УДК 519.21

П. К. Бабилуа, Э. А. Надарая, Г. А. Сохадзе (Тбил. гос. ун-т им. Ив. Джавахишвили, Грузия)

ОБ ИНТЕГРАЛЬНОЙ КВАДРАТИЧЕСКОЙ МЕРЕ РАСХОЖДЕНИЯ ДВУХ ЯДЕРНЫХ ОЦЕНОК БЕРНУЛЛИЕВСКИХ ФУНКЦИЙ РЕГРЕССИИ

We establish a limit distribution of the square-integrable deviation of two nonparametric nuclear-type estimates of the Bernoulli regression functions. A criterion is constructed for the verification of the hypothesis of equality of Bernoulli regression functions. We study the problem of justification and, for some "close" alternatives, investigate the asymptotics of power.

Встановлено граничний розподіл інтегрального квадратичного відхилення двох непараметричних оцінок ядерного типу бернуллiївських функцій регресії. Побудовано критерій перевірки гіпотези про рівність двох бернуллiївських функцій регресії. Вивчено питання обґрунтованості і для деяких „близьких" альтернатив досліджено асимптотику потужності.

Пусть случайные величины $Y^{(i)}$, $i=1,2$, принимают два значения: 1 и 0 с вероятностями („успеха") p_i и („поражения") $1-p_i$, $i=1,2$, соответственно. Предположим, что вероятность „успеха" p_i является функцией независимой переменной $x\in[0,1]$, т. е. $p_i=p_i(x)=\mathbf{P}\{Y^{(i)}=$ $=1|\ x\}$ (см. [1–3]). Пусть $t_j, j=1,\ldots,n,$ — точки деления интервала $[0,1]$:

$$t_j=\frac{2j-1}{2n},\quad j=1,\ldots,n.$$

Пусть, далее, $Y_i^{(1)}$ и $Y_i^{(2)}$, $i=1,\ldots,n,$ — взаимно независимые бернуллиевские случайные величины с $\mathbf{P}\{Y_i^{(k)}=1|\ t_i\}=p_k(t_i)$, $\mathbf{P}\{Y_i^{(k)}=0|\ t_i\}=1-p_k(t_i)$, $i=1,\ldots,n$, $k=1,2$. Требуется, основываясь на выборках $Y_1^{(1)},\ldots,Y_n^{(1)}$ и $Y_1^{(2)},\ldots,Y_n^{(2)}$, проверить гипотезу H_0 : $p_1(x)=p_2(x)=p(x)$, $x\in[0,1]$, применительно к последовательности „близких" альтернатив:

$$H_{1n}: p_1(x)=p(x),\qquad p_2(x)=p(x)+\alpha_n u(x)+o(\alpha_n),$$

где α_n стремится к 0 подходящим образом, $u(x)\neq 0$, $x\in[0,1]$, и $o(\alpha_n)$ равномерно по $x\in[0,1]$.

Задача сравнения двух бернуллиевских функций регрессии может возникнуть в некоторых приложениях, например в квантовых биоанализах в фармакологии. Здесь x — доза лекарства и $p(x)$ — вероятность эффективности дозы x [4, 5].

Мы рассматриваем критерий проверки гипотезы H_0, основанный на статистике:

$$T_n=\frac{1}{2}\,nb_n\int\limits_{\Omega_n(\tau)}\big[\widehat{p}_{1n}(x)-\widehat{p}_{2n}(x)\big]^2 p_n^2(x)\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\,nb_n\int\limits_{\Omega_n(\tau)}\big[p_{1n}(x)-p_{2n}(x)\big]^2\,dx,\qquad \Omega_n(\tau)=[\tau b_n,1-\tau b_n],\quad \tau>0,$$

где

© П. К. БАБИЛУА, Э. А. НАДАРАЯ, Г. А. СОХАДЗЕ, 2015

$$\widehat{p}_{in}(x) = p_{in}(x) p_n^{-1}(x),$$

$$p_{in}(x) = (nb_n)^{-1} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - t_j}{b_n}\right) Y_j^{(i)}, \quad i = 1, 2,$$

$$p_n(x) = (nb_n)^{-1} \sum_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - t_j}{b_n}\right),$$

$K(x)$ — некоторая плотность распределения, $b_n \to 0$ — последовательность положительных чисел и $\widehat{p}_{in}(x)$ — ядерная оценка функции регрессии (см. [6, 7]).

Структура работы следующая. В пункте 1 приведены предположения и обозначения, а в пункте 2 — вспомогательные утверждения. В пункте 3 изучается асимптотическая нормальность статистики T_n при последовательности „близких" альтернатив, а в пункте 4 даны применения статистики T_n для проверки гипотез.

1. Предположения и обозначения. Предположим, что ядро $K(x) \geq 0$ выбрано так, чтобы оно было функцией с ограниченным изменением и удовлетворяло условиям $K(x) = K(-x)$, $K(x) = 0$ при $|x| \geq \tau > 0$, $\int K(x)\,dx = 1$. Класс таких функций обозначим через $H(\tau)$.

Введем также следующие обозначения:

$$T_n^{(1)} = \frac{1}{2}\, nb_n \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \left[\widetilde{p}_{1n}(x) - \widetilde{p}_{2n}(x)\right]^2 dx,$$

$$\widetilde{p}_{in}(x) = p_{in}(x) - \mathbf{E}\, p_{in}(x), \quad i = 1, 2.$$

Ясно, что

$$T_n^{(1)} = H_n + \frac{1}{2nb_n} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 Q_{ii}, \qquad H_n = \frac{1}{nb_n} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \varepsilon_i \varepsilon_j Q_{ij},$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{1i} - \varepsilon_{2i}, \qquad \varepsilon_{ki} = Y_i^{(k)} - p_k(t_i), \quad k = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$Q_{ij} = \psi_n(t_i, t_j), \qquad \psi_n(u, v) = \int\limits_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x - u}{b_n}\right) K\left(\frac{x - v}{b_n}\right) dx.$$

Легко видеть, что

$$\sigma_n^{-1}(T_n^{(1)} - \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(n)} + \frac{1}{2nb_n\sigma_n} \sum_{i=1}^{n} \left(\varepsilon_i^2 - \mathbf{E}\varepsilon_i^2\right) Q_{ii},$$

$$\Delta_n = \mathbf{E} T_n^{(1)}, \qquad \sigma_n^2 = \mathbf{Var}\, H_n = (nb_n)^{-2} \sum_{k=2}^{n} d_k \sum_{i=1}^{k-1} d_i Q_{ik}^2,$$

$$d_i = d(t_i) = \mathbf{Var}\, \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

$$\xi_k^{(n)} = \sum_{i=1}^{k-1} \eta_{ik}^{(n)}, \quad k = 2, \ldots, n, \qquad \xi_1^{(n)} = 0, \qquad \xi_k^{(n)} = 0, \quad k > n,$$

$$\eta_{ij}^{(n)} = \frac{\varepsilon_i \varepsilon_j Q_{ij}}{n b_n \sigma_n}, \qquad \mathcal{F}_k^{(n)} = \sigma(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k),$$

т. е. $\mathcal{F}_k^{(n)}$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k$, и $\mathcal{F}_0^{(n)} = (\varnothing, \Omega)$ $\Big($в дальнейшем для простоты записи вместо $\xi_k^{(n)}$, $\eta_{ij}^{(n)}$ и $\mathcal{F}_k^{(n)}$ используем обозначения ξ_k, η_{ij} и $\mathcal{F}_k\Big)$.

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Стохастическая последовательность $(\xi_k, \mathcal{F}_k)_{k \ge 1}$ является мартингал-разностью.*

Лемма 2 [8]. *Пусть $K(x) \in H(\tau)$ и $p(x)$, $0 \le x \le 1$, является функцией с ограниченным изменением. Если $nb_n \to \infty$, то*

$$\frac{1}{nb_n} \sum_{i=1}^{n} K^{\nu_1}\left(\frac{x - t_i}{b_n}\right) K^{\nu_2}\left(\frac{y - t_i}{b_n}\right) p^{\nu_3}(t_i) =$$

$$= \frac{1}{b_n} \int_0^1 K^{\nu_1}\left(\frac{x - u}{b_n}\right) K^{\nu_2}\left(\frac{y - u}{b_n}\right) p^{\nu_3}(u)\, du + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \tag{1}$$

равномерно по $x, y \in [0,1]$, где $\nu_i \in N \cup \{0\}$, $i = 1, 2, 3$.

Лемма 3. *Пусть $K(x) \in H(\tau)$, $p(x) \in C^1[0,1]$ и $u(x)$ — непрерывная функция на $[0,1]$. Если $nb_n^2 \to \infty$ и $\alpha_n = n^{-1/2} b_n^{-1/4}$, то при гипотезе H_{1n}*

$$b_n^{-1} \sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2(p) = 2 \int_0^1 p^2(x) \big(1 - p(x)\big)^2 dx \int_{|x| \le 2\tau} K_2^2(x) dx \tag{2}$$

и

$$b_n^{-1/2} \big(\Delta_n - \Delta(p)\big) = O\big(b_n^{1/2}\big) + O\big(\alpha_n b_n^{-1/2}\big) + O\left(\frac{1}{n b_n^{3/2}}\right), \tag{3}$$

где

$$\Delta_n = \mathbf{E} T_n^{(1)}, \qquad \Delta(p) = \int_0^1 p(x)(1 - p(x))\, dx \int_{|x| \le \tau} K^2(u)\, du,$$

$$K_2 = K * K; \quad * \text{ — знак свертки.}$$

Доказательство. Имеем

$$\sigma_n^2 = A_1(n) + A_2(n), \tag{4}$$

где

$$A_1(n) = \frac{1}{2}\,(nb_n)^{-2} \sum_{k,i=1}^{n} d_i d_k Q_{ik}^2, \qquad A_2(n) = -\frac{1}{2}\,(nb_n)^{-2} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 Q_{ii}^2,$$

$$d_k = d(t_k) = p_1(t_k)\big(1 - p_1(t_k)\big) + p_2(t_k)\big(1 - p_2(t_k)\big), \quad k = 1, \ldots, n,$$

и

$$d_k = d(t_k) = 2p(t_k)\big(1 - p(t_k)\big) + O(\alpha_n) \tag{5}$$

равномерно по $t_k \in [0,1]$.

Легко видеть, что

$$b_n^{-1}\big|A_2(n)\big| = \frac{1}{2}\,n^{-2} b_n^{-3} \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \left(\int\limits_{\Omega_n(\tau)} K^2\left(\frac{x - t_i}{b_n}\right) dx\right)^2 \le c_1\,\frac{1}{nb_n} + c_2\,\frac{\alpha_n}{nb_n}\,. \tag{6}$$

Из определения Q_{ik} и (5) получаем

$$A_1(n) = \frac{1}{2}\,(nb_n)^{-2} \int\limits_{\overline{\Omega}_n(\tau)} \left[\sum_{i=1}^{n} \Big(2p(t_i)(1 - p(t_i)) + O(\alpha_n)\Big) K\left(\frac{x - t_i}{b_n}\right) K\left(\frac{y - t_i}{b_n}\right)\right]^2 dx\,dy,$$

$$\overline{\Omega}_n(\tau) = \Omega_n(\tau) \times \Omega_n(\tau).$$

Далее, используя лемму 2, а также учитывая, что $p(x) \in C^1[0,1]$ и $\left[\dfrac{x-1}{b_n}, \dfrac{x}{b_n}\right] \supset [-\tau, \tau]$ для всех $x \in \Omega_n(\tau)$, нетрудно установить, что

$$b_n^{-1} A_1(n) = 2 \int\limits_{\Omega_n(\tau)} p^2(x)\big(1 - p(x)\big)^2 \int\limits_{\frac{x-1}{b_n}+\tau}^{\frac{x}{b_n}-\tau} K_2^2\Big(\frac{x - y}{b_n}\Big)\,dx\,dy +$$

$$+ O(b_n) + O\Big(\big(\alpha_n b_n^{-1/2}\big)^2\Big) + O(\alpha_n) + O\Big(\frac{1}{nb_n^2}\Big).$$

Стало быть,

$$b_n^{-1} A_1(n) \longrightarrow 2 \int\limits_0^1 p^2(x)\big(1 - p(x)\big)^2 dx \int\limits_{|x| \le 2\tau} K_2^2(x)\,dx. \tag{7}$$

Из (6) и (7) следует утверждение (2).

Далее, применяя приведенную выше методику, имеем

$$\Delta_n = \mathbf{E}T_n^{(1)} = \frac{1}{2}\,(nb_n)^{-1} \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \sum_{i=1}^{n} K^2\left(\frac{x - t_i}{b_n}\right) d(t_i)\,dx =$$

$$= \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \left[\int\limits_{\frac{x-1}{b_n}}^{\frac{x}{b_n}} K^2(u)p(x-b_nu)(1-p(x-b_nu))\,du \right] dx + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) + O(\alpha_n) =$$

$$= \int\limits_0^1 p(x)(1-p(x))\,dx \int\limits_{|x|\le\tau} K^2(x)\,dx + O(b_n) + O(\alpha_n) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

Следовательно,

$$b_n^{-1/2}\big(\Delta_n - \Delta(p)\big) = O\big(b_n^{1/2}\big) + O\big(\alpha_n b_n^{-1/2}\big) + O\left(\frac{1}{nb_n^{3/2}}\right).$$

Лемма доказана.

3. Асимптотическая нормальность статистики T_n. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $K(x) \in H(\tau)$ и $p(x), u(x) \in C^1[0,1]$. Если $nb_n^2 \to \infty$, $\alpha_n = n^{-1/2}b_n^{-1/4}$, то при гипотезе H_{1n}*

$$b_n^{-1/2}(T_n - \Delta(p))\sigma^{-1}(p) \xrightarrow{d} N(a,1),$$

где $\Delta(p)$ и $\sigma^2(p)$ определены в лемме 3 и $\xrightarrow{d}$ обозначает сходимость по распределению, а $N(a,1)$ — случайную величину, имеющую нормальное распределение с параметрами $(a,1)$,

$$a = \frac{1}{2\sigma(p)} \int\limits_0^1 u^2(x)\,dx.$$

Доказательство. Имеем

$$T_n = T_n^{(1)} + L_n^{(1)} + L_n^{(2)},$$

где

$$L_n^{(1)} = nb_n \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \big[\widetilde{p}_{1n}(x) - \widetilde{p}_{2n}(x)\big]\big[\mathbf{E}p_{1n}(x) - \mathbf{E}p_{2n}(x)\big]\,dx,$$

$$L_n^{(2)} = \frac{1}{2}\,nb_n \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \big[\mathbf{E}p_{1n}(x) - \mathbf{E}p_{2n}(x)\big]^2\,dx.$$

В силу леммы 2 ясно, что

$$b_n^{-1/2}L_n^{(2)} = \frac{1}{2}\,nb_n^{1/2}\alpha_n^2 \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \left\{ \frac{1}{b_n}\int\limits_0^1 K\left(\frac{x-t}{b_n}\right)u(t)\,dt + O\left(\frac{1}{nb_n}\right) \right\}^2 dx. \tag{8}$$

Поскольку $\left[\dfrac{x-1}{b_n}, \dfrac{x}{b_n}\right] \supset [-\tau,\tau]$ для всех $x \in \Omega_n(\tau)$, из (8) находим

$$b_n^{-1/2}L_n^{(2)} = \frac{1}{2}\,nb_n^{1/2}\alpha_n^2 \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \left[\int\limits_{-\tau}^{\tau} K(t)u(x-b_nt)\,dt + O\left(\frac{1}{nb_n}\right)\right]^2 dx. \tag{9}$$

Далее, так как $u(x) \in C^1[0,1]$, из (9) получаем

$$b_n^{-1/2}L_n^{(2)} \longrightarrow \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2(t)\,dt. \tag{10}$$

Теперь покажем, что $b_n^{-1/2}L_n^{(1)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Имеем

$$b_n^{-1/2}L_n^{(1)} = \frac{1}{2}\,nb_n^{1/2} \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \widetilde{p}_{1n}(x)\big(\mathbf{E}p_{1n}(x) - \mathbf{E}p_{2n}(x)\big)\,dx -$$

$$-\frac{nb_n^{1/2}}{2} \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \widetilde{p}_{2n}(x)\big(\mathbf{E}p_{1n}(x) - \mathbf{E}p_{2n}(x)\big)\,dx = I_n^{(1)} + I_n^{(2)}. \tag{11}$$

Ясно, что

$$\mathbf{E}\big|I_n^{(1)}\big| \le \Big(\mathbf{E}\big(I_n^{(1)}\big)^2\Big)^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,nb_n^{1/2}\left[\mathbf{E}\left(\int\limits_{\Omega_n(\tau)} \widetilde{p}_{1n}(x)\big(\mathbf{E}p_{1n}(x) - \mathbf{E}p_{2n}(x)\big)\,dx\right)^2\right]^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\,nb_n^{1/2}\left[\int\limits_{\overline{\Omega}_n(\tau)} \mathbf{cov}\,\big(p_{1n}(x_1), p_{1n}(x_2)\big)\big(\mathbf{E}p_{1n}(x_1) - \mathbf{E}p_{2n}(x_1)\big)\times\right.$$

$$\left.\times\big(\mathbf{E}p_{1n}(x_2) - \mathbf{E}p_{2n}(x_2)\big)\,dx_1\,dx_2\right]^{1/2}, \qquad \overline{\Omega}_n(\tau) = \Omega_n(\tau)\times\Omega_n(\tau).$$

Легко убеждаемся, что

$$\mathbf{cov}\,\big(p_{1n}(x_1), p_{1n}(x_2)\big) =$$

$$= \frac{1}{(nb_n)^2}\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x_1 - t_i}{b_n}\right) K\left(\frac{x_2 - t_i}{b_n}\right) p_1(t_i)\big(1 - p_1(t_i)\big),$$

и по лемме 2 отсюда имеем

$$\mathbf{cov}\,\big(p_{1n}(x_1), p_{1n}(x_2)\big) =$$

$$= n^{-1} b_n^{-2} \int\limits_0^1 K\left(\frac{x_1-u}{b_n}\right) K\left(\frac{x_2-u}{b_n}\right) p_1(u)(1-p_1(u))\,du + O\bigg(\frac{1}{(nb_n)^2}\bigg).$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}\big|I_n^{(1)}\big| \le \frac{1}{2}\, n b_n^{1/2} \left\{ \int\limits_{\overline{\Omega}_n(\tau)} \left[\frac{1}{nb_n^2}\int\limits_0^1 K\left(\frac{x_1-u}{b_n}\right) K\left(\frac{x_2-u}{b_n}\right) p_1(u)(1-p_1(u))\,du + \frac{1}{(nb_n)^2}\right] \times\right.$$

$$\left. \times \big(\mathbf{E}p_{1n}(x_1) - \mathbf{E}p_{2n}(x_1)\big)\big(\mathbf{E}p_{1n}(x_2) - \mathbf{E}p_{2n}(x_2)\big)\,dx_1\,dx_2 \right\}^{1/2} \le$$

$$\le c_3 \sqrt{n}\, b_n^{1/2} \alpha_n = c_3\, \frac{1}{\sqrt{n}\,\alpha_n} \longrightarrow 0,$$

так как

$$\sqrt{n}\,\alpha_n = \frac{1}{b_n^{1/4}} \longrightarrow \infty.$$

Значит, $I_n^{(1)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. Аналогично показывается, что $I_n^{(2)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

Таким образом, из (11) имеем

$$b_n^{-1/2} L_n^{(1)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0. \tag{12}$$

Далее, для доказательства теоремы осталось показать, что

$$\frac{T_n^{(1)} - \Delta_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0,1).$$

Имеем

$$\frac{T_n^{(1)} - \Delta_n}{\sigma_n} = K_n^{(1)} + K_n^{(2)},$$

где

$$K_n^{(1)} = \sum_{k=1}^n \xi_k, \qquad K_n^{(2)} = \frac{\sum_{i=1}^n \big(\varepsilon_i^2 - \mathbf{E}\varepsilon_i^2\big) Q_{ii}}{2nb_n\sigma_n}.$$

Покажем, что $K_n^{(2)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$. В самом деле,

$$\mathbf{Var}\left(K_n^{(2)}\right) = (2nb_n\sigma_n)^{-2} \sum_{i=1}^n \mathbf{Var}\,\varepsilon_i^2 Q_{ii}^2 =$$

$$= (2nb_n\sigma_n)^{-2} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^2 p_k(t_i)(1-p_k(t_i)) \Big[1 - 3p_k(t_i)\big(1-p_k(t_i)\big)\Big] \right) Q_{ii}^2.$$

Поскольку $Q_{ii} \le c_4 b_n$ и $b_n^{-1}\sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2(p)$ при $n \to \infty$, отсюда следует, что

$$\mathbf{Var}\,(K_n^{(2)}) \le c_5\,\frac{1}{nb_n}.$$

Стало быть, $K_n^{(2)} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$.

Теперь установим, что $K_n^{(1)} \xrightarrow{d} N(0,1)$. С этой целью проверим, что применимы следствия 2 и 6 теоремы 2 из работы [9]. Нужно показать выполнение имеющихся в этих утверждениях условий, гарантирующих асимптотическую нормальность квадратично интегрируемой мартингал-разности, какой, согласно лемме 1, является последовательность $\{\xi_k, \mathcal{F}_k\}_{k\ge 1}$.

Нетрудно убедиться, что $\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^2 = 1$. Асимптотическая нормальность $K_n^{(1)}$ будет иметь место, если при $n\to\infty$

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\Big[\xi_k^2 I\big(|\xi_k| \ge \varepsilon\big) \mid \mathcal{F}_{k-1}\Big] \xrightarrow{\mathbf{P}} 0 \qquad (13)$$

и

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 1. \qquad (14)$$

В [9] доказано, что при выполнении (14) и условия $\sup_{1\le k\le n}|\xi_k| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0$ имеет место и условие (13).

Поскольку при $\varepsilon>0$

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{1\le k\le n}|\xi_k| \ge \varepsilon\right\} \le \varepsilon^{-4}\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^4,$$

согласно приводимому ниже соотношению (16), для доказательства

$$K_n^{(1)} \xrightarrow{d} N(0,1)$$

осталось проверить лишь (14). Для этого достаточно убедиться в том, что

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 - 1\right)^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n\to\infty,$$

т. е. поскольку $\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^2 = 1$, то

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2\right)^2 = \sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^4 + 2\sum_{1\le k_1<k_2\le n} \mathbf{E}\xi_{k_1}^2\xi_{k_2}^2 \longrightarrow 1. \qquad (15)$$

Докажем (15). Принимая во внимание определения η_{ik} и ξ_k, получаем

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{E}\xi_k^4 = I_n^{(1)} + I_n^{(2)},$$

где

$$I_n^{(1)} = \frac{1}{(nb_n)^4\sigma_n^4}\sum_{k=2}^n \mathbf{E}\varepsilon_k^4 \sum_{j=1}^{k-1}\mathbf{E}\varepsilon_j^4 Q_{jk}^4,$$

$$I_n^{(2)} = \frac{3}{(nb_n)^4\sigma_n^4}\sum_{k=2}^{n}\sum_{i\neq j}\mathbf{E}\varepsilon_j^2\mathbf{E}\varepsilon_i^2 Q_{jk}^2 Q_{ik}^2.$$

Поскольку

$$Q_{ij} \leq c_6 b_n, \qquad \mathbf{E}\varepsilon_j^4 \leq 8\sum_{k=1}^{2} p_k(t_j)\big(1-p_k(t_j)\big)\Big[1-3p_k(t_j)\big(1-p_k(t_j)\big)\Big] \leq 4,$$

$$\mathbf{E}\varepsilon_j^2 \leq \frac{1}{2}, \qquad |\mathbf{E}\varepsilon_j^3| \leq \sum_{k=1}^{2} p_k(t_j)\big(1-p_k(t_j)\big)\Big[\big(1-p_k(t_j)\big)^2 + p_k^2(t_j)\Big] \leq 1$$

и $b_n^{-1}\sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2(p)$, то

$$I_n^{(1)} = O\left(\frac{1}{(nb_n)^2}\right), \qquad I_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right).$$

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\xi_k^4 \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n\to\infty. \tag{16}$$

Далее, из определения ξ_i следует, что

$$\xi_{k_1}^2\xi_{k_2}^2 = B_{k_1k_2}^{(1)} + B_{k_1k_2}^{(2)} + B_{k_1k_2}^{(3)} + B_{k_1k_2}^{(4)},$$

где

$$B_{k_1k_2}^{(1)} = \sigma_2(k_1)\sigma_2(k_2), \qquad B_{k_1k_2}^{(2)} = \sigma_2(k_1)\sigma_1(k_2),$$

$$B_{k_1k_2}^{(3)} = \sigma_1(k_1)\sigma_2(k_2), \qquad B_{k_1k_2}^{(4)} = \sigma_1(k_1)\sigma_1(k_2),$$

$$\sigma_1(k) = \sum_{1\leq i\neq j\leq k-1}\eta_{ik}\eta_{jk}, \qquad \sigma_2(k) = \sum_{i=1}^{k-1}\eta_{ik}^2.$$

Следовательно,

$$2\sum_{1\leq k_1<k_2\leq n}\mathbf{E}\xi_{k_1}^2\xi_{k_2}^2 = \sum_{i=1}^{4}A_n^{(i)},$$

где

$$A_n^{(i)} = 2\sum_{1\leq k_1<k_2\leq n}\mathbf{E}B_{k_1k_2}^{(i)}, \quad i=1,2,3,4.$$

Рассмотрим $A_n^{(3)}$. Используя определение η_{ij}, легко показать, что $\mathbf{E}B_{k_1k_2}^{(3)} = 0$ и, следовательно,

$$A_n^{(3)} = 0. \tag{17}$$

Оценим $A_n^{(2)}$. Имеем

$$\big|\mathbf{E}B_{k_1k_2}^{(2)}\big| = \frac{1}{(nb_n\sigma_n)^4}\left|\sum_{i=1}^{k_1-1}\mathbf{E}\varepsilon_i^3\mathbf{E}\varepsilon_{k_1}^3\mathbf{E}\varepsilon_{k_2}^2 Q_{ik_1}^2 Q_{ik_2} Q_{k_1k_2}\right|.$$

Поскольку $\mathbf{E}|\varepsilon_i^3| \leq 1$ и $Q_{ij} \leq c_6 b_n$, отсюда находим

$$\left|\mathbf{E}B_{k_1k_2}^{(2)}\right| \leq c_6\,\frac{k_1-1}{(n\sigma_n)^4}.$$

Далее, так как $\sum_{1\leq k_1<k_2\leq n}(k_1-1)=O(n^3)$ и $b_n^{-1}\sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2(p)>0$, получаем

$$\left|A_n^{(2)}\right| \leq c_7\,\frac{n^3}{n^4\sigma_n^4} = c_7\,\frac{1}{nb_n^2(b_n^{-1}\sigma_n^2)^2} = O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \tag{18}$$

Теперь установим, что $A_n^{(1)} \to 1$ при $n\to\infty$. Очевидно,

$$A_n^{(1)} = 2\sum_{1\leq k_1<k_2\leq n}\mathbf{E}B_{k_1k_2}^{(1)} = S_n^{(1)} + S_n^{(2)},$$

где

$$S_n^{(1)} = 2\sum_{1\leq k_1<k_2\leq n}\left(\sum_{i=1}^{k_1-1}\mathbf{E}\eta_{ik_1}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k_2-1}\mathbf{E}\eta_{jk_2}^2\right),$$

$$S_n^{(2)} = 2\left(\sum_{k_1<k_2}\mathbf{E}B_{k_1k_2}^{(1)} - \sum_{k_1<k_2}\left(\sum_{i=1}^{k_1-1}\mathbf{E}\eta_{ik_1}^2\right)\left(\sum_{j=1}^{k_2-1}\mathbf{E}\eta_{jk_2}^2\right)\right).$$

Из определения σ_n^2 следует, что

$$S_n^{(1)} = 1 - \sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{E}\eta_{ik}^2\right)^2,$$

причем

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\sum_{i=1}^{k-1}\mathbf{E}\eta_{ik}^2\right)^2 \leq c_8\,\frac{b_n^4 n^3}{(nb_n)^4\sigma_n^4} = O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right).$$

Стало быть,

$$S_n^{(1)} = 1 + O\left(\frac{1}{nb^2}\right). \tag{19}$$

Далее, покажем, что $S_n^{(2)} \to 0$. $S_n^{(2)}$ можно записать так:

$$S_n^{(2)} = 2\sum_{k_1<k_2}\left[\sum_{i=1}^{k_1-1}\mathbf{cov}\left(\eta_{ik_1}^2,\eta_{ik_2}^2\right) + \sum_{i=1}^{k_1-1}\mathbf{cov}\left(\eta_{ik_1}^2,\eta_{k_1k_2}^2\right)\right].$$

Нетрудно показать, что

$$\mathbf{cov}\left(\eta_{ik_1}^2,\eta_{ik_2}^2\right) = O\left(\frac{1}{n^4\sigma_n^4}\right).$$

Но, поскольку $\sum_{1\leq k_1<k_2\leq n}(k_1-1)=O(n^3)$, отсюда установим, что

$$S_n^{(2)} = O\left(\frac{1}{n\sigma_n^4}\right) = O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \tag{20}$$

Итак, согласно (19) и (20),

$$A_n^{(1)} = 1 + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \tag{21}$$

Наконец, покажем, что $A_n^{(4)} \to 0$ при $n \to \infty$. Из определения η_{ij}, соотношений $Q_{ij} \geq 0$ и $\mathbf{E}\varepsilon_i^2 = d(t_i) \leq 1/2$ получаем

$$\mathbf{E}B_{k_1k_2}^{(4)} = 4 \sum_{1 \leq t < s \leq k_1 - 1} \mathbf{E}\eta_{sk_1}\eta_{tk_1}\eta_{sk_2}\eta_{tk_2} \leq \frac{c_8}{n^4 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{1 \leq t < s \leq k_1 - 1} Q_{sk_1}Q_{tk_1}Q_{sk_2}Q_{tk_2}.$$

Таким образом,

$$A_n^{(4)} \leq \frac{c_9}{n^2 b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1 < k_2} A_{k_1k_2},$$

где

$$A_{k_1k_2} = \frac{1}{n^2} \sum_{1 \leq t < s \leq k_1 - 1} Q_{sk_1}Q_{tk_1}Q_{sk_2}Q_{tk_2}.$$

Но

$$\sum_{k_1 < k_2} A_{k_1k_2} \leq \sum_{k_1,k_2=1}^{n} \left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Q_{tk_1}Q_{tk_2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$A_n^{(4)} \leq c_{10}\, \frac{1}{n^2 b_n^4 \sigma_n^4} \times$$

$$\times \sum_{k_1,k_2=1}^{n} \left[\int\limits_{\Omega(\tau)} \int\limits_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x - x_{k_1}}{b_n}\right) K\left(\frac{y - x_{k_2}}{b_n}\right) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K\left(\frac{x - x_i}{b_n}\right) K\left(\frac{y - x_i}{b_n}\right) dxdy\right]^2. \tag{22}$$

Далее, используя лемму 2, из (22) можно заключить, что

$$A_n^{(4)} \leq \frac{c_{11}}{b_n^4 \sigma_n^4} \sum_{k_1,k_2=1}^{n} \left\{\frac{1}{n} \int\limits_0^1 \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \int\limits_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{x - x_{k_1}}{b_n}\right) K\left(\frac{y - x_{k_2}}{b_n}\right) \times\right.$$

$$\left. \times K\left(\frac{x - u}{b_n}\right) K\left(\frac{y - u}{b_n}\right) du\, dx\, dy\right\}^2 + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \tag{23}$$

Далее, если в (23) снова применить лемму 2, то можно показать, что

$$A_n^{(4)} \leq \frac{c_{12}}{b_n^4 \sigma_n^4} \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \psi_n(u_1, v_2)\psi_n(u_1, v_1)\psi_n(u_2, v_1)\psi_n(u_2, v_2)\, du_1\, du_2\, dv_1\, dv_2, \tag{24}$$

где

$$\psi_n(x,y) = \int\limits_{\Omega_n(\tau)} K\left(\frac{t-x}{b_n}\right) K\left(\frac{t-y}{b_n}\right) dt.$$

Теперь оценим интеграл, входящий в (24). Поскольку $\left[\frac{x-1}{b_n}, \frac{x}{b_n}\right] \supseteq [-\tau,\tau]$ для всех $x \in$ $\in \Omega_n(\tau)$, то

$$\int\limits_0^1 \psi_n(u_1,v_2)\psi_n(u_1,v_1)\,du_1 =$$

$$= b_n \int\limits_{\overline{\Omega}_n(\tau)} K\left(\frac{t-v_2}{b_n}\right) K\left(\frac{z-v_1}{b_n}\right) K_2\left(\frac{z-t}{b_n}\right) dt\,dz \le c_{13} b_n^3,$$

$$K_2 = K * K, \qquad \overline{\Omega}_n(\tau) = \Omega_n(\tau)\times\Omega_n(\tau).$$

Следовательно,

$$A_n^{(4)} \le c_{14}\,\frac{1}{b_n\sigma_n^4}\int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \psi_n(u_2,v_1)\psi_n(u_2,v_2)\,du_2\,dv_1\,dv_2 + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \tag{25}$$

Далее, аналогичными рассуждениями из (25) окончательно получаем

$$A_n^{(4)} \le c_{15}\,\frac{b_n^4}{b_n\sigma_n^4} + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right) = O\left(\frac{b_n^4}{b_n^3(b_n^{-1}\sigma_n^2)^2}\right) + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right) = O(b_n) + O\left(\frac{1}{nb_n^2}\right). \tag{26}$$

Объединив вместе соотношения (17), (18), (21) и (26), заключаем, что

$$2\sum_{1\le k_1<k_2\le n} \mathbf{E}\xi_{k_1}^2\xi_{k_2}^2 \longrightarrow 1.$$

Отсюда и из (16) следует, что

$$\mathbf{E}\left(\sum_{k=1}^n \xi_k^2 - 1\right)^2 \longrightarrow 0 \qquad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Стало быть,

$$\frac{T_n^{(1)} - \Delta_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{27}$$

Далее, используя представление $T_n = T_n^{(1)} + L_n^{(1)} + L_n^{(2)}$, лемму 3, (10) и (12), из (27) находим

$$b_n^{-1/2}\left(\frac{T_n - \Delta(p)}{\sigma(p)}\right) \xrightarrow{d} N\left(\frac{1}{2\sigma(p)}\int\limits_0^1 u^2(x)\,dx, 1\right).$$

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть $K(u)\in H(\tau)$ и $p(x)\in C^1[0,1]$. Если $nb_n^2\to\infty$, то при гипотезе H_0*

$$b_n^{-1/2}\big(T_n - \Delta(p)\big)\sigma^{-1}(p) \xrightarrow{d} N(0,1). \tag{28}$$

4. Применение статистики T_n для проверки гипотезы. В качестве важного применения следствия 1 построим критерий для проверки **простой** гипотезы H_0 о равенстве двух бернуллиевских функций регрессии $p_1(x) = p_2(x) = p(x)$, где функция $p(x)$ полностью определена. Критическая область устанавливается неравенством

$$T_n \geq d_n(\alpha) = \Delta(p) + b_n^{1/2}\sigma(p)\lambda_\alpha, \tag{29}$$

где $\Phi(\lambda_\alpha) = 1 - \alpha$, $\Phi(\lambda)$ — стандартное нормальное распределение.

Следствие 2. *Пусть $K(u) \in H(\tau)$ и $p(x), u(x) \in C^1[0,1]$. Если $nb_n^2 \to \infty$ и $\alpha_n = n^{-1/2}b_n^{-1/4}$, то локальное поведение мощности $\mathbf{P}_{H_{1n}}\big(T_n \geq d_n(\alpha)\big)$ таково:*

$$\mathbf{P}_{H_{1n}}\big(T_n \geq d_n(\alpha)\big) \longrightarrow 1 - \Phi\left(\lambda_\alpha - \frac{A(u)}{\sigma(p)}\right), \tag{30}$$

где

$$A(u) = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u^2(x)\,dx > 0.$$

Сходимость (30) показывает, что критерий (29) позволяет отличать от гипотезы H_0 альтернативы, сближающиеся с ней со скоростью $n^{-1/2}b_n^{-1/4}$. Из доказательства теоремы 1 очевидным образом следует, что более близкие альтернативы (т. е. при $\alpha_n \cdot n^{1/2}b_n^{1/4} \to 0$) этот критерий асимптотически не отличает от H_0 (т. е. $\mathbf{P}_{H_{1n}}(T_n \geq d_n(\alpha)) \longrightarrow \alpha$), а для более удаленных альтернатив (т. е. при $\alpha_n n^{1/2}b^{1/4} \longrightarrow \infty$) он состоятелен (т. е. $\mathbf{P}_{H_{1n}}(T_n \geq d_n(\alpha)) \longrightarrow 1$).

Если положим, например, $b_n = n^{-\delta}$, то $\alpha_n = n^{-1/2}b_n^{-1/4} = n^{-1/2+\delta/4}$, $0 < \delta < 1/2$.

Пусть теперь $p(x)$ гипотезой не определена (т. е. проверяется **сложная** гипотеза). Тогда непосредственно использовать (29) нельзя. Требуется предварительно заменить входящие в (29) неизвестные параметры $\Delta(p)$ и $\sigma^2(p)$ некоторыми оценками $\widetilde{\Delta}_n$ и $\widetilde{\sigma}_n^2$ соответственно. За оценку $\Delta(p)$ и $\sigma^2(p)$ примем статистики

$$\widetilde{\Delta}_n = \int\limits_{\Omega_n(\tau)} \lambda_n(x)\,dx \int\limits_{|x|\leq\tau} K^2(x)\,dx,$$

$$\widetilde{\sigma}_n^2 = 2\int\limits_{\Omega_n(\tau)} \lambda_n^2(x)\,dx \int\limits_{|x|\leq 2\tau} K_2^2(x)\,dx,$$

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{2}\Big[p_{1n}(x)\big(p_n(x) - p_{1n}(x)\big) + p_{2n}(x)\big(p_n(x) - p_{2n}(x)\big)\Big]$$

и покажем, что

$$b_n^{-1/2}\big(\widetilde{\Delta_n} - \Delta(p)\big) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \qquad \widetilde{\sigma}_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2(p). \tag{31}$$

Действительно, поскольку $p_n(x) = 1 + O\left(\dfrac{1}{nb_n}\right)$ равномерно по $x \in \Omega_n(\tau)$ и $|p_{in}(x)| \leq c_{16}$, $x \in [0,1]$, $i = 1,2$, то

$$b_n^{-1/2}\mathbf{E}|\widetilde{\Delta}_n - \Delta(p)| \leq$$

$$\leq c_{17} b_n^{-1/2}\left[\int\limits_{\Omega_n(\tau)}\Big(\mathbf{E}\big(p_{1n}(x)-\mathbf{E}p_{1n}(x)\big)^2\Big)^{1/2}dx+\int\limits_{\Omega_n(\tau)}\Big(\mathbf{E}\big(p_{2n}(x)-\mathbf{E}p_{2n}(x)\big)^2\Big)^{1/2}dx\right]+$$

$$+b_n^{-1/2}\int\limits_{\Omega_n(\tau)}\big|\mathbf{E}p_{1n}(x)-p(x)\big|\,dx+b_n^{-1/2}\int\limits_{\Omega_n(\tau)}\big|\mathbf{E}p_{2n}(x)-p(x)\big|\,dx.$$

Далее, используя лемму 2, а также учитывая, что $p(x)\in C^1[0,1]$ и $\left[\dfrac{x-1}{b_n},\dfrac{x}{b_n}\right]\supset[-\tau,\tau]$ для всех $x\in\Omega_n(\tau)$, отсюда нетрудно установить, что

$$b_n^{-1/2}\mathbf{E}|\widetilde{\Delta}_n-\Delta(p)|\leq$$

$$\leq c_{18} b_n^{-1/2}\left\{\int\limits_{\Omega_n(\tau)}\left[\frac{1}{nb_n}\frac{1}{b_n}\int\limits_0^1 K^2\left(\frac{x-u}{b_n}\right)p(u)(1-p(u))\,du+O\bigg(\frac{1}{(nb_n)^2}\bigg)\right]^{1/2}+\right.$$

$$\left.+\,O(b_n)+O\bigg(\frac{1}{nb_n}\bigg)\right\}=O\bigg(\frac{1}{\sqrt{n}\,b_n}\bigg)+O(b_n^{1/2})+O\bigg(\frac{1}{nb^{3/2}}\bigg).$$

Стало быть, $b_n^{-1/2}(\widetilde{\Delta}_n-\Delta(p))\xrightarrow{\mathbf{P}}0$. Аналогично можно установить, что $\widetilde{\sigma}_n^2\xrightarrow{\mathbf{P}}\sigma^2(p)$.

Теорема 2. *Пусть $K(x)\in H(\tau)$ и $p_1(x)=p_2(x)=p(x)\in C^1[0,1]$. Если $nb_n^2\to\infty$, то при $n\to\infty$*

$$b_n^{-1/2}(T_n-\widetilde{\Delta}_n)\widetilde{\sigma}_n^{-1}\xrightarrow{d}N(0,1).$$

Доказательство следует из (28) и (31).

Теорема 2 позволяет построить асимптотический критерий проверки **сложной** гипотезы $H_0: p_1(x)=p_2(x)$, $x\in[0,1]$. Критическая область для проверки этой гипотезы устанавливается неравенством

$$T_n\geq\widetilde{d}_n(\alpha)=\widetilde{\Delta}_n+b_n^{-1/2}\widetilde{\sigma}_n\lambda_\alpha,\qquad\Phi(\lambda_\alpha)=1-\alpha.\tag{32}$$

Теперь рассмотрим вопрос о том, является ли критерий, основанный на (32), состоятельным. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $K(x)\in H(\tau)$, $p_1(x),p_2(x)\in C^1[0,1]$. Если $nb_n^2\to\infty$, то при $n\to\infty$*

$$\gamma_n(p_1,p_2)=\mathbf{P}_{H_1}\big(T_n\geq\widetilde{d}_n(\alpha)\big)\longrightarrow1.$$

Альтернативной гипотезой H_1 здесь является любая пара $(p_1(x),p_2(x))$, $0\leq p_i(x)\leq1$, $p_i(x)\in C^1[0,1]$, $i=1,2$, такая, что $p_1(x)\neq p_2(x)$ хотя бы в одной точке x, $x\in[0,1]$.

Доказательство. Обозначим

$$\overline{T}_n=\frac{1}{2}\,nb_n\int\limits_{\Omega_n}\big(\overline{p}_{1n}(x)-\overline{p}_{2n}(x)\big)^2\,dx,$$

$$\overline{p}_{in}(x)=p_{in}(x)-\mathbf{E}p_{in}(x),\quad i=1,2.$$

Аналогично (2), (3) и (31) можно легко показать, что при гипотезе H_1

$$b_n^{-1}\sigma_n^2 \longrightarrow \sigma^2(p_1, p_2) = 2\int_0^1 d^2(x)\,dx \int_{|x|\le 2\tau} K_2^2(x)\,dx,$$

$$\widetilde{\sigma}_n^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} \sigma^2(p_1,p_2), \qquad \widetilde{\Delta}_n \xrightarrow{\mathbf{P}} \Delta(p_1,p_2), \quad \mathbf{E}\overline{T}_n \longrightarrow \Delta(p_1,p_2),$$

$$\Delta(p_1,p_2) = \int_0^1 d(x)\,dx \int_{|x|\le\tau} K^2(x)\,dx, \tag{33}$$

$$d(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2} p_k(x)(1-p_k(x)).$$

Далее, из леммы 2 и того факта, что $\left[\dfrac{x-1}{b_n}, \dfrac{x}{b_n}\right] \supset [-\tau,\tau]$, $x\in\Omega_n(\tau)$, получаем

$$\int_{\Omega_n} \big(\mathbf{E}p_{1n}(x) - \mathbf{E}p_{2n}(x)\big)^2\,dx =$$

$$= \int_{\Omega_n}\left(\int_{-\tau}^{\tau} K(t)\big(p_1(x-b_n(u)) - p_2(x-b_n(u))\big)^2\,du\right)dx + O\left(\frac{1}{nb_n}\right).$$

Но по условию $p_1(x), p_2(x) \in C^1[0,1]$ отсюда находим

$$\int_{\Omega_n} \big(\mathbf{E}p_{1n}(x) - \mathbf{E}p_{2n}(x)\big)^2\,dx = \int_0^1 \big(p_1(x)-p_2(x)\big)^2\,dx + O(b_n) + O\left(\frac{1}{nb_n}\right). \tag{34}$$

Используя (33) и (34), после несложных преобразований имеем

$$\gamma_n(p_1,p_2) = \mathbf{P}_{H_1}\left[\frac{\overline{T}_n - \mathbf{E}\overline{T}_n}{\sigma_n} \ge -nb_n^{1/2}\left(\int_0^1 \big(p_1(x)-p_2(x)\big)^2\,dx + o_p(1)\right)\right]. \tag{35}$$

Наконец, поскольку $(\overline{T}_n - \mathbf{E}\overline{T}_n)\sigma_n^{-1} \xrightarrow{d} N(0,1)$ (доказательство этого утверждения полностью аналогично доказательству (27)) и $nb_n^{1/2}\to\infty$, из (35) следует, что $\gamma_n(p_1,p_2)\to 1$ при $n\to\infty$.

Некоторые замечания. 1. Оценка $\widehat{p}_n(x)$ около границы интервала $[0,1]$ ведет себя хуже, чем во внутреннем интервале $\Omega_n(\tau) = [\tau b_n, 1-\tau b_n]$ (см. [10]). Поэтому мы рассматриваем интегральное квадратичное уклонение на $\Omega_n(\tau)$ для того, чтобы избежать трудностей, связанных с указанным граничным эффектом. Интегральное квадратичное уклонение на $[0,1]$ будет рассмотрено отдельно.

2. Пусть t_i — точки деления интервала $[0,1]$, выбранные так, что $H(t_j) = \dfrac{2j-1}{2n}$, $j = 1,\ldots,n$, где

$$H(x) = \int\limits_0^x h(u)\,du,$$

$h(u)$ — любая известная непрерывная плотность распределения на $[0,1]$. В этом случае рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно получить обобщение результатов данной работы.

1. *Efromovich S.* Nonparametric curve estimation. Methods, theory, and applications // Springer Ser. Statist. – New York: Springer-Verlag, 1999.
2. *Copas J. B.* Plotting p against x // Appl. Statist. – 1983. – **32**, № 2. – P. 25 – 31.
3. *Okumura H., Naito K.* Weighted kernel estimators in nonparametric binomial regression // Int. Conf. Recent Trends and Directions in Nonparametric Statistics: J. Nonparametr. Statist. – 2004. – **16**, № 1-2. – P. 39 – 62.
4. *Müller H.-G., Schmitt T* Kernel and probit estimates in quantal bioassay // J. Amer. Statist. Assoc. – 1988. – **83**, № 403. – P. 750 – 759.
5. *Aerts M., Veraverbeke N.* Bootstrapping a nonparametric polytomous regression model // Math. Methods Statist. – 1995. – **4**, № 2. – P. 189 – 200.
6. *Надарая Э. А.* Об оценке регрессии // Теория вероятностей и ее применения. – 1964. – **9**. – С. 157 – 159.
7. *Watson G. S.* Smooth regression analysis // Sankhya Ser. A. – 1964. – **26**. – P. 359 – 372.
8. *Nadaraya E., Babilua P., Sokhadze G.* Estimation of a distribution function by an indirect sample // Ukr. Math. J. – 2010. – **62**, № 12. – P. 1642 – 1658.
9. *Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н.* Функциональная центральная предельная теорема для семимартингалов // Теория вероятностей и ее применения. – 1980. – **25**, № 4. – С. 683 – 703.
10. *Hart J. D., Wehrly Th. E.* Kernel regression when the boundary region is large, with an application to testing the adequacy of polynomial models // J. Amer. Statist. Assoc. – 1992. – **87**, № 420. – P. 1018 – 1024.

Получено 16.04.14