УДК 517.5

В. Ф. Бабенко*, **М. Е. Горбенко** (Днепропетр. ун-т)

О ЕДИНСТВЕННОСТИ ЭЛЕМЕНТА НАИЛУЧШЕГО L_1-ПРИБЛИЖЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Problems of uniqueness of element of the best L_1-approximation for continuous functions with values in a Banach space are studied. Two theorems are proved which characterize uniqueness subspaces by means of some sets of test functions.

Вивчаються питання єдиності елемента найкращого L_1-наближення неперервних функцій зі значеннями у банаховому просторі. Доведено дві теореми, які характеризують підпростори єдиності за допомогою деяких множин тестових функцій.

Пусть X — строго нормированное пространство с нормой $\|\cdot\|_X$. Через $C(I,X)$ обозначим пространство непрерывных функций $f\colon I\to X$ $(I=[a,b])$ с нормой

$$\|f\| = \int_I \|f(t)\|_X\,dt.$$

Вместо $C(I,R)$ будем писать $C[a,b]$.

Для заданных $f\in C(I,X)$ и $H\subset C(I,X)$ величину

$$E(f,H) = \inf\{\|f-g\|\colon g\in H\} \tag{1}$$

будем называть наилучшим L_1-приближением функции f элементами множества H, а функцию из H, реализующую нижнюю грань в правой части (1), — элементом наилучшего L_1-приближения функции f множеством H. Множество элементов наилучшего приближения функции f в H будем обозначать через $P_H(f)$, а множество нулей функции f — через Z_f.

Как обычно, через $\omega(u,t)$ обозначим модуль непрерывности функции $u\in C[a,b]$. Пусть еще $E(x,M) = \inf\{|x-y|\colon y\in M\}$ — расстояние между точкой $x\in I$ и непустым множеством $M\subset I$.

Вопросы единственности элемента наилучшего L_1-приближения непрерывных функций изучались многими авторами. Изложение многих результатов по этой проблематике и подробную библиографию можно найти в [1]. Цель данной статьи — распространить некоторые результаты работ [2, 3] на случай аппроксимации функций из $C(I,X)$.

Для $f,g\in X$ $(g\neq 0)$ положим

$$\tau_-(f,g) = \lim_{s\to 0-}\frac{\|f+sg\|_X-\|f\|_X}{s}.$$

Нам понадобится следующий критерий [4] элемента наилучшего приближения, который является обобщением хорошо известного (см., например, [1], теорема 2.1) критерия элемента наилучшего приближения вещественнозначных функций.

Теорема 1. *Пусть H — подпространство пространства $C(I,X)$. Элемент $p\in H$ является элементом наилучшего L_1-приближения функции $f\in C(I,X)$ в H тогда и только тогда, когда*

$$\int_{I\setminus Z_{f-p}} \tau_-((f-p)(t),g(t))\,dt \le \int_{Z_{f-p}} \|g(t)\|_X\,dt \qquad \forall\, g\in H.$$

* Частично поддержан МНОП (грант № QSU081007).

Следующая теорема обобщает теорему Штрауса из работы [2] на случай функций из $C(I,X)$.

Пусть H — подпространство пространства $C(I,X)$. Положим

$$H' = \{h \in C(I,X)\colon\ \exists\, g_h \in H \quad \forall\, t \in I \quad h(t) = \pm g_h(t)\}.$$

Теорема 2. *Каждая функция $f \in C(I,X)$ имеет не более одного элемента наилучшего приближения в H тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in H'$ имеет не более одного элемента наилучшего приближения в H.*

Для доказательства теоремы нам понадобится следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть $h \in H'\setminus\{0\}$, $0 \in P_H(h)$ и g_h — функция из H такая, что $h(t) = \pm g_h(t)$ для любого $t \in I$. Тогда $g_h \in P_H(h)$.*

Доказательство. Ясно, что $Z_h \subset Z_{h-g_h}$ и для каждого $t \in I\setminus Z_{h-g_h}$ $h(t) - g_h(t) = 2h(t)$. Используя тот факт, что $\tau_-(\alpha h, g) = \tau_-(h, g)$ для любого $\alpha > 0$, условие $0 \in P_H(h)$ и теорему 1, получаем

$$\int\limits_{I\setminus Z_{h-g_h}} \tau_-((h-g_h)(t), g(t))\,dt = \int\limits_{I\setminus Z_{h-g_h}} \tau_-(2h(t), g(t))\,dt =$$

$$= \int\limits_{I\setminus Z_h} \tau_-(h(t), g(t))\,dt - \int\limits_{Z_{h-g_h}\setminus Z_h} \tau_-(h(t), g(t))\,dt \le$$

$$\le \int\limits_{Z_h} \|g(t)\|_X\,dt + \int\limits_{Z_{h-g_h}\setminus Z_h} \|g(t)\|_X\,dt = \int\limits_{Z_{h-g_h}} \|g(t)\|_X\,dt \qquad \forall\, g \in H.$$

Согласно теореме 1 $g_h \in P_H(h)$, и лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Пусть каждая функция $h \in H'$ имеет не более одного элемента наилучшего приближения в H, но существует функция $f \in C(I,X)$ такая, что $p_1 \in P_H(f)$ и $p_2 \in P_H(f)$, $p_1 \not\equiv p_2$. Тогда $\dfrac{p_1+p_2}{2} \in P_H(f)$ и

$$\left\|\left(f - \frac{p_1+p_2}{2}\right)(t)\right\|_X = \frac{1}{2}\|(f-p_1)(t)\|_X + \frac{1}{2}\|(f-p_2)(t)\|_X, \qquad t \in I \tag{2}$$

(предполагая противное, нетрудно установить противоречивое неравенство $E(f,H) < E(f,H)$).

Так как пространство X строго нормированно, то равенство (2) возможно тогда и только тогда, когда для каждого $t \in I$ либо одна из величин $(f-p_1)(t)$ и $(f-p_2)(t)$ равна нулю, либо $(f-p_1)(t) = c(t)(f-p_2)(t)$, где $c(t) > 0$. При этом $c(t) \ne 1$, если $p_1(t) \ne p_2(t)$. В последнем случае, положив

$$f_0(t) = f(t) - \frac{(p_1+p_2)(t)}{2},$$

нетрудно убедиться в том, что

$$\forall\, t \in I\setminus Z_{p_1-p_2} \qquad f_0(t) = \gamma(t)(p_1-p_2)(t), \tag{3}$$

где

$$\gamma(t) = \begin{cases} \dfrac{1+c(t)}{2(1-c(t))}, & \text{если } (f-p_1)(t)\,(f-p_2)(t) > 0; \\[2ex] \pm\dfrac{1}{2}, & \text{если } (f-p_1)(t)\,(f-p_2)(t) = 0. \end{cases}$$

Введем функцию

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn} \gamma(t)\,(p_1 - p_2)(t), & t \in I \setminus Z_{p_1 - p_2}; \\ 0, & t \in Z_{p_1 - p_2}. \end{cases}$$

В силу равенства (2) $Z_{f_0} \subset Z_{p_1 - p_2}$. Поэтому $h \in C(I, X)$ и, более того, $h \in H'$, причем $g_h = p_1 - p_2$, $h \not\equiv 0$.

Используя теорему 1, получаем

$$\int\limits_{I \setminus Z_h} \tau_-(h(t), g(t))\, dt = \int\limits_{I \setminus Z_h} \tau_-(\operatorname{sgn} \gamma(t)(p_1 - p_2)(t), g(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{I \setminus Z_h} \tau_-(f_0(t), g(t))\, dt =$$

$$= \int\limits_{I \setminus Z_{f_0}} \tau_-(f_0(t), g(t))\, dt - \int\limits_{Z_h \setminus Z_{f_0}} \tau_-(f_0(t), g(t))\, dt \le$$

$$\le \int\limits_{Z_{f_0}} \|g(t)\|_X\, dt + \int\limits_{Z_h \setminus Z_{f_0}} \|g(t)\|_X\, dt = \int\limits_{Z_h} \|g(t)\|_X\, dt \qquad \forall\, g \in H.$$

Следовательно, $0 \in P_H(h)$, и согласно лемме 1 $p_1 - p_2 \in P_H(h)$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Для конечномерных подпространств пространства $C(I, X)$, которые, как известно, являются множествами существования элемента наилучшего приближения, аналогичный результат был получен в [5]. Мы не предполагаем конечномерности аппроксимирующих подпространств. В частности, в качестве аппроксимирующих подпространств мы можем рассматривать подпространства следующего вида. Пусть $\{u_i(t)\}_{i=1}^n$ — система линейно независимых функций из $C[a, b]$. Положим

$$H_n = \left\{ p(t) = \sum_{i=1}^n a_i u_i(t): \quad a_i \in X, \quad i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Заметим, что H_n является подпространством слабой размерности n. Понятие слабой размерности было введено в [6].

Теорема 3. *Пусть X — сепарабельное банахово пространство. Тогда подпространство H_n пространства $C(I, X)$ является множеством существования элемента наилучшего приближения.*

Доказательство. Пусть $g \in C(I, X) \setminus H_n$. Для любого $j \in N$ существует $p_j(t) = \sum_{i=1}^n a_i^{(j)} u_i(t)$ из H_n, для которого

$$E(g, H_n) = \| g - p_j \| < E(g, H_n) + \frac{1}{j}. \tag{4}$$

Последовательность $\{p_j\}_{j=1}^\infty$, очевидно, ограничена в $C(I, X)$, т. е.

$$\exists\, C \in R: \quad \int\limits_I \|p_j(t)\|_X\, dt \le C.$$

Поэтому для любого функционала $G \in X^*$ с нормой $\| G \|_{X^*} = 1$ будет

$$\int\limits_I \left| \sum_{i=1}^n \langle G, a_i^{(j)} \rangle\, u_i(t) \right| dt = \int\limits_I |\langle G, p_j(t) \rangle|\, dt \le C.$$

Значит,

$$\exists\, C_1 \in R_+: \quad \forall\, j \in N \quad \max_{i = 1, 2, \ldots, n} |\langle G, a_i^{(j)} \rangle| \le C_1.$$

В силу теоремы Банаха – Штейнгауза существует $C_2 \in R_+$ такое, что $\|a_i^{(j)}\|_X \le \le C_2$ для всех $i = 1, \ldots, n$; $j \in N$. Так как X — сепарабельно, то последовательности $\{a_i^{(j)}\}_{j=1}^{\infty}$, $i = 1, \ldots, n$, слабо компактны. Отсюда следует, что найдется последовательность $j_k \in N$, $j_k \to \infty$ при $k \to \infty$, такая, что при любом $i = 1, \ldots, n$ последовательность $\{a_i^{(j_k)}\}_{j=1}^{\infty}$ слабо сходится к элементу $a_i^{(0)}$ из X. Таким образом, существует последовательность элементов $p_{j_k}(t) = = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(j_k)} u_i(t)$, которая для каждого $t \in I$ слабо сходится к элементу $p_0(t) = = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(0)} u_i(t)$ из H_n при $k \to \infty$. Тогда (см., например, [7, с. 217])

$$\forall\, t \in I \qquad \varliminf_{k \to \infty} \|g(t) - p_{j_k}(t)\|_X \ge \|g(t) - p_0(t)\|_X,$$

причем нижний предел существует и конечен. С помощью теоремы Б. Леви о предельном переходе под знаком интеграла устанавливаем, что

$$\varliminf_{k \to \infty} \|g - p_{j_k}\| = \varliminf_{k \to \infty} \int_I \|g(t) - p_{j_k}(t)\|_X\, dt \ge$$

$$\ge \int_I \varliminf_{k \to \infty} \|g(t) - p_{j_k}(t)\|_X\, dt \ge \int_I \|g(t) - p_0(t)\|_X\, dt = \|g - p_0\|.$$

Далее, учитывая (4), получаем

$$\|g - p_0\| \le \varliminf_{k \to \infty} \|g - p_{j_k}\| \le E(g, H_n).$$

Значит, $p_0 \in P_{H_n}(g)$. Теорема доказана.

Теперь теорему 2 для подпространства H_n можно сформулировать в следующем виде.

Теорема 4. *Каждая функция $f \in C(I, X)$, где X — строго нормированное сепарабельное банахово пространство, имеет единственный элемент наилучшего приближения в H_n тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in H'$ имеет единственный элемент наилучшего приближения в H_n.*

Следующая теорема является обобщением теоремы 2 из [3] на случай аппроксимации функций из $C(I, X)$ элементами подпространства H_n.

Пусть X — строго нормированное сепарабельное банахово пространство. Для $g \in C(I, X)$ положим

$$\overline{g}(t) = \begin{cases} \dfrac{g(t)}{\|g(t)\|_X}, & t \in I \setminus Z_g; \\ 0, & t \in Z_g. \end{cases}$$

Пусть также $\omega(t) = \max\limits_{i=1,\ldots,n} \omega(u_i, t)$, и

$$H'' = \{h \in C(I, X) \colon\ \exists\, p_h \in H_n \quad \forall\, t \in I \quad h(t) = \pm \overline{p}_h(t)\, \omega(E(t, Z_{p_h}))\}.$$

Теорема 5. *Каждая функция $f \in C(I, X)$ имеет единственный элемент наилучшего приближения в H_n тогда и только тогда, когда каждая функция $h \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего приближения в H_n.*

Доказательство. *Необходимость* очевидна. Докажем *достаточность*. Пусть каждая функция $h \in H''$ имеет единственный элемент наилучшего приближения в H_n, но существует $f \in C(I, X)$, для которого $P_{H_n}(f)$ содержит два различных элемента $p_1(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i^1 u_i(t)$ и $p_2(t) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 u_i(t)$. Тогда

$\dfrac{p_1+p_2}{2} \in P_{H_n}(f)$ и выполняется равенство (2). Поэтому, в силу строгой нормированности X, для каждого $t \in I$ либо одна из величин $(f-p_1)(t)$ и $(f-p_2)(t)$ равна нулю, либо $(f-p_1)(t) = c(t)(f-p_2)(t)$, где $c(t) > 0$.

Как и при доказательстве теоремы 2, полагая

$$f_0(t) = f(t) - \frac{(p_1+p_2)(t)}{2},$$

получаем $f_0(t) = \gamma(t)(p_1-p_2)(t)$ для таких t, что $p_1(t) \neq p_2(t)$.

Положим

$$h(t) = \begin{cases} \operatorname{sgn}\gamma(t)\left(\overline{p_1-p_2}\right)(t)\,\omega\left(E(t, Z_{p_1-p_2})\right), & t \in I \setminus Z_{p_1-p_2}; \\ 0, & t \in Z_{p_1-p_2}. \end{cases}$$

Так как $Z_{f_0} \subset Z_{p_1-p_2}$, получаем, что $h \in H''$, причем $p_h = p_1 - p_2$. Поскольку модуль непрерывности не убывает, непрерывен и $Z_{\omega(E(t, Z_{p_1-p_2}))} \subset Z_{p_1-p_2}$, то

$$\|(p_1-p_2)(t)\|_X \leq \omega\left(E(t, Z_{p_1-p_2})\right) \sum_{i=1}^{n} \|a_i^1 - a_i^2\|_X.$$

Следовательно, при всех достаточно малых $\delta > 0$ и всех $t \in I \setminus Z_{p_1-p_2}$

$$h(t) - \delta(p_1-p_2)(t) = \mu(t)h(t) = \mu_1(t)f_0(t),$$

где $\mu(t) > 0$ и $\mu_1(t) > 0$.

Используя теорему 1, получаем

$$\int\limits_{I \setminus Z_{p_1-p_2}} \tau_-\left(h(t) - \delta(p_1-p_2)(t), p(t)\right) dt = \int\limits_{I \setminus Z_{p_1-p_2}} \tau_-\left(f_0(t), p(t)\right) dt =$$

$$= \int\limits_{I \setminus Z_{f_0}} \tau_-\left(f_0(t), p(t)\right) dt - \int\limits_{Z_{p_1-p_2} \setminus Z_{f_0}} \tau_-\left(f_0(t), p(t)\right) dt \leq$$

$$\leq \int\limits_{Z_{f_0}} \|p(t)\|_X\, dt + \int\limits_{Z_{p_1-p_2} \setminus Z_{f_0}} \|p(t)\|_X\, dt = \int\limits_{Z_{p_1-p_2}} \|p(t)\|_X\, dt \qquad \forall\, p \in H_n.$$

В силу теоремы 1 получаем, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ $\delta(p_1-p_2) \in P_{H_n}(h)$, что противоречит предположению.

Теорема доказана.

1. *Pinkus A.* L_1-approximation // Cambridge Tracts in Math. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. – 239 p.
2. *Strauβ H.* Eindeutigkeit in der L_1-Approximation // Math. Z. – 1981. – S. 63–74.
3. *Бабенко В. Ф., Глушко В. Н.* О единственности элемента наилучшего приближения в метрике пространства L_1 // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 5. – С. 475–483.
4. *Rosema E.* Almost Chebyshev subspaces of $L_1(\mu, E)$ // Pacif. J. Math. – 1974. – **53**. – P. 585–604.
5. *Kroo A.* A general approach to the study of Chebyshev subspaces in L_1-approximation of continuous functions // J. Approxim. Theory. – 1987. – **51**. – P. 98–111.
6. *Бабенко В. Ф., Пичугов С. А.* Аппроксимация непрерывных вектор-функций // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 11. – С. 1435–1448.
7. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. – М.: Наука, 1965. – 519 с.

Получено 04.10.99