УДК 517.5

В. Ф. Бабенко (Днепропетр. ун-т), **А. А. Лигун** (Днепродзерж. техн. ун-т),
В. П. Моторный (Днепропетр. ун-т)

О РАБОТАХ Н. П. КОРНЕЙЧУКА, ВЫПОЛНЕННЫХ В 1990 – 1999 ГОДАХ

We present a short review of N. P. Korneichuk's works published in 1990–1999.

Наведено короткий огляд робіт М. П. Корнєйчука, опублікованих в 1990–1999 роках.

Об активной и результативной деятельности Н. П. Корнейчука в области научных исследований свидетельствует тот факт, что за последние 10 лет им опубликовано 24 работы (не считая тезисов докладов на различных конференциях), из них 4 монографии и 20 журнальных статей (в том числе 19 без соавторов).

Отмечая широту научных интересов Н. П. Корнейчука, заметим, что главный вектор его работ за это время все же был направлен в сторону информационных аспектов в теории приближения. Информационный подход к различным задачам теории аппроксимации дает возможность значительно полнее использовать ее методы и результаты при решении задач оптимального восстановления математических объектов по неполной информации.

Приведем краткий обзор результатов, объединяя их в группы по направлениям исследований. Обзоры результатов, полученных Н. П. Корнейчуком и его учениками до 1990 г., можно найти в „Украинском математическом журнале" (1990 г., том 42, № 1).

1. Оптимальное восстановление функций и операторов. Статья [1] — это расширенный доклад Н. П. Корнейчука на заседании Киевского математического общества. В ней дается краткий исторический обзор исследований по теории приближения функций, освещаются тенденции ее дальнейшего развития, формулируются постановки новых задач, связанных с оптимизацией методов приближения. Ряд сформулированных задач рассматривался затем в последующих его статьях. В работах [6 – 8] рассматриваются задачи оптимального восстановления функции $\varphi(t)$ по дискретной информации в виде значений функционалов на самой функции $\varphi(t)$ или на функции $f(t) = A\varphi(t)$, где A — некоторый оператор, в частности оператор дифференцирования или оператор, задающий краевую задачу. В работе [13] задача восстановления оператора $A: X \to Y$ формулируется, когда X и Y — метрические пространства. Конкретные результаты получены в линейном случае, когда A — интегральный оператор, который задается ядром $K(t, u)$.

В одной из последних работ [23] сформулированы информационные аспекты в теории аппроксимации и рассмотрены конкретные задачи восстановления каждого из трех элементов $x \in X$, $y \in Y$ и $A: X \to Y$, связанных равенством $Ax = y$, по информации о двух остальных.

2. Адаптивный подход в задачах восстановления. В постановочной статье [23] подчеркивается, что информационный подход позволяет рассматривать задачи, не являющиеся характерными для традиционной проблематики, в частности, это касается адаптивных методов восстановления.

При неадаптивном подходе весь набор $M_N = \{\mu_1, \ldots, \mu_N\}$ функционалов, задающих информацию об элементе x из рассматриваемого класса F, задается с самого начала и не зависит от x. При адаптивном подходе кодирующие функционалы $\mu_1, \mu_2, \ldots$ выбираются последовательно, с учетом значений на восстанавливаемом элементе x уже выбранных функционалов, т. е. в этом случае информационный оператор задается в виде некоторого алгоритма для выбора функционала на каждом шаге и приспособлен к элементу $x \in F$.

Известно, что при восстановлении выпуклых центрально-симметричных множеств в нормированных пространствах адаптивный подход не лучше неадаптивного. Для несимметричных множеств ситуация иная.

В работах [10, 11, 14] рассмотрена задача адаптивного восстановления функции $f \in H^{\omega}[a, b]$ по ее значениям в некоторых точках. При некоторых ограничениях на модуль непрерывности $\omega(t)$ и в случае, когда функция $f(t)$ строго монотонна на отрезке $[a, b]$, получено асимптотически точное выражение для минимального числа $N(\varepsilon)$ шагов, позволяющих восстановить $f(t)$ в равномерной метрике с точностью $\leq \varepsilon$. Если $\omega(t) \neq Kt$, то $N(\varepsilon)$ по порядку меньше, чем в неадаптивном случае. При доказательстве этого утверждения используются элементы теории игр.

В [15] введены в метрическом пространстве понятия адаптивных поперечников и найден точный результат для одного класса функций, не являющегося центрально-симметричным.

3. Сложность аппроксимационных задач. Понятие сложности математической задачи введено А. Г. Витушкиным и А. Н. Колмогоровым, а позже и в ином, более широком смысле — Дж. Траубом, Г. Васильковским и Х. Вожьяковским. В работах [19, 20] Н. П. Корнейчук, исходя из введенного А. Н. Колмогоровым понятия сложности ε-задания функции, предпринимает попытку изложить подход к исследованию вопросов сложности, тесно связанный с информационным поперечником, использующим информацию в виде вектора $M_N(x) = \{\mu_1(x), \mu_2(x), \ldots, \mu_N(x)\}$ значений функционалов.

В [19] рассмотрена задача о сложности ε-задания в метрическом пространстве (X, ρ). Если F — фиксированное подмножество пространства X, то сложность ε-задания элемента $x \in F$ определяется как минимальный объем дополнительной информации, необходимой для эффективного построения для каждого $x \in F$ элемента $y_x \in X$ такого, что $\rho(x, y_x) \leq \varepsilon$. Тип дополнительной информации определяется выбором информационного оператора.

В работе [20], в частности, рассматривается задача сложности ε-задания значения Ax непрерывного оператора A на элементе x по значению информационного оператора на элементе x.

Рассмотрены конкретные примеры.

4. Информативность функционалов. В работе [12] Н. П. Корнейчук вводит понятие информативности функционала μ относительно множества $\mathcal{M}$ в метрическом пространстве (X, ρ) как величину уменьшения области неопределенности элемента $x \in \mathcal{M}$ за счет информации $\mu(x)$. Доказано, что в случае $X = C[a, b]$ и $\mathcal{M} = KH_0^1$ для любого линейного функционала μ на пространстве $C[a, b]$ существует функционал μ' вида $\mu(x) = x(\tau)$, $\tau \in [a, b]$, с не меньшей информативностью. В [15] приведен аналогичный факт для набора функционалов.

Эти результаты открывают, на наш взгляд, целое направление исследований, связанное с построением наилучших информационных операторов в различных задачах оптимального восстановления.

5. Классические задачи аппроксимации. Еще в начале 60-х годов Н. П. Корнейчуком был получен следующий замечательный результат: для любого выпуклого вверх модуля непрерывности $\omega(t)$

$$\sup_{f \in H^{\omega}} E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_{\infty} = \frac{1}{2}\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{1}$$

(здесь и далее $E(f, \mathcal{N})_p$ — наилучшее приближение функции f множеством $\mathcal{N}$ в метрике пространства L_p и $\mathcal{T}_{2n-1}$ — множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше $n-1$).

При доказательстве этого результата Н. П. Корнейчук, по-видимому, впервые применил метод промежуточного приближения для точного решения экстремальных задач теории аппроксимации. Сначала им были получены оценки приближения класса H^{ω} классом KH^1 при всех $K>0$, что вместе с неравенством

$$E(f, \mathcal{T}_{2n-1})_{\infty} \le E(f, KH^1)_{\infty} + \sup_{g \in KH^1} E(g, \mathcal{T}_{2n-1})_{\infty}$$

и результатом Фавара, дающим точное значение второго слагаемого в правой части, и позволило получить соотношение (1).

В связи с развитием метода промежуточного приближения задача приближения класса классом приобрела в дальнейшем самостоятельное значение и исследовалась многими авторами. Некоторые из полученных в этом направлении результатов подытожены в [22].

Соотношение (1) дает оценку сверху колмогоровских поперечников классов H^{ω} в пространстве C (как было показано впоследствии, эта оценка является точной), однако описанный метод получения соотношения (1) является существенно нелинейным. В дальнейшем Н. П. Корнейчук показал, что с помощью линейного метода приближения соотношение (1) (при $\omega(t) \ne Kt$) получить нельзя; это вызвало интерес к задачам наилучшего линейного приближения, вычисления линейных поперечников λ_N и λ^N (см., например, [3] (гл. 8)) классов H^{ω}. Точные значения этих линейных поперечников даже для классов $H^{\alpha}[0,1]$, $\alpha \in (0,1)$, в метрике C до сих пор неизвестны. Существовала гипотеза, что поперечники λ^N реализуют функционалы

$$\mu_k(f) = N \int_{k/N}^{(k+1)/N} f(t)\,dt, \qquad k = 0, \ldots, N-1,$$

среднего значения. В работе [18] Н. П. Корнейчук построил функционалы, которые относительно класса H^{α}, $\alpha \in (0,1)$, имеют бóльшую информативность, чем функционалы среднего значения, что опровергает упомянутую гипотезу.

В [21] рассмотрена задача наилучшего приближения в метриках C и L_p заданной на N-мерном кубе непрерывной функции f ступенчатыми функциями. Получены точные оценки погрешности через модуль непрерывности как самой функции f, так и ее специальной перестановки.

Наконец, в статье [24] Н. П. Корнейчук предлагает новый подход к решению задачи о наилучшем приближении классов периодических функций n переменных, которые задаются ограничениями на модуль непрерывности некоторых частных производных. Этот подход базируется на теореме двойственности и на представлении функций n переменных в виде счетной суммы простых функций, а также существенно использует новое, введенное в [24], определение модуля непрерывности, соответствующего суммируемой функции n переменных.

6. Экстремальные свойства сплайнов. Пусть $S_{2n,r}$ — множество всех 2π-периодических полиномиальных сплайнов порядка r, минимального дефекта, с узлами в точках $k\pi/n$, $k \in Z$, $s_{2n,r}(f,t)$ — сплайн из $S_{2n,r}$, интерполирующий функцию f в нулях эйлерова совершенного сплайна $\varphi_{n,r+1}$.

Известно, что для классов W_{∞}^{r+1} 2π-периодических функций справедливы соотношения

$$\sup_{f \in W_{\infty}^{r+1}} E(f, S_{2n,r})_p = \sup_{f \in W_{\infty}^{r+1}} \|f - s_{2n,r}(f)\|_p = \|\varphi_{n,r+1}\|_p, \qquad 1 \le p \le \infty.$$

При $p=\infty$ этот результат был получен В. М. Тихомировым, а при $1 \le p < \infty$ — А. А. Женсыкбаевым. Впоследствии Н. П. Корнейчук доказал, что

$$\sup_{f \in W_\infty^{r+1}} E(f', S_{2n,r-1})_p = \sup_{f \in W_\infty^{r+1}} \| f' - s'_{2n,r}(f) \|_p = \| \varphi_{n,r} \|_p, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Доказательство оказалось очень сложным и было опубликовано только для $r = 2, 3$. В работах [4, 5] приведено новое доказательство этого (а также более сильного) факта при всех $r \in N$.

В монографиях [9, 17] дано систематическое изложение классических и новых результатов, связанных с исследованием экстремальных свойств алгебраических и тригонометрических полиномов, сплайнов минимального дефекта (и их обобщений), совершенных сплайнов и моносплайнов. Доказательства многих из приведенных в этих монографиях результатов получены с помощью методов сравнения перестановок и Σ-перестановок, разработанных Н. П. Корнейчуком и его учениками.

В работе [22] приведены точные оценки типа Бернштейна для величин

$$\sup_{f \in H^\omega} \int_0^{2\pi} f(t) g(t)\, dt,$$

где $g(t)$ — производная тригонометрического полинома или полиномиального сплайна с равноотстоящими узлами.

Работы Н. П. Корнейчука, опубликованные в 1990 – 1999 годах

1. *Теория* приближения и проблемы оптимизации // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 5. – С. 579–595.
2. *Sobre* nuovas resultados referentes a las problemas extremales de la teoria cuadratura. Complemento // Formulas de cuadratura / S. Nikolski. – M.: Mir, 1990. – P. 146–292.
3. *Exact* constants in approximation theory. Ser. Encyclopedia Math. and Appl. – Cambridge Univ. Press, 1991. – **38**. – 452 p.
4. *О получении* точных оценок для производной погрешности сплайн-интерполирования // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 206–210.
5. *О поведении* производных погрешности сплайн-интерполирования // Там же. – № 1. – С. 67–72.
6. *О некоторых* задачах кодирования и восстановления функций // Там же. – № 4. – С. 514–524.
7. *Optimal* coding of functions // Optimal recovery. – New York: Nova Sci. Publ., 1992. – P. 59–98.
8. *Encording* and recovery of operator values // J. Complexity. – 1992. – **8**. – P. 79–91.
9. *Экстремальные* свойства полиномов и сплайнов. – Киев: Наук. думка, 1992. – 304 с. (совместно с В. Ф. Бабенко и А. А. Лигуном).
10. *О пассивных* и активных алгоритмах восстановления функций // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 257–264.
11. *Оптимизация* адаптивных алгоритмов восстановления монотонных функций класса H^ω // Там же. – № 12. – С. 1627–1634.
12. *Информативность* функционалов // Там же. – 1994. – **46**, № 9. – С. 1156–1163.
13. *Об оптимальном* восстановлении значений операторов // Там же. – № 10. – С. 1375–1381.
14. *Optimization* of active algorithms for recovery of monotonic functions from Hölder class // J. Complexity. – 1994. – **10**. – P. 265–269.
15. *О сравнении* информативности функционалов // Допов. НАН України. Мат. аналіз. – 1995. – № 2. – С. 15–16.
16. *Информационные* поперечники // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 11. – С. 1506–1518.
17. *Extremal* properties of polynomials and splines. – New York: Nova Sci. Publ., 1996. – 433 p. (совместно с А. А. Лигуном и В. Ф. Бабенко).
18. *О линейных* поперечниках классов H^ω // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 9. – С. 1255–1264.
19. *Сложность* аппроксимационных задач // Там же. – № 12. – С. 1683–1694.
20. *On complexity* of approximation problems // E. J. Approxim. – 1997. – **3**, № 3. – P. 251–273.
21. *Перестановки* и кусочно-полиномиальное приближение непрерывных функций n переменных // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 7. – С. 907–918.
22. *Неравенства* для верхних граней функционалов и некоторые их применения в теории аппроксимации // Допов. НАН України. Математика. – 1999. – № 1. – С. 24–29 (совместно с В. Ф. Бабенко, С. А. Пичуговым и В. А. Кофановым).
23. *Информационные* аспекты в теории приближения и восстановление операторов // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 3. – С. 314–327.
24. *О наилучшем* приближении функций n переменных // Там же. – № 10. – С. 1352–1359.

Получено 27.09.99