УДК 519.21

В. А. Кузнецов (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ КОНЦЕВИЧА ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ ТРАЕКТОРИЙ

In view of the investigation of the topological properties of stochastic flows, we encounter the problem of description of braids formed by several trajectories of the flow starting from different points. A complete system of invariants for braids is well known. This system is known as the system of Vasil'ev invariants and distinguishes braids up to a homotopy. We consider braids formed by trajectories $Z_k(t) = X_k(t) + iY_k(t)$ such that $X_k,\ Y_k,\ 1 \leq k \leq n$, are continuous semimartingales with respect to a common filtration. For these braids, we establish a representation of the indicated invariants in the form of iterated Stratonovich integrals.

У зв'язку з вивченням топологічних властивостей стохастичних потоків виникає задача опису коси, що утворена деякими траєкторіями потоку, які виходять із різних початкових точок. Для кіс є відомою система інваріантів, що розрізняє їх із точністю до гомотопії, — система інваріантів Васильєва. У даній статті розглядаються коси, утворені траєкторіями $Z_k(t) = X_k(t) + iY_k(t)$ такими, що $X_k, Y_k, 1 \leq k \leq n$, — неперервні семімартингали відносно спільної фільтрації. Для цих кіс доведено теорему про подання вказаних інваріантів у вигляді повторних інтегралів Стратоновича.

1. Введение. Изучение стохастических потоков имеет важные приложения в теории турбулентного движения жидкости [1]. В связи с задачами магнитной гидродинамики в работе [2] изучается завихренность (инвариант Хопфа) векторного поля, которая оказывается связанной с числом зацепления траекторий фазового потока этого поля, исходящих из различных точек. Эта связь позволяет оценить магнитную энергию потока через топологическую структуру магнитного поля. Таким образом, изучение геометрических свойств фазовых потоков векторных полей, в частности совместного поведения траекторий, исходящих из различных точек, позволяет делать заключения о свойствах соответствующей физической системы. В связи с изучением поведения солнечных вспышек, перемещающихся по поверхности Солнца случайным образом, возникла задача об изучении асимптотического распределения взаимных углов обхода траекторий нескольких независимых двумерных броуновских движений [3], решенная в статье [4]. Эти углы являются примерами инвариантов, характеризующих топологические свойства косы, образованной траекториями нескольких независимых броуновских движений на плоскости (в качестве третьей координаты используется время). В статье [6] предлагается использовать инварианты кос, образованных траекториями двумерного потока жидкости, для оценки его топологической энтропии. В связи с этими исследованиями представляет интерес изучение других гомотопических инвариантов кос из траекторий независимых броуновских движений, или, более общо, из траекторий комплексных семимартингалов. В настоящей статье рассматриваются инварианты Васильева для кос, образованные траекториями $Z_k(t) = X_k(t) + iY_k(t)$ такими, что $X_k,\ Y_k,\ 1 \leq k \leq n$, — непрерывные семимартингалы относительно общей фильтрации. Известно, что инварианты Васильева для гладких кос выражаются через интегральные инварианты Концевича (см. определение 7). Однако инварианты Васильева можно определить не только для гладких, но и для произвольных непрерывных кос, в частности для рассматриваемых нами кос, образованных траекториями непрерывных семимартингалов. Отсюда возникает вопрос о нахождении интегрального представления для инвариантов Васильева в этом случае. Мы доказываем теорему о представлении указанных инвариантов в виде повторных интегралов Стратоновича. В пункте 2 излагаются необходимые предварительные сведения о косах, инвариантах Васильева и интеграле Концевича для кос. В пункте 3 приводятся формулировка и доказательство основной теоремы о представлении инвариантов Васильева в виде интегралов Стратоновича (теорема 2).

2. Предварительные сведения.

Определение 1. *Конфигурационным пространством n точек комплексной плоскости называется топологическое пространство*

$$C_{0,n} = \{(z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n : z_i \neq z_j,\ i \neq j\}$$

с топологией, индуцированной из $\mathbb{C}^n$.

Определение 2. *Косой из n нитей называется непрерывная кривая*

$$Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t)), \qquad Z_i(t) \in \mathbb{C}, \quad t \in [0, T],$$

в конфигурационном пространстве $C_{0,n}$, т. е. непрерывное отображение из отрезка $[0, T]$ в пространство $C_{0,n}$. Траектории $Z_i(t), t \in [0, T]$, называются нитями косы.

Таким образом, нити косы не пересекаются, т. е. для произвольных $i \neq j$ $\forall t \in [0, T]$: $Z_i(t) \neq Z_j(t)$.

Определение 3. *Коса $Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t))$, $Z_i(t) \in \mathbb{C}$, $t \in [0, T]$, называется гладкой (кусочно-гладкой), если все $Z_i()$ — гладкие (кусочно-гладкие) функции времени t.*

Косы различаются с точностью до гомотопии, сохраняющей начальные и конечные точки. Для гладких кос известна система инвариантов Васильева, являющаяся полной в том смысле, что две косы являются гомотопными тогда и только тогда, когда все инварианты Васильева для них совпадают [7]. Для инвариантов Васильева существует интегральное представление, данное М. Л. Концевичем [8]. Приведем его описание, следуя статье [9].

Обозначим через $\mathbb{P}_{mn}$ набор всех возможных матриц

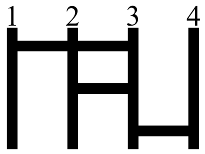
$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \cdots & \cdots \\ P_{m1} & P_{m2} \end{pmatrix}$$

размера $m \times 2$, где $P_{i1},\ P_{i2} \in \{1, \ldots, n\}$, $P_{i1} < P_{i2}$, $i = 1, \ldots, m$; очевидно, $|\mathbb{P}_{mn}| = (n(n-1)/2)^m$. Здесь n совпадает с количеством нитей рассматриваемой нами косы. Поставим в соответствие каждой матрице $P \in \mathbb{P}_{mn}$ некоторый объект $D(P)$ — „диаграмму”. Диаграмма $D(P)$, соответствующая матрице $P \in \mathbb{P}_{mn}$, состоит из n вертикальных отрезков, соответствующих струнам косы, и соединяющих их m горизонтальных отрезков, представляющих строки матрицы P. Горизонтальный отрезок, представляющий i-ю строку $(P_{i1}P_{i2})$, соединяет вертикальные отрезки с номерами P_{i1} и P_{i2}. При $i < j$ отрезок, соответствующий i-й строке, находится выше отрезка, соответствующего j-й строке.

***Пример* 1.** Пусть $n = 4$ (коса из 4 струн), $m = 3$ и матрица $P \in \mathbb{P}_{34}$ такова:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда диаграмма $D(P)$ имеет вид



Натянем на эти диаграммы $D(P)$ векторное пространство, которое будем называть пространством диаграмм порядка m, и отфакторизуем его по следующим соотношениям:

Одночленное соотношение. Пусть матрицы $P, P' \in \mathbb{P}_{mn}$ таковы:

$$P = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ i \quad j \\ k \quad l \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix}, \qquad P' = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ k \quad l \\ i \quad j \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix},$$

где i, j, k, l соответствуют четырем попарно различным нитям. Тогда $D(P) = D(P')$.

Четырехчленное соотношение. Пусть матрицы P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, $P_6 \in \mathbb{P}_{mn}$ таковы:

$$P_1 = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ i \quad j \\ j \quad k \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix}, \qquad P_2 = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ j \quad k \\ i \quad k \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix}, \qquad P_3 = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ i \quad k \\ i \quad j \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ j \quad k \\ i \quad j \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix}, \qquad P_5 = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ i \quad k \\ j \quad k \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix}, \qquad P_6 = \begin{pmatrix} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ i \quad j \\ i \quad k \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \end{pmatrix},$$

где i, j, k соответствуют трем попарно различным нитям. Тогда

$$D(P_1) - D(P_4) = D(P_2) - D(P_5) = D(P_3) - D(P_6).$$

Точнее говоря, введем следующее определение.

Определение 4. *Пусть V — комплексное векторное пространство размерности $(n(n-1)/2)^m$ с базисом $\{D(P),\ P \in \mathbb{P}_{mn}\}$, т. е. пространство формальных конечных линейных комбинаций диаграмм $D(P)$, $P \in \mathbb{P}_{mn}$, с коэффициентами из $\mathbb{C}$. Рассмотрим в нем подпространство $U \subset V$, являющееся линейной оболочкой векторов вида $D(P) - D(P')$, $D(P_1) - D(P_4) - D(P_2) + D(P_5)$, $D(P_1) - D(P_4) - D(P_3) + D(P_6)$ для всевозможных матриц P, P', P_1, P_2, P_3, P_4 такого вида, как указано выше в определении одно- и четырехчленного соотношений. Тогда пространством диаграмм порядка m будем называть фактор-пространство пространства V по подпространству U.*

Определение 5. *Каждая линейная функция на пространстве диаграмм порядка m называется системой весов порядка m.*

На диаграммах также можно определить произведение.

Определение 6. *Произведением диаграмм $D(P)$ и $D(P')$, где*

$$P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} \end{pmatrix}, \qquad P' = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \\ \dots & \dots \\ Q_{l1} & Q_{l2} \end{pmatrix},$$

называется диаграмма $D(P'')$, где

$$P'' = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \\ \dots & \dots \\ P_{m1} & P_{m2} \\ Q_{11} & Q_{12} \\ Q_{21} & Q_{22} \\ \dots & \dots \\ Q_{l1} & Q_{l2} \end{pmatrix}.$$

Мы будем писать $D(P'') = D(P) \times D(P')$.

Теперь мы можем дать определение интегралов Концевича.

Определение 7. *Интегралом Концевича порядка m для кусочно-гладкой косы $Z(t) = (Z_1(t), \dots, Z_n(t))$ называется следующий элемент пространства диаграмм порядка m :*

$$K_m = \sum_{P \in \mathbb{P}_{mn}} \int\limits_{\Delta_m} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \dots \omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m) D(P),$$

где

$$\Delta_m = \Delta_m(T) = \big\{(t_1, \dots, t_m) \mid 0 \le t_1 \le \dots \le t_m \le T\big\},$$

$$\omega_{kl}(t) = \omega_{lk}(t) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dZ_k(t) - dZ_l(t)}{Z_k(t) - Z_l(t)}.$$

Интегральные инварианты Концевича порядка m получаются из интегралов K_m и линейных функций на пространстве диаграмм порядка m с помощью замены диаграмм на соответствующие веса (*таким образом, каждой системе весов соответствует свой интегральный инвариант*).

***Пример* 2.** Инварианты Концевича первого порядка — это всевозможные линейные комбинации величин

$$\lambda_{kl}(T) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_0^T \frac{dZ_k(t') - dZ_l(t')}{Z_k(t') - Z_l(t')} = \frac{1}{2\pi i} \ln \frac{R_{kl}(T)}{R_{kl}(0)} + i(\Phi_{kl}(T) - \Phi_{kl}(0)),$$

где $R_{kl}(t) = |Z_k(t) - Z_l(t)|$, $\Phi_{kl}(t)$ — непрерывная по t версия аргумента комплексного числа $Z_k(t) - Z_l(t)$. Иначе говоря, $\Phi_{kl}(T) - \Phi_{kl}(0)$ представляет собой угол, который нить Z_k обходит вокруг нити Z_l к моменту T.

***Пример* 3.** Примером интегрального инварианта Концевича второго порядка является следующий инвариант для гладкой косы $(Z_1(t),\, Z_2(t),\, Z_3(t))$ из трех нитей:

$$\Psi_{123} = \frac{1}{2}\int\limits_0^T (\lambda_{12}d\lambda_{13} - \lambda_{13}d\lambda_{12}) + \frac{1}{2}\int\limits_0^T (\lambda_{13}d\lambda_{23} - \lambda_{23}d\lambda_{13}) + \frac{1}{2}\int\limits_0^T (\lambda_{23}d\lambda_{12} - \lambda_{12}d\lambda_{23}),$$

где

$$\lambda_{kl}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^t \frac{dZ_k(t') - dZ_l(t')}{Z_k(t') - Z_l(t')}.$$

3. Основные результаты. Инварианты Концевича обычно определяются для гладких (или кусочно-гладких) кос. Однако, поскольку они являются гомотопическими инвариантами, их можно определить и для непрерывных кос, — как соответствующие инварианты гомотопных им гладких кос (рассматриваются гомотопии, сохраняющие начальные и конечные точки кос). Для так определенных инвариантов выполняется следующая теорема.

Теорема 1. *Любой интегральный инвариант Концевича для непрерывной косы является пределом соответствующих инвариантов для последовательности вписанных в эту косу ломаных при стремлении мелкости разбиения к* 0.

Доказательство. Пусть $Z(t) = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t)),\, t \in [0,T],$ — коса, т. е. непрерывный путь в пространстве $\mathbb{C}^n \setminus \{\exists i,j : z_i = z_j\}$. Достаточно показать, что при достаточно мелких разбиениях временного отрезка косы, образованные ломаными, построенными по этому разбиению, гомотопны косе $Z(t)$.

В данном доказательстве применяется следующая известная лемма [10, с. 179].

Лемма 1 (о лебеговом числе)**.** *Для любого открытого покрытия секвенциально компактного метрического пространства* X *существует такое* $\varepsilon > 0$, *что для любой точки* $x \in X$ *шар* $B_\varepsilon(x)$ *содержится в одном из множеств покрытия.*

Пусть U_α — покрытие $\mathbb{C}^n \setminus \{\exists i,j : z_i = z_j\}$ открытыми шарами. Тогда множества $\phi^{-1}(U_\alpha)$ образуют открытое покрытие $X = [0,T]$. Для этого покрытия выберем $\varepsilon > 0$ из леммы. Начиная с некоторой мелкости разбиения $|t_{i+1} - t_i| < \varepsilon$ для любого i и каждый отрезок разбиения $[t_i, t_{i+1}]$ отображается в фиксированное множество U_α. Тогда замена траектории $Z(t)$ на каждом отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ на отрезок с концами $Z(t_i), Z(t_{i+1})$ меняет траекторию на гомотопную ей. Точнее говоря, гомотопия осуществляется семейством кривых $Z_\mu(t)$, $\mu \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, где $Z_\mu(t) = (1-\mu)Z(t) + \mu\dfrac{(t-t_i)Z(t_{i+1}) + (t_{i+1}-t)Z(t_i)}{t_{i+1}-t_i}$ при $t \in [t_i, t_{i+1}]$. При $\mu = 0$ имеем исходную кривую, при $\mu = 1$ — ломаную с концами в точках $Z(t_i)$.

***Замечание* 1.** Из доказательства следует, что гомотопными будут не только вся коса и соответствующая ломаная, но и все косы, соответствующие интервалам времени $[0, t_i]$, т. е. косы

$$Z(t)|_{t\in[0,t_i]} = (Z_1(t), \ldots, Z_n(t)), \qquad t \in [0, t_i],$$

будут гомотопны соответствующим ломаным. Этот факт будет использоваться в дальнейших доказательствах.

Для любых двух непрерывных непересекающихся траекторий $Z_1(t)$, $Z_2(t)$, $t \in [0,T]$, определена функция $\lambda_{12}(t) = \dfrac{1}{2\pi}\phi_{12}(t) - \dfrac{i}{2\pi}\ln\dfrac{R_{12}(t)}{R_{12}(0)}$, где $R_{12}(t) = |Z_1(t) - Z_2(t)|$, а $\phi_{12}(t)$ — угол обхода до момента t траектории Z_2 вокруг траектории Z_1, т. е. угол обхода траектории $Z(t) = Z_2(t) - Z_1(t)$ вокруг нуля.

Предложение 1. *Пусть $Z_i(t)$, $t \in [0,T]$, $i = 0,\ldots,k$, — непрерывные семимартингалы относительно общей фильтрации (F_t), $t \in [0,T]$, такие, что с вероятностью* 1

$$Z_i(t) \neq Z_j(t) \qquad \forall t \in [0,T] \quad \forall i \neq j.$$

Тогда действительная и мнимая части λ_{ij}, т. е. $\frac{1}{2\pi}\phi_{ij}(t)$ (где $\phi_{ij}(t)$ — угол обхода i-й траектории вокруг j-й до момента времени t) и $-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R_{12}(t)}{R_{12}(0)}$, являются семимартингалами относительно фильтрации (F_t).

Доказательство. С помощью формулы Ито для интегралов Стратоновича получаем, что с вероятностью 1

$$\phi_{ij}(t) = \int\limits_0^t \frac{(X_i - X_j)\circ d(Y_i - Y_j) - (Y_i - Y_j)\circ d(X_i - X_j)}{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}(s),$$

$$\ln\frac{R_{12}(t)}{R_{12}(0)} = \int\limits_0^t \frac{(X_i - X_j)\circ d(X_i - X_j) + (Y_i - Y_j)\circ d(Y_i - Y_j)}{(X_i - X_j)^2 + (Y_i - Y_j)^2}(s),$$

где интегралы понимаются в смысле интегралов Стратоновича. Заметим, что интегралы Стратоновича непрерывных семимартингалов по непрерывным семимартингалам являются непрерывными семимартингалами [11, с. 58].

Теорема 2. *Для семимартингалов $Z_i(t)$, $t \in [0,T]$, $i = 0,\ldots,k$, относительно общей фильтрации (F_t), $t \in [0,T]$, таких, что с вероятностью* 1

$$Z_i(t) \neq Z_j(t) \qquad \forall t \in T \quad \forall i \neq j,$$

интегральные инварианты Концевича вычисляются как соответствующие кратные интегралы Стратоновича.

Доказательство этой теоремы опирается на следующие утверждения.

Утверждение 1. *Любой интегральный инвариант Концевича L_m порядка m для кусочно-гладкой косы $Z(t)$ представляется суммой вида $\sum_i \int_0^T L^i_{m-1}(t)d\lambda_i(t)$, где L^i_{m-1} — некоторые интегральные инварианты Концевича порядка $m-1$ для той же косы, $\lambda_i = \lambda_{kl}$ для некоторых $k \neq l$, функции λ_{kl} введены выше.*

Доказательство. Имеем

$$K_m = \sum_{P\in\mathbb{P}_{mn}} \int\limits_{\Delta_m} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1)\ldots\omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m)D(P) =$$

$$= \sum_{i\neq j}\sum_{P\in\mathbb{P}_{(m-1)n}} \int\limits_0^T \left\{ \int\limits_{\Delta_{m-1}(t_m)} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1)\ldots\omega_{P_{(m-1)1}P_{(m-1)2}}(t_{m-1}) \right\} \times$$

$$\times\omega_{P_{m1}P_{m2}}(t_m)D(P)\times D(P^{ij}).$$

Здесь $P^{ij} = \begin{pmatrix} i & j \end{pmatrix}$.

При фиксированной системе весов w, ставя в соответствие каждой диаграмме D число $w(D)$, получаем для соответствующего интегрального инварианта Концевича $L_m = w(K_m)$:

$$L_m = \sum_{i \neq j} \sum_{P \in \mathbb{P}_{(m-1)n}} \int_0^T \left\{ \int_{\Delta_{m-1}(t)} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \ldots \omega_{P_{(m-1)1}P_{(m-1)2}}(t_{m-1}) \right\} \omega_{ij}(t) w(D(P) \times D(P^{ij})).$$

Система весов $w'(D(P)) = w(D(P) \times D(P'))$ на диаграммах $P \in \mathbb{P}_{(m-1)n}$ корректно определена, поскольку выполнение для нее одно- и четырехчленного соотношений следует из выполнения соответствующих соотношений для весов $w(D(P) \times D(P'))$. Поэтому каждая сумма

$$\sum_{P \in \mathbb{P}_{(m-1)n}} \int_{\Delta_{m-1}(t_m)} \omega_{P_{11}P_{12}}(t_1) \ldots \omega_{P_{(m-1)1}P_{(m-1)2}}(t_{m-1}) w(D(P) \times D(P^{ij}))$$

является интегральным инвариантом Концевича (порядка $m-1$). Это и доказывает утверждение.

Рассмотрим косу Z, образованную непрерывными кривыми $Z_k(t)$, $t \in [0,T]$, $k = 0, \ldots, n$, и последовательность разбиений $\tau = \{0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p = T\}$ интервала $[0,T]$ с $|\tau| \to 0$. Пусть $L(t)$ — некоторый интегральный инвариант Концевича порядка m для косы $Z(s)$, $0 \le s \le t$, образованной кривыми $Z_k(s)$, $0 \le s \le t$, $\lambda = \lambda_{kl}$ для некоторых $k \neq l$. Рассмотрим вписанные в кривые Z_k ломаные Z_k^τ с вершинами $Z_k(t_0), \ldots, Z_k(t_p)$, и пусть Z_τ — коса, образованная этими ломаными. Обозначим через $L_\tau(t)$ значение исследуемого инварианта Концевича на косе $Z_\tau(s)$, $0 \le s \le t$, и пусть $\lambda_\tau(t)$ — соответствующая $\lambda(t)$ функция для этой ломаной. Тогда имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. *Если суммы* $\sum_{i=0}^{p-1} |Z_k(t_{i+1}) - Z_k(t_i)|^2$ *ограничены по* τ *и* k, *то имеет место сходимость*

$$\sum_{i=0}^{p-1} \frac{L(t_i) + L(t_{i+1})}{2} (\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)) - \int_0^T L_\tau(t) d\lambda_\tau(t) \xrightarrow[|\tau| \to 0]{} 0. \tag{1}$$

***Замечание* 2.** Функции $L_\tau()$, $\lambda(t)$ являются кусочно-гладкими. Точнее говоря, они дифференцируемы всюду, за исключением точек t_i, в которых имеют правые и левые односторонние производные. Эта дифференцируемость следует из явного представления инвариантов Концевича в виде интегралов, справедливого для кусочно-гладких кос, каковой и является коса Z_τ.

***Доказательство теоремы* 3.** Заметим сначала, что за счет гомотопической инвариантности $L(t), \lambda(t)$ и замечания к теореме 1 для достаточно мелких разбиений τ при всех i выполнены равенства

$$L(t_i) = L_\tau(t_i), \qquad \lambda(t_i) = \lambda_\tau(t_i).$$

Последующие оценки будем проводить именно для таких достаточно мелких разбиений.

Заменим функцию L_τ на кусочно-линейную версию $\tilde{L}(\cdot):$ $L_\tau(t_i) = \tilde{L}(t_i)$ при каждом i, $\tilde{L}(t)$ линейна на $[t_i, t_{i+1}]$.

Оценим разность:

$$\left|\int\limits_0^T (L_\tau(t)-\tilde{L}(t))d\lambda_\tau(t)\right| \le \sum_{i=0}^{p-1} \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \left|L_\tau(t)-\tilde{L}(t)\right| |\lambda(t_{i+1})-\lambda(t_i)| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{p-1} \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |L''_\tau(t)|(t_{i+1}-t_i)^2|\lambda(t_{i+1})-\lambda(t_i)|. \qquad (2)$$

Действительно, имеем $L_\tau(t_i) = \tilde{L}(t_i)$, $L_\tau(t_{i+1}) = \tilde{L}(t_{i+1})$. В силу теоремы Лагранжа, примененной к дифференцируемой на отрезке $[t_i, t_{i+1}]$ функции L_τ (см. замечание 2), существует $\tilde{t} \in [t_i, t_{i+1}]$ такое, что $L'_\tau(\tilde{t}) = \dfrac{L_\tau(t_i+1)-L_\tau(t_i)}{t_{i+1}-t_i} = \tilde{L}'(\tilde{t})$, и потому для всех $t \in [t_i, t_{i+1}]$

$$|L'_\tau(t)-\tilde{L}'(t)| = |L'_\tau(t)-\tilde{L}'(\tilde{t})| = |L'_\tau(t)-L'_\tau(\tilde{t})| \le \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |L''_\tau(t)||t-\tilde{t}| \le$$

$$\le \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |L''_\tau(t)||t_{i+1}-t_i|.$$

Отсюда для $t \in [t_i, t_{i+1}]$ имеем

$$\left|L_\tau(t)-\tilde{L}(t)\right| = \left|\int\limits_{t_i}^{t_{i+1}} (L'_\tau(t)-\tilde{L}'(t))dt\right| \le \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} |L'_\tau(t)-\tilde{L}'_\tau(t)||t_{i+1}-t_i| \le$$

$$\le \max_{t\in[t_i,t_{i+1}]} \left|L''_\tau(t)\right|(t_{i+1}-t_i)^2.$$

Тем самым неравенство (2) установлено.

Легко получается следующая оценка на $L''_\tau(t)$, $t \in [t_i, t_{i+1}]$:

$$|L''_\tau(t)| \le C \max_{k=0,\ldots,p-1} \frac{\Delta X_k(t_i)^2 + \Delta Y_k(t_i)^2}{\Delta t_i{}^2}, \qquad (3)$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная, зависящая лишь от исходной косы (но не от разбиения).

Действительно, $L_\tau(t)$ представляется в виде суммы интегралов вида $\displaystyle\int_0^T L^{m-1}_\tau(t)d\lambda_\tau(t)$, где $L^{m-1}_\tau(t)$ — некоторые инварианты Концевича порядка $m-1$ (для ломаной, приближающей данную косу), $\lambda_\tau(t) = \lambda^\tau_{kl}(t)$ для некоторых $k \ne l$, $1 \le k$, $l \le n$, — инварианты Концевича первого порядка (тоже для ломаных).

Имеем

$$\left(\int\limits_0^t L^{m-1}_\tau(t)d\lambda_\tau(t)\right)'' = (L^{m-1}_\tau(t)\lambda'_\tau(t))' = (L^{m-1}_\tau(t))'\lambda'_\tau(t) + L^{m-1}_\tau(t)\lambda''_\tau(t). \qquad (4)$$

Далее,

$$\lambda'_\tau(t) = (\lambda^\tau_{kl})'(t) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(X_l-X_k)(Y_l-Y_k)'-(Y_l-Y_k)(X_l-X_k)'}{(X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2} - \right.$$

$$-i\frac{(X_l-X_k)(X_l-X_k)'+(Y_l-Y_k)(Y_l-Y_k)'}{(X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2}\Bigg).$$

Учитывая, что

$$X_l''=Y_l''=X_k''=Y_k''=0,$$

получаем

$$2\pi\lambda_\tau''(t)=\frac{(X_l-X_k)(Y_l-Y_k)''-(Y_l-Y_k)(X_l-X_k)''}{(X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2}-$$

$$-2\frac{[(X_l-X_k)(Y_l-Y_k)'-(Y_l-Y_k)(X_l-X_k)'][(X_l-X_k)(X_l-X_k)'+(Y_l-Y_k)(Y_l-Y_k)']}{((X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2)^2}-$$

$$-i\frac{(X_l-X_k)(X_l-X_k)''+(Y_l-Y_k)(Y_l-Y_k)''+2(X_l-X_k)'(Y_l-Y_k)'}{(X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2}+$$

$$+2i\frac{[(X_l-X_k)(X_l-X_k)'+(Y_l-Y_k)(Y_l-Y_k)'][(X_l-X_k)(X_l-X_k)'+(Y_l-Y_k)(Y_l-Y_k)']}{((X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2)^2}=$$

$$=-2\frac{[(X_l-X_k)(Y_l-Y_k)'-(Y_l-Y_k)(X_l-X_k)'][(X_l-X_k)(X_l-X_k)'+(Y_l-Y_k)(Y_l-Y_k)']}{((X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2)^2}-$$

$$-2i\frac{(X_l-X_k)'(Y_l-Y_k)'}{(X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2}+2i\frac{[(X_l-X_k)(X_l-X_k)'+(Y_l-Y_k)(Y_l-Y_k)']^2}{((X_l-X_k)^2+(Y_l-Y_k)^2)^2},$$

откуда

$$|\lambda_\tau''(t)|\le C_1(X_l'^2+Y_l'^2+X_k'^2+Y_k'^2)=C_1\frac{\Delta X_k(t_i)^2+\Delta Y_k(t_i)^2+\Delta X_l(t_i)^2+\Delta Y_l(t_i)^2}{\Delta t_i^2}\le$$

$$\le C\max_{k=0,\ldots,p-1}\frac{\Delta X_k(t_i)^2+\Delta Y_k(t_i)^2}{\Delta t_i^2}.$$

Аналогично проводится оценка $\left(L_\tau^{m-1}(t)\right)'$. Из этих оценок и из (4) получается оценка (3). Из нее и из (2), учитывая кусочную линейность X, Y, имеем

$$\left|\int\limits_0^T(L_\tau(t)-\tilde{L}(t))d\lambda_\tau(t)\right|\le C\sum_{i=0}^{p-1}\max_{t\in[t_i,t_{i+1}]}\left|L_\tau''(t)\right|(t_{i+1}-t_i)^2\left|\lambda(t_{i+1})-\lambda(t_i)\right|\le$$

$$\le C'\max_{i=0,\ldots,p-1}|\lambda(t_{i+1})-\lambda(t_i)|\max_k\sum_{i=0}^{p-1}(\Delta X_k(t_i)^2+\Delta Y_k(t_i)^2)\xrightarrow[p\to\infty]{}0.$$

Далее, заменим $\lambda_\tau(\cdot)$ на кусочно-линейную версию $\tilde{\lambda}(\cdot)$. Имеем

$$\int\limits_0^T\tilde{L}(t)d\lambda_\tau(t)=\tilde{L}(T)\lambda_\tau(T)-\int\limits_0^T\lambda_\tau(t)d\tilde{L}(t).$$

Разность
$$\left|\int\limits_0^T \lambda_\tau(t)d\tilde{L}(t) - \int\limits_0^T \tilde{\lambda}(t)d\tilde{L}(t)\right|$$
оценивается полностью аналогично разности
$$\left|\int\limits_0^T (L_\tau(t) - \tilde{L}(t))d\lambda_\tau(t)\right|.$$

Таким образом, получаем
$$\int\limits_0^T \tilde{L}(t)d\tilde{\lambda}(t) - \int\limits_0^T L_\tau(t)d\lambda_\tau(t) \xrightarrow[|\tau|\to 0]{} 0.$$

Однако
$$\int\limits_0^T \tilde{L}(t)d\tilde{\lambda}(t) = \sum_{i=0}^{p-1} \frac{L(t_i) + L(t_{i+1})}{2}(\lambda(t_{i+1}) - \lambda(t_i)),$$
что и завершает доказательство теоремы 3.

Теорема 2 очевидным образом следует из теоремы 3, предложения 1 и утверждения 1 с учетом того факта, что для конечного числа непрерывных семимартингалов $U_i(t)$ относительно общей фильтрации F_t существует (детерминированная) последовательность разбиений
$$\tau_n : 0 = t_0^{(n)} < t_1^{(n)} \ldots < t_{k_n-1}^{(n)} < t_{k_n}^{(n)} = T$$
со стремящейся к 0 мелкостью $\left(\max_{0\le i\le k_n-1}(t_{i+1}^{(n)} - t_i^{(n)}) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\right)$, такая, что все последовательности сумм
$$\sum_{j=0}^{k_n-1} \left|U_i(t_{j+1}^{(n)}) - U_i(t_j^{(n)})\right|^2$$
ограничены с вероятностью 1. Действительно, выбирая произвольную последовательность разбиений
$$\Lambda_m : 0 = s_0^{(m)} < s_1^{(m)} \ldots < s_{l_m-1}^{(m)} < s_{l_m}^{(m)} = T$$
со сходящейся к 0 мелкостью, получаем, что соответствующие суммы
$$\sum_{j=0}^{l_m-1} \left|U_i(s_{j+1}^{m}) - U_i(s_j^{m})\right|^2$$
сходятся по вероятности [11, с. 51], а поскольку этих сумм конечное число, можно выбрать подпоследовательность последовательности Λ_m, для которой соответствующие суммы будут сходиться с вероятностью 1.

1. *Монин А. С., Яглом И. М.* Статистическая гидромеханика: В 2 ч. – М.: Наука, 1967. – Ч. 2. – 720 с.

2. *Arnold V., Khesin B.* Topological methods in hydrodynamics. – New York: Springer, 1998. – 393 p.
3. *Berger M., Roberts P.* On the winding number problem with finite steps // Adv. Appl. Probab. – 1988. – **20**, № 2. – P. 261 – 274.
4. *Marc Yor.* Etude asymptotique des nombres de tours de plusieurs mouvements browniens complexes correles // Progr. Probab. – 1991. – **28**. – P. 441 – 455.
5. *Jim Pitman, Marc Yor.* Asymptotic laws of planar Brownian motion // Ann. Probab. – 1986. – **14**, № 3. – P. 733 – 779.
6. *Jean-Luc Thiffeault.* Braids of entangled particle trajectories // Chaos. – 2010. – **20**.
7. *Dror Bar-Natan.* Vassiliev homotopy string link invariants // J. Knot Theory and Ramifications. – 1995. – **4**, № 1. – P. 13 – 32.
8. *Kontsevich M.* Vassiliev's knot invariants // Adv. Soviet Math. – 1993. – **16**, Pt. 2. – P. 137 – 150.
9. *Mitchell A. Berger.* Topological invariants in braid theory // Lett. Math. Phys. – 2001. – **55**, № 3. – P. 181 – 192.
10. *Munkres James R.* Topology: a first course. – Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1974. – 413 p.
11. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations. – Cambridge: Univ. Press, 1997. – 346 p.

Получено 15.07.13