t))\,dt}{t-w}, \quad |w|<1. \quad (25)$$

Поскольку $\left|\Phi^{(1)}(z)\right| = 1/\left|\Psi^{(1)}(\Phi(z))\right|$, то в силу (21) $\Phi^{(1)}(z)\in L_\infty(\partial D)$. Отсюда следует, что определенная почти всюду на $|w|=1$ функция $g(\Psi(w))$ принадлежит пространству $L_p(|w|=1)$, так как

$$\|g(\Psi)\|_{L_p(|w|=1)} = \left\{\int_{\partial D}|g(z)|^p\left|\Phi^{(1)}(z)\right||dz|\right\}^{1/p} \le \left\|\Phi^{(1)}\right\|_{L_\infty(\partial D)}\|g\|_{L_p(\partial D)} < \infty.$$

Из ограниченности нормы сингулярного интегрального оператора $K[g(\Psi), w]$, $(|w| = 1)$ и формул Сохоцкого следует принадлежность определенной в (25) аналитической функции $X(w)$ пространству Харди H_p и выполнение неравенства

$$\|X\|_{L_p(|w|=1)} \le \frac{1}{2}\{1+A_p\}\|g(\Psi)\|_{L_p(|w|=1)} \le$$
$$\le \frac{1}{2}\{1+A_p\}\left\|\Phi^{(1)}\right\|_{L_\infty(\partial D)}\|g\|_{L_p(\partial D)}, \tag{26}$$

где A_p — норма сингулярного интегрального оператора $K(g, w)$.

Учитывая, что на основании теоремы Марцинкевича о мультипликаторах (см., например, [13, с. 82, 83]) справедливо соотношение

$$\left\|\tilde{\Pi}_n\right\|_{L_p(|w|=1)} << \|X\|_{L_p(|w|=1)}, \quad 1 < p < \infty,$$

а также используя неравенства (23) и (26), записываем

$$\|\mathcal{T}_n(g)\|_{L_p(\partial D)} << \|g\|_{L_p(\partial D)}, \quad 1 < p < \infty. \tag{27}$$

Пусть $g(z) \in E_p(D)$ и $\Pi_n(g, z)$ есть полином степени $\le n-1$, удовлетворяющий условию $\mathscr{E}_n(g, \partial D)_p = \|g - \Pi_n(g)\|_{L_p(\partial D)}$. Тогда на основании неравенства треугольника и (27) имеем

$$\|g - \mathcal{T}_n(g)\|_{L_p(\partial D)} = \|g - \Pi_n(g) + \mathcal{T}_n(\Pi_n(g) - g)\|_{L_p(\partial D)} << \mathscr{E}_n(g, \partial D)_p. \tag{28}$$

Сравнив (18) и (28), получим соотношение (17). Утверждение доказано.

5. ***Доказательство теоремы*** **2.** Из теоремы 1 следует, что функция $f(z)$ почти всюду на кривой ∂D совпадает с некоторой аналитической в области D_R функцией $F(z)$, имеющей на линии ∂G_R хотя бы одну особую точку и разлагающейся по многочленам Фабера в ряд (5).

Из неравенства типа С. М. Никольского, полученного в [14] на спрямляемых жордановых кривых для алгебраических полиномов комплексного переменного, следует, что если $0 < p \le q \le \infty$ и кривая ∂D удовлетворяет условию (3), то

$$\|\Pi_{n+1}\|_{L_q(\partial D)} << n^{1/p-1/q}\|\Pi_{n+1}\|_{L_p(\partial D)}. \tag{29}$$

Используя (29) и проводя по аналогии с [15] в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ряд рассуждений, базирующихся на идеях из [16], получаем, что если для функции $g(z) \in E_p(D)$ при некотором $q > p \ge 1$ выполнено условие

$$\sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1/q-1}\mathscr{E}_j(g, \partial D)_p < \infty,$$

то $g(z) \in E_p(D)$ и в $\mathbb{C}$ справедливо неравенство типа А. А. Конюшкова

$$\mathscr{E}_n(g, \partial D)_q << n^{1/p-1/q}\mathscr{E}_n(g, \partial D)_p + \sum_{j=n+1}^{\infty} j^{1/p-1/q-1}\mathscr{E}_j(g, \partial D)_p. \tag{30}$$

Зафиксируем число $R_1 \in (1, R)$. Поскольку для произвольного алгебраического полинома $\Pi_{n+1}(z)$ степени n имеет место неравенство [1, с. 26]

$$|\Pi_{n+1}(z)| \le R_1^n\|\Pi_{n+1}\|_{C(\partial D)} \qquad \forall\, z \in \overline{D}_{R_1}, \tag{31}$$

где $\|\phi\|_{C(\partial D)} = \sup\{|\phi(z)| : z \in \partial D\}$, то для любого $z \in \overline{D}_{R_1}$ запишем

$$\left|\Pi_{n+1}^*(f,z)-\Pi_n^*(f,z)\right| \le R_1^n\left\{\left\|F-\Pi_{n+1}^*(f)\right\|_{C(\partial D)}+\left\|F-\Pi_n^*(f)\right\|_{C(\partial D)}\right\}. \quad (32)$$

Учитывая (7), из (4) получаем, что для каждого $\varepsilon \in (0; R/R_1-1)$ существует натуральное число n_ε, для которого при всех $n > n_\varepsilon$ выполнено неравенство

$$\mathscr{E}_n(F,\partial D)_p < \left(\frac{1+\varepsilon}{R}\right)^n. \quad (33)$$

Используя (30), где $q=\infty$ и $g \equiv F$, из (32), (33) для $z \in \overline{D}_{R_1}$ и $n > n_\varepsilon$ записываем

$$\left|\Pi_{n+1}^*(f,z)-\Pi_n^*(f,z)\right| << n^{1/p}\left(\frac{1+\varepsilon}{R}R_1\right)^n << n^{1/p}\lambda^n, \quad 0<\lambda<1. \quad (34)$$

Функциональная последовательность $\left\{\Pi_n^*(f,z)\right\}_{n=1}^\infty$ в силу критерия Коши и (34) равномерно сходится к некоторой аналитической в области D_R функции $S(z)$ внутри и на каждой линии уровня ∂G_{R_1}, $1<R_1<R$. Поэтому функциональный ряд

$$\Pi_1^*(f,z) + \sum_{n=1}^\infty\left\{\Pi_{n+1}^*(f,z)-\Pi_n^*(f,z)\right\}, \quad (35)$$

частные суммы которого совпадают с элементами данной последовательности, также равномерно сходится в D_R и имеет сумму $S(z)$. Однако в соответствии с (7) и (4) ряд (35) в смысле сходимости в метрике $L_p(\partial D)$ представляет на кривой ∂D еще и функцию $F(z)$. Поэтому на основании теоремы единственности аналитической функции $F(z)=S(z)$ $\forall z \in D_R$.

Поскольку последовательность $\{\mathscr{E}_n(F,\partial D)\}_{n=1}^\infty$ удовлетворяет условиям леммы A, то используя неравенство (9) для всех n таких, что $n_k < n < n_k'$, $k = 1, 2, \ldots$, имеем

$$|c_n| < \frac{1}{2\pi}\left\|\Phi^{(1)}\right\|_{L_\infty(\partial D)}\mathscr{E}_n(f,\partial D)_p < \frac{1}{2\pi}\left\|\Phi^{(1)}\right\|_{L_\infty(\partial D)}(R+\nu)^{-n}, \quad \nu>0. \quad (36)$$

Из (6), (36) и теоремы D следует, что ряд $V(w) = \sum_{n=0}^\infty c_n w^n$ имеет радиус сходимости, равный R, и является сверхсходящимся в том смысле, что в некоторой окрестности каждой регулярной точки его суммы $V(w)$ на $|w|=R$ последовательность частных сумм $T_{n_k+1}(V,w) = \sum_{n=0}^{n_k} c_n w^n$ сходится равномерно.

Покажем, что точке $z^* \in \partial G_R$, в окрестности $U_\varepsilon(z^*) = \{z \in \mathbb{C} : |z-z^*|<\varepsilon\}$ которой $F(z)$ является регулярной, соответствует точка $w^* = \Phi(z^*)$ ($|w^*| = R$), имеющая окрестность, где функция $V(w)$ регулярна. Для этого сформулируем в удобном для нас виде один результат И. Ф. Лохина [1, с. 165], предварительно введя необходимые обозначения.

Пусть Ω — область плоскости z, содержащая континуум B типа $\mathfrak{M}$, $B^1 = \overline{\mathbb{C}} \setminus B$ и $\Omega_1 \overset{\mathrm{df}}{=} \Omega \cap B^1$. Функция $w=\Phi(z)$ отображает область Ω_1 на некоторую область G_1^*, лежащую в области $|w|>1$ и имеющую одним из граничных континуумов окружность $|w|=1$; $\Lambda \overset{\mathrm{df}}{=} G_1^* \cup \{w : |w| \le 1\}$.

Теорема (И. Ф. Лохин). *Пусть*

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\beta_n|} = R^{-1}, \quad R>1.$$

Для того чтобы функция $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \Phi_n(z)$ *была регулярной в области* Ω, *содержащей* B, *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\lambda(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n w^n$ *была регулярной в области* Λ.

В рассматриваемом случае полагаем $\Omega = D_R \cup U_\varepsilon(z^*)$, $B = D$. Тогда односвязная область $\Lambda = \{w: |w| < R\} \cup \Phi(U_\varepsilon(z^*))$. Поскольку функция $F(z)$ регулярна в области Ω, то в силу приведенной теоремы функция $V(w)$ будет регулярной в области Λ, а значит, и в некоторой окрестности $U_{\tilde{\varepsilon}}(w^*) = \{w \in \mathbb{C}: |w - w^*| < \tilde{\varepsilon}\} \subset \Lambda$ точки $w^* = \Phi(z^*)$.

Отсюда следует, что последовательность частных сумм $S_{n_k+1}(z) \overset{\text{df}}{=} \sum_{n=0}^{n_k} c_n(\Phi(z))^n$, $k = 1, 2, \ldots$, будет равномерно сходиться во внешней части некоторой окрестности точки z^*, включая и содержащуюся там часть линии уровня ∂G_R.

Для полинома Фабера справедлива формула [8, с. 64] $\Phi_n(z) = \Phi^n(z) + \tilde{Q}_n(z)$ $(z \in G)$, где функция $\tilde{Q}_n(z)$ аналитическая в области G, причем $\tilde{Q}_n(\infty) = 0$ и

$$\tilde{Q}_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G_r} \frac{\Phi^n(\xi)\, d\xi}{\xi - z}, \quad z \in G_r, \quad r > 1.$$

Зафиксировав положительное число ε_* так, чтобы выполнялось неравенство $0 < \varepsilon_* < \sqrt{R} - 1$, и считая $r \overset{\text{df}}{=} 1 + \varepsilon_*$, оценим $|\tilde{Q}_n(z)|$ на замкнутом множестве $\overline{G}_R$. Обозначив расстояние между линиями уровня ∂G_r и ∂G_R через $d \overset{\text{df}}{=} \operatorname{dist}(\partial G_r, \partial G_R)$, для любых $z \in \overline{G}_R$ получим $|\tilde{Q}_n(z)| \le r^n (2\pi d)^{-1} l(\partial G_r)$, где $l(\partial G_r)$ — длина кривой ∂G_r. Учитывая это неравенство, (9) и оценку (33), справедливую для всех натуральных чисел $n > n_{\varepsilon_*}$, получаем

$$|c_n| |\tilde{Q}_n(z)| \le k_q \delta_*^n, \quad z \in \overline{G}_R,$$

где $k_q \overset{\text{df}}{=} l(\partial G_r) \|\Phi^{(1)}\|_{E_q(G)} / (4\pi^2 d)$; $\delta_* \overset{\text{df}}{=} ((1+\varepsilon_*)^2 / R) < 1$.

Поскольку числовой ряд

$$n_{\varepsilon_*} \mathfrak{N}(n_{\varepsilon_*}) + k_q \sum_{n=1}^{\infty} \delta_*^{n_{\varepsilon_*}+n},$$

где

$$\mathfrak{N}(n_{\varepsilon_*}) \overset{\text{df}}{=} \max\left\{ |c_k| \|\tilde{Q}_k\|_{C(\partial G_r)} : k = \overline{0, n_{\varepsilon_*}} \right\},$$

сходится, то в силу достаточного признака сходимости Вейерштрасса функциональный ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n \tilde{Q}_n(z)$ сходится равномерно в замкнутой внешности кривой ∂G_R, т. е. на множестве $\overline{G}_R$. Отсюда следует, что в некоторой окрестности каждой регулярной точки функции $F(z)$ на ∂G_R последовательность частных сумм $\mathcal{T}_{n_k+1}(F, z) = S_{n_k+1}(z) + \sum_{n=0}^{n_k} c_n \tilde{Q}_n(z)$, $k = 1, 2, \ldots$, ее ряда по полиномам Фабера (5) сходится равномерно.

Рассмотрим далее произвольную линию уровня ∂G_ρ, где $R < \rho < R + \nu$. На основании неравенств (29) и (31) для любой точки $z \in \overline{D}_\rho$ запишем

$$\left| \mathcal{T}_{n_k+1}(F; z) - \Pi_{n_k+1}(f, z) \right| << \rho^{n_k} n_k^{1/p} \left\| \mathcal{T}_{n_k+1}\left(F - \Pi_{n_k+1}(f)\right) \right\|_{L_p(\partial D)}. \tag{37}$$

Использовав (7), утверждение из п. 4 и правую часть двойного неравенства (36), продолжим оценку (37):

$$<< \rho^{n_k} n_k^{1/p} \mathcal{E}_{n_k}(f, \partial D)_p << n_k^{1/p} \left(\frac{\rho}{R+\nu} \right)^{n_k}, \quad k = 1, 2, \ldots . \tag{38}$$

Поскольку правая часть неравенств (37), (38) стремится к нулю при $k \to \infty$, то из равномерной сходимости последовательности $\left\{ \mathcal{T}_{n_k+1}(F, z) \right\}_{k=1}^{\infty}$ в некоторой окрестности каждой регулярной точки $F(z)$ на ∂G_R следует равномерная сходимость последовательности $\left\{ \Pi_{n_k+1}(F, z) \right\}_{k=1}^{\infty}$ к $F(z)$ в достаточно малой окрестности этой же точки на ∂G_R. Теорема 2 доказана.

1. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. – М.; Л.: Наука, 1964. – 438 с.
2. *Bernshtein S. N.* Sur l'order de la meilleure approximation des fonctins continues par des polynomes de degre donne // Mem. Acad. Poy. Belg. – 1912. – **4**. – P. 1 – 104.
3. *Walsh J. L., Russell H. G.* On the convergence and overconvergence of sequences of polynomials of best simultaneous approximation to several functions analytic in distinct regions // Trans. Amer. Math. Soc. – 1934. – **36**, № 1. – P. 13 – 28.
4. *Шувалова Э. З.* О сверхсходимости последовательности полиномов // Мат. сб. – 1952. – **31**, № 1. – С. 76 – 87.
5. *Альпер С. Я.* О сверхсходимости рядов по полиномам // Докл. АН СССР. – 1949. – **59**, № 4. – С. 625 – 627.
6. *Симоненко Р. А.* О сверхсходимости последовательности полиномов наилучшего приближения // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 8. – С. 122 – 126.
7. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 336 с.
8. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.
9. *Кокилашвили В. М.* О приближении в среднем аналитических функций класса E_p // Докл. АН СССР. – 1967. – **177**, № 2. – С. 261 – 264.
10. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 292 с.
11. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. – М.: Наука, 1975. – 296 с.
12. *Warschawski S.* Uber das Verhalten der Albeitung der Abbildungsfunktion bei Konformer Abbildung // Math. Z. – 1932. – **35**. – S. 321 – 456.
13. *Тихомиров В. М.* Некоторые задачи теории приближений. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 304 с.
14. *Мамедханов Дж. И.* Неравенства типа С. М. Никольского для многочленов комплексного переменного на кривых // Докл. АН СССР. – 1974. – **214**, № 3. – С. 37 – 39.
15. *Вакарчук С. Б.* О поперечниках некоторых классов аналитических функций. **I** // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 324 – 333.
16. *Конюшков А. А.* Наилучшие приближения и коэффициенты Фурье // Мат. сб. – 1958. – **44**, № 1. – С. 53 – 84.

Получено 26.10.98,
после доработки — 06.04.99