УДК 517.518.8

$\boxed{\text{Г. В. Радзиевский}}$ (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
**А. Н. Нестеренко** (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

# МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ПРИБЛИЖЕНИЯ ПОСРЕДСТВОМ ФУНКЦИЙ С ЗАДАННЫМИ НОСИТЕЛЯМИ*

Let $L_p(S)$, $0 < p < +\infty$, be the Lebesgue space of measurable functions on $S$ with ordinary quasinorm $\|\cdot\|_p$. For the system of sets $\{B_t \mid t \in [0, +\infty)^n\}$ and the given function $\psi : [0, +\infty)^n \mapsto [0, +\infty)$, we establish necessary and sufficient conditions for the existence of the function $f \in L_p(S)$ such that $\inf\{\|f - g\|_p^p \mid g \in L_p(S),\ g = 0$ almost everywhere on $S \setminus B_t\} = \psi(t)$, $t \in [0, +\infty)^n$. As a corollary, we obtain the generalization and strengthening of the Dzhrbashyan theorem on the inverse problem of the approximation in $L_2$ by functions of exponential type.

Нехай $L_p(S)$, $0 < p < +\infty$, — простір Лебега вимірних функцій на $S$ зі звичайною квазінормою $\|\cdot\|_p$. Для системи множин $\{B_t \mid t \in [0, +\infty)^n\}$ і заданої функції $\psi : [0, +\infty)^n \mapsto [0, +\infty)$ знайдено необхідні та достатні умови існування такої функції $f \in L_p(S)$, що $\inf\{\|f - g\|_p^p \mid g \in L_p(S),\ g = 0$ майже скрізь на $S \setminus B_t\} = \psi(t)$, $t \in [0, +\infty)^n$. Як наслідок отримано узагальнення та посилення теореми Джрбашяна про обернену задачу наближення в $L_2$ за допомогою функцій експоненціального типу.

**1. Введение. Формулировка основного результата и некоторые его следствия.** В первых двух пунктах все функциональные пространства состоят либо из вещественнозначных, либо из комплекснозначных функций, а в п. 3 — из комплекснозначных. Пусть $\mathbb{N} := \{1, 2, \dots\}$, $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} := (-\infty, +\infty)$, а $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$. Для $n \in \mathbb{N}$, $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ полагаем

$$t \wedge s := (\min\{t_1, s_1\}, \dots, \min\{t_n, s_n\}),$$

а также $t \le s$ ($t < s$), если $t_k \le s_k$ (соответственно $t_k < s_k$) при всех $k \in \{1, \dots, n\}$. Пусть $0$ — нулевой вектор пространства $\mathbb{R}^n$.

Данная работа посвящена обратным задачам теории приближений. Первый фундаментальный результат в этом направлении был получен С. Н. Бернштейном [1]. В связи с этим возникли задачи И. П. Натансона [2 – 4] и М. Ф. Тимана [5, 6], а также теорема М. М. Джрбашяна [7], [8] (теорема VI.14.2), к которым непосредственно и восходят постановки задач, рассматриваемых в работе.

Задачи И. П. Натансона и М. Ф. Тимана представляют собой частные случаи следующей задачи.

**Задача.** Пусть $\{X_k \mid k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ — совокупность подпространств банахова пространства $X$ с нормой $\|\cdot\|$. Для последовательности чисел $\{\Psi(k) \mid k \in \mathbb{Z}_+^n\} \subset \mathbb{R}_+$ требуется найти необходимые и достаточные условия существования такого элемента $f \in X$, что

$$\inf\{\|f - g\| \mid g \in X_k\} = \Psi(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n. \tag{1}$$

Элемент $f$, удовлетворяющий соотношению (1), будем называть *решением обратной задачи* (1).

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект Ф7/329-2001).

И. П. Натансон поставил эту задачу для случая, когда $n = 2$, $X = C\big([0,1]^2\big)$, $\|\cdot\|$ — равномерная норма и $X_k$ — подпространство алгебраических многочленов от $x_1$ и $x_2$, степень которых по $x_1$ и $x_2$ не превышает $k_1$ и $k_2$ соответственно, а М. Ф. Тиман — также для случая $n = 2$, но когда $X = L_p\big([0,2\pi]^2\big)$, $1 \le p \le +\infty$, с соответствующей нормой и $X_k$ является подпространством тригонометрических полиномов от $x_1$ и $x_2$, порядки которых по $x_1$ и $x_2$ не превышают $k_1$ и $k_2$ соответственно. Ни задача И. П. Натансона, ни задача М. Ф. Тимана (при $p \ne 2$), насколько известно авторам, до сих пор не решены. В настоящей работе в качестве иллюстрации основного результата дано решение приведенной задачи для гильбертова пространства при дополнительных ограничениях на подпространства $\{X_k \mid k \in \mathbb{Z}_+^n\}$ (см. следствие 2 и примеры). Отсюда, в частности, следуют полученные ранее решения задачи М. Ф. Тимана и аналога задачи И. П. Натансона для пространства $X = L_2$ [6].

Теорема М. М. Джрбашяна относится к обратной задаче теории приближения функциями экспоненциального типа в $L_2(\mathbb{R})$, что, в свою очередь, в силу унитарности преобразования Фурье, равносильно приближению элементов из $L_2(\mathbb{R})$ функциями, носители которых сосредоточены на фиксированных отрезках. В данной работе установлено качественное обобщение теоремы М. М. Джрбашяна, а именно: изучена аппроксимация в $L_2(\mathbb{R}^r)$ и, что более важно, рассмотрен случай, когда носители функций, преобразования Фурье которых принадлежат аппроксимирующему множеству, занумерованы, как и в задачах И. П. Натансона и М. Ф. Тимана, многомерным параметром. Имеются другие уточнения этого результата М. М. Джрбашяна (см. следствие 4).

Пусть $L_p(S) = L_p(S, \mathcal{F}, \mu)$, $0 < p < +\infty$, — пространство измеримых относительно $\sigma$-алгебры $\mathcal{F}$ числовых функций $f$ на $S$, для которых квазинорма

$$\|f\|_p := \left(\int_S |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

конечна (при $p \ge 1$ это норма). Везде, кроме замечаний 2 и 3, относительно совокупности множеств $\{B_t \mid t \in \mathbb{R}_+^n\} \subset \mathcal{F}$ предполагаем выполнение условий

$$B_t \cap B_s = B_{t\wedge s}, \qquad t, s \in \mathbb{R}_+^n, \tag{2}$$

$$\bigcap \{B_s \mid t < s\} = B_t, \qquad t \in \mathbb{R}_+^n, \tag{3}$$

$$\mu(B_t) < +\infty, \qquad t \in \mathbb{R}_+^n, \tag{4}$$

$$\bigcup \{B_t \mid t \in \mathbb{R}_+^n\} = S. \tag{5}$$

Отметим, что условие (2) гарантирует расширяемость совокупности множеств $\{B_t \mid t \in \mathbb{R}_+^n\} \subset \mathcal{F}$ в следующем смысле:

$$B_t \subset B_s, \qquad t, s \in \mathbb{R}_+^n, \qquad t \le s. \tag{6}$$

Определим подпространство $X_t$ равенством

$$X_t := \{g \in L_p(S) \mid g(x) = 0 \text{ для почти всех } x \in S \setminus B_t\}, \qquad t \in \mathbb{R}_+^n.$$

В работе дано решение следующего обобщения для непрерывного параметра одного частного случая сформулированной ранее задачи: при каких условиях на функцию $\psi: \mathbb{R}_+^n \mapsto \mathbb{R}_+$ существует такая функция $f \in L_p(S)$, что

$$\inf\{\|f - g\|_p^p \mid g \in X_t\} = \psi(t), \quad t \in \mathbb{R}_+^n. \tag{7}$$

В дальнейшем предполагаем, что $B_0 \neq S$, поскольку, вследствие включения (6), из предположения $B_0 = S$ вытекает равенство нулю функции $\psi$.

Пусть функция $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, а $t, s \in \mathbb{R}^n$, $t < s$. Через $\Delta_{(t_k, s_k]}\varphi$ обозначим приращение функции $\varphi$ по $k$-й переменной на полуинтервале $(t_k, s_k]$, т. е.

$$\left(\Delta_{(t_k, s_k]}\varphi\right)(u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_n) := \varphi(u_1,\ldots,u_{k-1},s_k,u_{k+1},\ldots,u_n) -$$

$$- \varphi(u_1,\ldots,u_{k-1},t_k,u_{k+1},\ldots,u_n), \qquad (u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_n) \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Приращением функции $\varphi$ на брусе $(t, s] = \prod_{k=1}^{n}(t_k, s_k]$ (являющимся прямым произведением полуинтервалов $(t_k, s_k]$) называется число $\Delta^n_{(t,s]}\varphi := \Delta_{(t_n, s_n]} \ldots \Delta_{(t_1, s_1]}\varphi$. Например, если $n = 2$, то $\Delta^2_{(t,s]}\varphi = \varphi(s_1, s_2) - \varphi(t_1, s_2) - \varphi(s_1, t_2) + \varphi(t_1, t_2)$.

**Определение 1** [9] (гл. II. п. 5.2). *Функция* $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *называется неубывающей (невозрастающей) по совокупности переменных, если для всех* $t$, $s \in \mathbb{R}^n$, $t < s$, *выполняется неравенство* $\Delta^n_{(t,s]}\varphi \geq 0$ ($\Delta^n_{(t,s]}\varphi \leq 0$ *соответственно*).

При $n = 1$ введенные понятия совпадают с обычными понятиями неубывающей и невозрастающей на $\mathbb{R}$ функции, поскольку неравенства $\Delta_{(t,s]}\varphi \geq 0$ и $\varphi(s) \geq \varphi(t)$, $t < s$, равносильны.

Пусть функция $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ является неубывающей по совокупности переменных и непрерывной справа (т. е. $\lim_{s \to t, s \geq t}\varphi(s) = \varphi(t)$, $t \in \mathbb{R}^n$). Известно [9] (гл. II, § 5), что такая функция $\varphi$ порождает меру Лебега – Стильтьеса на некоторой $\sigma$-алгебре подмножеств $\mathbb{R}^n$, содержащей борелевскую $\sigma$-алгебру $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Сужение этой меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\lambda_\varphi$. Заметим, что $\lambda_\varphi((t, s]) = \Delta^n_{(t,s]}\varphi$, $t < s$. Если же непрерывная справа функция $\varphi : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ является невозрастающей по совокупности переменных, то $-\varphi$ — неубывающая по совокупности переменных функция. Следовательно, она порождает некоторую меру Лебега – Стильтьеса, сужение которой на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ обозначим через $\lambda_{-\varphi}$. При этом $\lambda_{-\varphi}((t, s]) = -\Delta^n_{(t,s]}\varphi$, $t < s$.

Напомним, что мера $\lambda$ называется абсолютно непрерывной относительно меры $\rho$ на некоторой $\sigma$-алгебре $\mathcal{A}$ (обозначается $\lambda << \rho$), если для каждого множества $A \in \mathcal{A}$ из $\rho(A) = 0$ следует $\lambda(A) = 0$. При этом существует производная Радона – Никодима $\dfrac{d\lambda}{d\rho}$, являющаяся измеримой (относительно $\mathcal{A}$) функцией [10] (гл. 6, § 32).

Доопределим для $t \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$ совокупность множеств $\{B_t \mid t \in \mathbb{R}^n_+\} \subset \mathcal{F}$ формулой $B_t := B_0$, $t \in \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n_+$, и положим $\nu(t) := \mu(B_t)$, $t \in \mathbb{R}^n$.

Функция $\nu$ не убывает по совокупности переменных и непрерывна справа на $\mathbb{R}^n$. Действительно, введя множества

$$\left(\Delta_{(t_k, s_k]}B\right)_{(u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_n)} :=$$

$$:= B_{(u_1,\ldots,u_{k-1},s_k,u_{k+1},\ldots,u_n)} \setminus B_{(u_1,\ldots,u_{k-1},t_k,u_{k+1},\ldots,u_n)},$$

$$(u_1,\ldots,u_{k-1},u_{k+1},\ldots,u_n)\in\mathbb{R}^{n-1},$$

положим $\Delta^n_{(t,s]}B := \Delta_{(t_n,s_n]}\ldots\Delta_{(t_1,s_1]}B$. В этих обозначениях из аддитивности меры и условия (6) имеем $\Delta^n_{(t,s]}\nu = \mu\big(\Delta^n_{(t,s]}B\big)$, $t,s\in\mathbb{R}^n$, $t<s$, откуда и следует неубывание $\nu$ по совокупности переменных. Непрерывность справа на $\mathbb{R}^n$ этой функции вытекает из условия (3).

Введем множества

$$S_\xi := B_\xi \setminus \bigcup\{B_t \mid t\le\xi,\ t\ne\xi\},\qquad \xi\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}.$$

**Лемма.** *Для каждого* $x\in S\setminus B_0$ *существует единственный вектор* $\xi=\xi(x)$ *из* $\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$, *для которого* $x$ *принадлежит* $S_\xi$. *Отображение* $\xi\colon S\setminus B_0\mapsto \mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}$ *измеримо.*

Доказательство леммы приведено в п. 2.

Продолжим функцию $\psi$ из соотношения (7) на $\mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\psi(t) := \psi(0),\qquad t\in\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n_+. \tag{8}$$

Во введенных обозначениях справедливо такое утверждение.

**Теорема.** *Для существования функции* $f\in L_p(S)$, *удовлетворяющей соотношению* (7), *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\psi$ *не возрастала по совокупности переменных, была непрерывной справа на* $\mathbb{R}^n$, $\psi(t)\to 0$, $t_1\to+\infty,\ldots,t_n\to+\infty$, *и* $\lambda_{-\psi} \ll \lambda_\nu$. *При этом* $f$ *можно задать формулами*

$$f(x) := 0,\qquad x\in B_0,\qquad f(x) := \left(\frac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_\nu}(\xi(x))\right)^{1/p},\qquad x\in S\setminus B_0. \tag{9}$$

Доказательство теоремы приведено в п. 2.

***Замечание* 1.** При $n>1$ условие невозрастания функции $\psi$ по совокупности переменных нельзя заменить условием $\Delta^n_{(t,s]}\psi\le 0$ для всех $0\le t<s$. Поясним это для $n=2$. В силу определения (8), условие неубывания функции $\psi$ по совокупности переменных равносильно выполнению следующих неравенств: $\Delta^2_{(t,s]}\psi\le 0$, $\big(\Delta_{(t_1,s_1]}\psi\big)(u_2)\le 0$, $\big(\Delta_{(t_2,s_2]}\psi\big)(u_1)\le 0$ для всех $0\le t<s$, $u_1\ge 0$, $u_2\ge 0$. При этом из выполнения первого неравенства не вытекает выполнение двух последних, что показывает пример

$$\psi(t_1,t_2) = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{1+t_1} - \frac{t_2\operatorname{arctg} t_1}{1+t_2},\qquad t_1\ge 0,\qquad t_2\ge 0.$$

Здесь в качестве иллюстрации теоремы приведем два ее следствия.

Пусть

$$l_p\big(\mathbb{Z}^n_+\big) := \left\{ f=\left\{f(k)\colon k\in\mathbb{Z}^n_+\right\} \,\middle|\, \|f\|^p_{l_p(\mathbb{Z}^n_+)} := \sum_{k\in\mathbb{Z}^n_+}|f(k)|^p<+\infty\right\},\ 0<p<+\infty,$$

$$B_k := \{j\in\mathbb{Z}^n_+ \mid j\le k\},$$

$$l^{(k)}_p\big(\mathbb{Z}^n_+\big) := \{g\in l_p\big(\mathbb{Z}^n_+\big) \mid g(j)=0,\ j\in\mathbb{Z}^n_+\setminus B_k\},\qquad k\in\mathbb{Z}^n_+.$$

Для заданной последовательности чисел $\Psi=\left\{\Psi(k)\colon k\in\mathbb{Z}^n_+\right\}\subset\mathbb{R}$ положим $\Psi(k):=\Psi(0)$, $k\in\mathbb{Z}^n\setminus\mathbb{Z}^n_+$. Ниже при $k\in\mathbb{Z}^n$ полагаем $k-1:=(k_1-1,\ldots,k_n-1)$.

***Следствие* 1.** *Для существования элемента* $f \in l_p(\mathbb{Z}_+^n)$, *удовлетворяющего соотношению*

$$\inf\left\{ \| f - g \|^p_{l_p(\mathbb{Z}_+^n)} \mid g \in l_p^{(k)}(\mathbb{Z}_+^n) \right\} = \Psi(k), \qquad k \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{10}$$

*необходимо и достаточно, чтобы для последовательности* $\Psi$ *выполнялись условия* $\Delta^n_{(k-1,k]}\Psi \le 0$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$, *и* $\Psi(k) \to 0$, $k_1 \to +\infty, \ldots, k_n \to +\infty$. *При этом координаты элемента* $f$ *можно задать формулой* $f(k) :=$ $:= \left(-\Delta^n_{(k-1,k]}\Psi\right)^{1/p}$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$.

***Доказательство.*** Чтобы свести следствие 1 к теореме, положим $S := \mathbb{Z}^n_+$, $\mu(\{k\}) := 1$, $k \in S$, и определим для $t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n_+$ множества $B_t :=$ $:= \{ k \in \mathbb{Z}^n_+ \mid k \le t \}$ и функцию $\psi(t) := \Psi(\llbracket t \rrbracket)$, $\llbracket t \rrbracket = (\llbracket t_1 \rrbracket, \ldots, \llbracket t_n \rrbracket)$ (здесь $\llbracket t_j \rrbracket$ — целая часть числа $t_j$). Тогда соотношение (10) равносильно соотношению (7), поэтому первое утверждение следствия 1 вытекает из первого утверждения теоремы. Ясно также, что $\xi(k) = k$, $k \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus \{0\}$. Непосредственно из определения производной Радона – Никодима получаем

$$\frac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_\nu}(k) = -\Delta^n_{(k-1,k]}\Psi, \qquad k \in \mathbb{Z}^n_+ \setminus \{0\}.$$

Кроме того, $\Delta^n_{(k-1,k]}\Psi = 0$ при $k = 0$. Отсюда и из (9) вытекает указанная в следствии 1 формула для координат элемента $f$, являющегося решением задачи (10).

Приведем теперь решение задачи (1) для гильбертова пространства. В данном случае наименьшие уклонения (1) удобно заменить на

$$\inf\left\{ \| f - g \|^2 \mid g \in X_k \right\} = \Psi(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{11}$$

Пусть $\Lambda$ — некоторое множество индексов, а $\{ X_k \mid k \in \Lambda \}$ — множества банахова пространства $X$. Обозначим через $\operatorname{span}\{ X_k \mid k \in \Lambda \}$ линейную оболочку множеств $\{ X_k \mid k \in \Lambda \}$, а через $\overline{\operatorname{span}\{ X_k \mid k \in \Lambda \}}$ — ее замыкание по норме $X$.

***Следствие* 2.** *Предположим, что* $\{ M_k \mid k \in \mathbb{Z}^n_+ \} \subset X$ — *совокупность ненулевых ортогональных подпространств гильбертова пространства* $X$, $X_k :=$ $:= \operatorname{span}\{ M_j \mid 0 \le j \le k \}$, $k \in \mathbb{Z}^n_+$, *и* $\overline{\operatorname{span}\{ M_j \mid j \in \mathbb{Z}^n_+ \}} = X$. *Тогда для существования элемента* $f \in X$, *удовлетворяющего соотношению* (11), *необходимо и достаточно, чтобы последовательность* $\Psi$ *была такой же, как и в следствии* 1.

***Доказательство.*** Пусть $f$ — решение задачи (11). Тогда найдутся коэффициенты $c_k$ и элементы $e_k \in M_k$ с $\| e_k \| = 1$, для которых $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n_+} c_k e_k$. Определив подпространства $H_k := \operatorname{span}\{ e_j \mid 0 \le j \le k \}$, $H := \overline{\operatorname{span}\{ M_j \mid j \in \mathbb{Z}^n_+ \}}$, запишем равенство (11) в равносильном виде

$$\inf\left\{ \| f - g \|^2 \mid g \in H_k \right\} = \Psi(k), \qquad k \in \mathbb{Z}^n_+. \tag{12}$$

Введем такой изометрический оператор $U \colon H \mapsto l_2(\mathbb{Z}^n_+)$, что $U(H_k) = l_2^{(k)}(\mathbb{Z}^n_+)$. Но $\| Uf - Ug \|_{l_2(\mathbb{Z}^n_+)} = \| f - g \|$, и поэтому равенство (12) равносильно равенству (10) при $p = 2$, если в нем $f$ принять равным $Uf$. Тем самым последовательность $\Psi$ должна удовлетворять условиям из следствия 1.

Для доказательства достаточности выберем вначале векторы $e_k \in M_k$ с $\| e_k \| = 1$, а затем по ним, как и ранее, определим подпространства $H_k$, $H$ и оператор $U$. Далее по последовательности $\Psi$, согласно следствию 1, построим элемент $f \in l_2(\mathbb{Z}_+^n)$, являющийся решением задачи (10). Тогда элемент $U^{-1} f$ будет решением задачи (12) с $f$ равным $U^{-1} f$. Но $U^{-1} f \in H$, а $H$ — подпространство пространства $X$. Поэтому, рассматривая $U^{-1} f$ как элемент из $X$, получаем, что он является решением задачи (11).

Условие ортогональности подпространств $\{ M_k \mid k \in \mathbb{Z}_+^n \}$ существенно для того, чтобы условие $\Delta^n_{(k-1,k]} \Psi \le 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$, было как необходимым, так и достаточным для справедливости следствия 2. Покажем это на двух примерах.

***Пример* 1.** Пусть гильбертово пространство $X := l_2(\mathbb{Z}_+)$, $e_j := (\delta_{1,j}, \delta_{2,j}, \dots)$, $j \in \mathbb{N}$, — его ортонормированный базис (здесь $\delta_{h,j}$ — символ Кронекера), а $\tau$ — любое взаимно однозначное соответствие между множествами $\left\{ k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2 \mid k_1 + k_2 \ge 2 \right\}$ и $\{ 4, 5, \dots \}$. Считая $n := 2$, полагаем $M_{(0,0)} := := \operatorname{span}\{ e_1 \}$, $M_{(1,0)} := \operatorname{span}\{ e_2 \}$, $M_{(0,1)} := \operatorname{span}\{ e_2 + e_3 \}$, $M_k := := \operatorname{span}\{ e_{\tau(k)} \}$ при $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ с $k_1 + k_2 \ge 2$. Тогда для $f := e_2$ наименьшие уклонения, заданные соотношением (11), равны $\Psi(1, 1) = 0$, $\Psi(0, 1) = 1/2$, $\Psi(1, 0) = 0$, $\Psi(0, 0) = 1$, поэтому $\Delta^2_{(0,1]} \Psi > 0$. Следовательно, условие $\Delta^n_{(k-1,k]} \Psi \le 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$, не является необходимым в случае неортогональных подпространств $\{ M_k \mid k \in \mathbb{Z}_+^n \}$.

***Пример* 2.** Рассматриваем то же пространство $X$ и ту же совокупность подпространств $\{ M_k \mid k \in \mathbb{Z}_+^2 \}$, что и в примере 1. Положим $\Psi(k) := \delta_{0,k_1}$, $k = = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}_+^2$. Тогда для последовательности $\Psi = \{ \Psi(k) \mid k \in \mathbb{Z}_+^n \}$ выполнено условие $\Delta^n_{(k-1,k]} \Psi \le 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$. Допустим, что существует элемент $f \in X$, удовлетворяющий соотношению (11). Отсюда с учетом условия $\Psi(1, 0) = 0$ имеем $f = (x, y, 0, 0, \dots)$, а так как $\Psi(0, 0) = 1$, то $|y| = 1$. Но для $f = (x, y, 0, 0, \dots)$ с $|y| = 1$ соотношение (11) при $k = (0, 1)$ не выполняется, поскольку его левая часть равна $1/2$, а правая — $\Psi(0, 1) = 1$. Поэтому если подпространства $\{ M_k \mid k \in \mathbb{Z}_+^n \}$ не ортогональны, то условие $\Delta^n_{(k-1,k]} \Psi \le 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$, не гарантирует существования элемента $f$, удовлетворяющего соотношению (11).

**2. Доказательство основного результата.** ***Доказательство леммы.*** Из условия (5) следует, что для каждого $x \in S \setminus B_0$ найдется $t^\circ = (t_1^\circ, \dots, t_n^\circ) \in \mathbb{R}_+^n$, для которого $x$ принадлежит $B_{t^0}$. Положим

$$\xi_k := \inf \left\{ t_k \ge 0 \mid x \in B_{(t_1^\circ, \dots, t_{k-1}^\circ, t_k, t_{k+1}^\circ, \dots, t_n^\circ)} \right\},$$

$$t_*^k := (t_1^\circ, \dots, t_{k-1}^\circ, \xi_k, t_{k+1}^\circ, \dots, t_n^\circ), \qquad \xi := t_*^1 \wedge \dots \wedge t_*^n = (\xi_1, \dots, \xi_n).$$

Согласно определению $t_*^k$ и соотношению (6) $x$ принадлежит $B_s$ для всех $s > > t_*^k$, откуда с учетом (3) получаем, что $x$ принадлежит $B_{t_*^k}$, а с учетом равенства (2) — и $B_\xi$. При этом $\xi \ne 0$, поскольку $x$ не принадлежит $B_0$. Из определения $\xi_k$ следует, что $x$ не принадлежит $B_t$ ни при каком $t \le \xi$ и $t \ne \xi$. Тем самым, $x$ принадлежит $S_\xi$ и существование указанного в лемме вектора $\xi$ доказано.

Покажем его единственность.

Допустим, что для некоторого $x \in S \setminus B_0$ существуют разные векторы $\xi$ и $\xi^*$ из $\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ такие, что $x$ принадлежит и $S_\xi$, и $S_{\xi^*}$. Поэтому $x$ принадлежит $B_\xi$ и $B_{\xi^*}$, а значит, $x$ принадлежит $B_{\xi \wedge \xi^*}$. Но при $\xi \neq \xi^*$ хотя бы в одном из неравенств $\xi \wedge \xi^* \leq \xi$, $\xi \wedge \xi^* \leq \xi^*$ нет равенства, следовательно, либо $x \notin S_\xi$, либо $x \notin S_{\xi^*}$.

Наконец, докажем измеримость отображения $\xi$. Пусть для $t^\circ \in \mathbb{R}^n$ $\xi^{-1}((-\infty, t^\circ]) := \{x \in S \setminus B_0 \mid \xi(x) \leq t^\circ\}$ — прообраз множества $(-\infty, t^\circ] = \prod_{k=1}^n \left(-\infty, t_k^\circ\right]$ при отображении $\xi$. Если вектор $t^\circ \in \mathbb{R}^n$ такой, что $B_{t^\circ} \setminus B_0 \neq \varnothing$, то с учетом определения множества $S_\xi$ и того, что, согласно доказанному, для каждого $x \in B_{t^\circ} \setminus B_0$ существует $t \leq t^\circ$, для которого $x$ принадлежит $S_t$, получаем $B_{t^\circ} \setminus B_0 \subset \bigcup \{ S_t \mid t \leq t^\circ \}$. Обратное включение очевидно. Отсюда и из определения отображения $\xi$ имеем

$$\xi^{-1}\Big(\left(-\infty, t^\circ\right]\Big) = B_{t^\circ} \setminus B_0, \qquad t^\circ \in \mathbb{R}^n. \tag{13}$$

Это равенство справедливо и для таких векторов $t^\circ \in \mathbb{R}^n$, что $B_{t^\circ} = B_0$ (в частности, если $t^\circ \in \mathbb{R}^n \setminus (\mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\})$), поскольку при этом $S_t = \varnothing$ для всех $t \leq t^\circ$, а значит, $\xi^{-1}\Big(\left(-\infty, t^\circ\right]\Big) = \varnothing$. Теперь измеримость отображения $\xi$ следует из (13) и измеримости множеств $B_{t^\circ} \setminus B_0$ при $t^\circ \in \mathbb{R}^n$.

***Доказательство теоремы.*** *Необходимость.* Для каждой функции $f \in L_p(S)$ при фиксированном $t \in \mathbb{R}^n_+$ элемент ее наилучшего приближения $g$ из подпространства $X_t$ задается формулами $g(x) = f(x)$, $x \in B_t$, и $g(x) = 0$, $x \in S \setminus B_t$. Поэтому $p$-я степень величины ее наилучшего приближения

$$\psi(t) = \inf\left\{ \| f - g \|_p^p \mid g \in X_t \right\} = \int_{S \setminus B_t} |f|^p d\mu, \qquad t \in \mathbb{R}^n_+. \tag{14}$$

Отсюда, полагая

$$\varphi(t) = \int_{B_t} |f|^p d\mu, \qquad t \in \mathbb{R}^n,$$

получаем $\psi(0) - \psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$, $t \in \mathbb{R}^n$. Но

$$\Delta^n_{(t,s]} \varphi = \int_{\Delta^n_{(t,s]} B} |f|^p d\mu, \qquad t, s \in \mathbb{R}^n, \qquad t < s, \tag{15}$$

поэтому функция $\varphi$ не убывает по совокупности переменных, а значит, такой же является и функция $-\psi$, отличающаяся от $\varphi$ на постоянную. Непрерывность справа $\psi$ и соотношение $\psi(t) \to 0$ при $t_1 \to +\infty, \ldots, t_n \to +\infty$ следуют из формулы (14) и условий (3) и (5) соответственно.

Для доказательства соотношения $\lambda_{-\psi} \ll \lambda_\nu$ достаточно установить, что $\lambda_\varphi \ll \lambda_\nu$, поскольку $\psi(0) - \psi(t) = \varphi(t) - \varphi(0)$, $t \in \mathbb{R}^n$. Пусть $\xi^{-1}(C) := \{ x \in S \setminus B_0 \mid \xi(x) \in C \}$ — прообраз множества $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ при отображении $\xi$. Положим

$$\tilde{\mu}(B) := \int_B |f|^p d\mu, \qquad B \in \mathcal{F}, \qquad \tilde{\mu}\xi^{-1}(C) := \tilde{\mu}\big(\xi^{-1}(C)\big), \qquad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n).$$

Последнее определение корректно, так как, согласно лемме, отображение $\xi$ измеримо; при этом $\tilde{\mu}\xi^{-1}$ — мера на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Из формулы (15) следует $\lambda_\varphi((t,s]) = \tilde{\mu}\xi^{-1}((t,s])$, $t<s$. Используя теоремы о единственности продолжения $\sigma$-конечных мер [10] (гл. 2, § 8, упр. 5 и гл. 3, § 13, теорема 1), получаем равенство $\lambda_\varphi = \tilde{\mu}\xi^{-1}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. С помощью формулы $\Delta^n_{(t,s]}\nu = \mu\big(\Delta^n_{(t,s]}B\big)$, $t < s$, аналогично устанавливаем, что $\lambda_\nu = \mu\xi^{-1}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Далее, если $\lambda_\nu(C)=0$ для $C\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, то $\mu\big(\xi^{-1}(C)\big)=0$, следовательно, в силу абсолютной непрерывности интеграла [10] (гл. 5, § 25, теорема 3), $\tilde{\mu}\big(\xi^{-1}(C)\big)=0$, а значит, и $\lambda_\varphi(C)=0$.

*Достаточность.* Учитывая построения, приведенные при доказательстве необходимости, достаточно показать, что функция $f$, определенная формулами (9), удовлетворяет равенству

$$\int\limits_{B_t\setminus B_0} |f|^p d\mu = \psi(0)-\psi(t), \qquad t\in\mathbb{R}^n_+. \tag{16}$$

Заметим, что эта функция $f$ измерима относительно $\mathcal{F}$ [10] (гл. 8, § 39, теорема 2), поскольку производная Радона – Никодима $\dfrac{d\lambda_\varphi}{d\lambda_\nu}:\mathbb{R}^n\mapsto\mathbb{R}$ является борелевской функцией, а отображение $\xi$ измеримо согласно лемме. Подставляя в левую часть (16) формулу (9), используя теорему о замене переменной в интеграле Лебега [10] (гл. 8, § 39, теорема 3) и учитывая установленное при доказательстве необходимости соотношение $\lambda_\nu=\mu\xi^{-1}$ на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, для произвольного $s<0$ имеем (пояснения к двум последним равенствам см. ниже)

$$\int\limits_{B_t\setminus B_0} |f(u)|^p\,d\mu(u) = \int\limits_{B_t\setminus B_0}\frac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_\nu}(\xi(u))\,d\mu(u) = \int\limits_{[0,t]\setminus\{0\}}\frac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_\nu}(w)\,d\lambda_\nu(w) =$$

$$= \lambda_{-\psi}([0,t]\setminus\{0\}) = \lambda_{-\psi}((s,t]) = \psi(0)-\psi(t), \qquad t\in\mathbb{R}^n_+\setminus\{0\}.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что $\lambda_{-\psi}(C)=0$ для произвольного борелевского множества $C\subset\big(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n_+\big)\cup\{0\}$, так как функция $\psi$ постоянна на множестве $\big(\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{R}^n_+\big)\cup\{0\}$. Чтобы доказать последнее равенство, заметим, что $\psi(u)-\psi(0)=0$ для всех векторов $u\in\mathbb{R}^n$, имеющих хотя бы одну отрицательную координату, следовательно,

$$\psi(0)-\psi(t) = -\Delta^n_{(s,t]}(\psi(\cdot)-\psi(0)) = -\Delta^n_{(s,t]}\psi = \lambda_{-\psi}((s,t]).$$

Переходя в формуле (16) к пределу при $t_1\to+\infty,\ldots,t_n\to+\infty$, заключаем, что $f\in L_p(S)$.

В следующих двух замечаниях показано, как ослабить требования, налагаемые на систему множеств $\big\{B_t \mid t\in\mathbb{R}^n_+\big\}$, и как при этом изменится формулировка теоремы.

***Замечания.* 2.** Пусть выполнены условия (2) – (4) и не выполнено условие (5). Положим $B_\infty := \bigcup\big\{B_t \mid t\in\mathbb{R}^n_+\big\}$. Если не существует множества $\tilde{B}\in\mathcal{F}$, для которого $\tilde{B}\subset S\setminus B_\infty$ и $0<\mu(\tilde{B})<+\infty$, то в теореме все условия на функцию $\psi$ остаются без изменений. Если же такое множество $\tilde{B}$ существует, то только условие $\psi(t)\to 0$, $t_1\to+\infty,\ldots,t_n\to+\infty$, заменяется условием $\psi(t)\to$

$\to a,\ t_1 \to +\infty, \ldots, t_n \to +\infty,$ для некоторого $a \in [0, \psi(0)]$. При этом функцию $f$ на множестве $B_\infty$ можно определить формулой (9), заменив в ней $S$ на $B_\infty$ и положив

$$f(x) := \frac{a}{(\mu(\tilde{B}))^{1/p}}, \quad x \in \tilde{B}, \quad f(x) := 0, \quad x \in S \setminus \left(B_\infty \cup \tilde{B}\right).$$

**3.** При выполнении условий (2), (3) и (5) условие (4) можно заменить требованием, чтобы мера $\mu$ была $\sigma$-конечной на $S$. Действительно, пусть $\{A_k \mid k \geq 1\} \subset \mathcal{F}$ — счетный набор непересекающихся множеств такой, что $S = \bigcup \{A_k \mid k \geq 1\}$ и $0 < \mu(A_k) < +\infty,\ k \geq 1$. Тогда мера

$$\tilde{\mu}(B) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(A_k \cap B)}{2^k \mu(A_k)}, \quad B \in \mathcal{F},$$

является конечной, $\tilde{\mu} << \mu$ и $\mu << \tilde{\mu}$. С помощью формулы замены меры [10] (гл. 6, § 32, теорема 2) легко установить, что условия на функцию $\psi$ остаются теми же, что и в теореме (только $\nu(t) := \tilde{\mu}(B_t),\ t \in \mathbb{R}^n$). При этом формула

$$f(x) := \left(\frac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_\nu}(\xi(x))\frac{d\tilde{\mu}}{d\mu}(x)\right)^{1/p}, \quad x \in S \setminus B_0, \quad f(x) := 0, \quad x \in B_0,$$

дает решение обратной задачи (7).

**3. Обратная задача приближения целыми функциями экспоненциального типа.** В дальнейшем, если не оговорено противное, в арифметическом вещественном пространстве $\mathbb{R}^r,\ r \in \mathbb{N}$, рассматривается евклидова норма $|\cdot|_r$, порожденная скалярным произведением

$$(x, y) := \sum_{k=1}^{r} x_k y_k, \quad x = (x_1, \ldots, x_r) \in \mathbb{R}^r, \quad y = (y_1, \ldots, y_r) \in \mathbb{R}^r.$$

**Определение 2.** *Множество $K \subset \mathbb{R}^r,\ r \in \mathbb{N}$, называется симметрическим, если для любого $x \in K$ элемент $-x$ принадлежит $K$. Выпуклое компактное симметрическое множество, имеющее хотя бы одну внутреннюю точку, называется симметрическим телом.*

Известно, что для симметрического тела $K \subset \mathbb{R}^r$ функционал Минковского $\|x\|_K := \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha K\},\ x \in \mathbb{R}^r$, является нормой на $\mathbb{R}^r$.

Через $\lambda_r$ обозначается сужение меры Лебега на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$, а в качестве пространства с мерой $(S, \mathcal{F}, \mu)$ рассматривается $(\mathbb{R}^r, \mathcal{B}(\mathbb{R}^r), \lambda_r)$.

Пусть функция $\psi$, определенная на $\mathbb{R}^n$ по функции $\psi$ формулой (8), удовлетворяет всем условиям теоремы, кроме, быть может, условия $\lambda_{-\psi} << \lambda_\nu$. Предположим, что $\lambda_{-\psi} << \lambda_n$. Тогда [11] (§ 10, п. 3, теорема 1 и § 10, п. 4) для $\lambda_n$-почти всех $t \in \mathbb{R}^n$ существует производная

$$\psi^{(n)}_{12\ldots n}(t) := \lim_{h \to 0+} \frac{\lambda_{-\psi}((t, t+h])}{\lambda_n((t, t+h])} =$$

$$= \lim_{h \to 0+} \frac{-\Delta^n_{(t, t+h]}\psi}{h^n}, \quad t + h := (t_1 + h, \ldots, t_n + h), \tag{17}$$

и справедливо равенство $\psi^{(n)}_{12\ldots n}(t) = \dfrac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_n}(t)$, причем $\psi^{(n)}_{12\ldots n}$ является борелевской функцией на $\mathbb{R}^n$. В частности, при $n = 1$, как следует из [11], указанную производную можно понимать как обычную производную, а соотношение $\lambda_{-\psi} \ll \lambda_n$ равносильно тому, что $\psi$ — абсолютно непрерывная функция. В случае произвольного $n \in \mathbb{N}$, если $\psi$ имеет все частные производные до порядка $n$ включительно, являющиеся непрерывными на $\mathbb{R}^n$, $\psi_{12\ldots n}^{(n)}$ существует и равна обычной смешанной производной $n$-го порядка, взятой по каждой переменной один раз в произвольном порядке.

Использовав понятие производной (17), сформулируем следствие теоремы.

***Следствие* 3.** *Пусть* $K_j \subset \mathbb{R}^{r_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *— симметрические тела,*

$$B_t := \prod_{j=1}^{n} (t_j K_j), \qquad t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}_+^n.$$

*Тогда для существования функции* $f \in L_p(\mathbb{R}^r)$, *где* $r = r_1 + \ldots + r_n$, $0 < p < +\infty$, *удовлетворяющей соотношению* (7), *необходимо и достаточно, чтобы функция* $\psi$ *была непрерывной справа на* $\mathbb{R}_+^n$, $\Delta_{(t,s]}^n \psi \le 0$, $0 \le t < s$, $\psi(t) \to 0$, $t_1 \to \to +\infty, \ldots, t_n \to +\infty$, $\psi(t) = \psi(0)$ *для всех* $t \in \partial \mathbb{R}_+^n$ *и* $\lambda_{-\psi} \ll \lambda_n$ ($\partial \mathbb{R}_+^n$ *— граница множества* $\mathbb{R}_+^n$). *При этом* $f$ *можно задать формулой*

$$f(x) := \left( -\frac{\psi_{12\ldots n}^{(n)}\left( \|x_1\|_{K_1}, \ldots, \|x_n\|_{K_n} \right)}{\prod_{j=1}^{n} r_j \lambda_{r_j}(K_j) \|x_j\|_{K_j}^{r_j - 1}} \right)^{1/p}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad x_j \in \mathbb{R}^{r_j} \setminus \{0\}. \tag{18}$$

***Доказательство.*** Заметим, что совокупность множеств $\left\{ B_t \mid t \in \mathbb{R}_+^n \right\}$, введенных в формулировке данного следствия, принадлежит $\mathcal{B}(\mathbb{R}^r)$ и удовлетворяет условиям (2) – (5), что вытекает из свойств симметрических тел.

Использовав теорему, вначале установим достаточность и выведем формулу (18).

С учетом (8) и равенства $\psi(t) = \psi(0)$, $t \in \partial \mathbb{R}_+^n$, заключаем, что, во-первых, из неравенства $\Delta_{(t,s]}^n \psi \le 0$ при $0 \le t < s$ следует это же неравенство для всех $t, s \in \mathbb{R}^n$, $t < s$, а во-вторых, непрерывность справа $\psi$ на $\mathbb{R}_+^n$ влечет выполнение этого же свойства для $\psi$ на $\mathbb{R}^n$.

Ниже полагаем, что $\bigcup \{ A_\alpha \mid \alpha \in \varnothing \} := \varnothing$. Тогда при $\xi \in \mathbb{R}_+^n \setminus \{0\}$ имеем

$$S_\xi := B_\xi \setminus \bigcup \{ B_t \mid 0 \le t \le \xi,\ t \ne \xi \} =$$

$$= \prod_{j=1}^{n} \left( \xi_j K_j \setminus \bigcup \left\{ t_j K_j \mid 0 \le t_j < \xi_j \right\} \right) = \prod_{j=1}^{n} \left\{ x_j \in \mathbb{R}^{r_j} \,\middle|\, \|x_j\|_{K_j} = \xi_j \right\},$$

следовательно, отображение $\xi$ из леммы имеет вид $\xi(x) = \left( \|x_1\|_{K_1}, \ldots, \|x_n\|_{K_n} \right)$, $x \in \mathbb{R}^r \setminus \{0\}$.

Учитывая равенство

$$\nu(t) = \lambda_r(B_t) = \prod_{j=1}^{n} \lambda_{r_j}(K_j) t_j^{r_j}, \qquad t \in \mathbb{R}_+^n,$$

а следовательно, существование непрерывной смешанной производной

$$\nu_{12\ldots n}^{(n)}(t) \;=\; \prod_{j=1}^{n} r_j \lambda_{r_j}(K_j) t_j^{r_j-1} \;\neq\; 0, \qquad t \in (0, +\infty)^n,$$

заключаем, что $\lambda_\nu << \lambda_n$ и $\lambda_n << \lambda_\nu$ на $\mathcal{B}\big((0, +\infty)^n\big)$, причем

$$\frac{d\lambda_\nu}{d\lambda_n}(t) \;=\; \prod_{j=1}^{n} r_j \lambda_{r_j}(K_j) t_j^{r_j-1}, \qquad t \in (0, +\infty)^n.$$

Поэтому условие $\lambda_{-\psi} << \lambda_n$ равносильно условию $\lambda_{-\psi} << \lambda_\nu$. Перед формулировкой следствия отмечалось, что из $\lambda_{-\psi} << \lambda_n$ вытекает равенство $\dfrac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_n}(t) = -\,\psi_{12\ldots n}^{(n)}(t)$ для $\lambda_n$-почти всех $t \in \mathbb{R}_+^n$, а значит [10] (гл. 6, § 32, теорема 1),

$$\frac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_\nu}(t) \;=\; \frac{d\lambda_{-\psi}}{d\lambda_n}(t)\frac{1}{(d\lambda_\nu / d\lambda_n)(t)} \;=\; -\frac{\psi_{12\ldots n}^{(n)}(t)}{\prod_{j=1}^{n} r_j \lambda_{r_j}(K_j) t_j^{r_j-1}}$$

для $\lambda_n$-почти всех $t \in \mathbb{R}_+^n$.

Отсюда, из формулы (9) и равенства

$$\lambda_r\left( \mathbb{R}^r \setminus \prod_{j=1}^{n} \left( \mathbb{R}^{r_j} \setminus \{0\} \right) \right) \;=\; 0$$

следует формула (18).

Необходимость равенства $\psi(t) = \psi(0)$ для всех $t \in \partial\mathbb{R}_+^n$ вытекает из соотношения $\lambda_r(B_t) = 0,\ t \in \partial\mathbb{R}_+^n$, поскольку тогда

$$\|f\|_p^p \;=\; \|f\|_p^p \;-\; \int\limits_{B_t} |f|^p d\lambda_r \;=\; \psi(t), \qquad t \in \partial\mathbb{R}_+^n.$$

Необходимость остальных условий для $\psi$ следует из теоремы.

Применим полученные результаты к обратной задаче приближения в $L_2(\mathbb{R}^r)$ функциями экспоненциального типа.

Для симметрического тела $K \subset \mathbb{R}^r$ через $W_K$ обозначим класс функций $g \in L_2(\mathbb{R}^r)$, каждая из которых допускает продолжение до целой функции $r$ комплексных переменных $\tilde{g}$, удовлетворяющей условию: для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $A_\varepsilon > 0$, что

$$|\tilde{g}(z)| \;\le\; A_\varepsilon \exp\big((1+\varepsilon)\sup\{|z_1 t_1 + \ldots + z_r t_r| \,|\, t \in K\}\big), \qquad z \;=\; (z_1, \ldots, z_r) \in \mathbb{C}^r.$$

Пусть $F$ — преобразование Фурье в $L_2(\mathbb{R}^r)$:

$$(Ff)(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \operatorname*{l.i.m.}_{N\to+\infty} \int\limits_{B(0,\,N)} e^{i(x,u)} f(u)\,du, \qquad x \in \mathbb{R}^r, \qquad f \in L_2(\mathbb{R}^r),$$

где через $\text{l.i.m.}_{n\to+\infty} g_n$ обозначен предел последовательности $\{g_n | n \ge 1\}$ в пространстве $L_2(\mathbb{R}^r)$, а через $B(0, N)$ — шар радиуса $N$ с центром в начале координат в пространстве $\mathbb{R}^r$.

Следующая теорема дает описание функций из $W_K$.

**Теорема Винера – Пэли** [12] (гл. III, теорема 4.9). *Функция* $g$ *принадлежит* $W_K$ *тогда и только тогда, когда существует такая функция* $f \in L_2(\mathbb{R}^r)$, *что* $g = Ff$ и $f(x) = 0$ *для почти всех* $x \in \mathbb{R}^r \setminus K$.

***Следствие* 4.** *Пусть* $K_j \subset \mathbb{R}^{r_j}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *— симметрические тела,*

$$B_t := \prod_{j=1}^{n} (t_j K_j), \qquad t \in \mathbb{R}^n_+.$$

*Тогда для существования функции* $h \in L_2(\mathbb{R}^r)$, $r = r_1 + \ldots + r_n$, *удовлетворяющей соотношению*

$$\inf\left\{ \| h - g \|_2^2 \mid g \in W_{B_t} \right\} = \psi(t), \qquad t \in \mathbb{R}^n_+, \tag{19}$$

*необходимо и достаточно, чтобы для* $\psi$ *выполнялись те же условия, что и в следствии* 3. *При этом* $h$ *можно задать так*: $h(x) := (Ff)(x)$, $x \in \mathbb{R}^r$, *где* $f$ *определена формулой* (18) *при* $p = 2$; *для этой функции* $h$ *и фиксированного* $t \in \mathbb{R}^n_+$ *точную нижнюю грань в* (19) *реализует функция*

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{r/2}} \int\limits_{B_t} e^{i(x,u)} f(u)\, du, \qquad x \in \mathbb{R}^r.$$

***Доказательство*** вытекает из следствия 3, теоремы Винера – Пэли и унитарности преобразования Фурье.

Если в следствии 4 положить $n = 1$ и $r = 1$, то получим результат М. М. Джрбашяна [7], [8] (теорема VI. 14.2), а при произвольном $r \in \mathbb{N}$ и $K = \left\{ x \in \mathbb{R}^r \mid |x|_r \le 1 \right\}$ — его обобщение для функций многих переменных. В этом случае класс $W_{B_t}$ состоит из функций экспоненциального сферического типа $t$ [13] (п. 3.2.6). Если же при фиксированном $n \in \mathbb{N}$ и $r_1 = \ldots = r_n = 1$ в качестве симметрических тел взять отрезки $K_j = [-1, 1]$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, то $W_{B_t}$ состоит из функций экспоненциального типа $(t_1, \ldots, t_n)$ [13] (п. 3.1). При рассмотрении этого класса естественно возникает многопараметрическая обратная задача теории приближений, решение которой дается следствием 4.

1. *Бернштейн С. Н.* Об обратной задаче теории наилучшего приближения непрерывных функций // Собр. соч.: В 4 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – С. 292 – 294.
2. *Натансон И. П., Агаханов С. А.* О наилучших приближениях непрерывных функций двух переменных // Сб. научн. тр. Ленингр. мех. ин-та. – 1965. – № 50. – С. 15 – 18.
3. *Малоземов В. Н., Хвостов А. П.* О матрицах наилучших приближений // Там же. – С. 167 – 169.
4. *Малоземов В. Н.* О матрицах наилучших приближений // Вестн. Ленингр. ун-та. – 1966. – № 19. – С. 16 – 19.
5. *Тиман М. Ф.* Некоторые вопросы конструктивной теории функций многих переменных // Исследования по современным проблемам конструктивной теории функций. – М.: Физматгиз, 1961. – С. 247 – 251.
6. *Хвостов А. П.* О матрицах наилучших приближений в гильбертовом пространстве // Уч. зап. Ленингр. пед. ин-та. – 1967. – **302**. – С. 315 – 317.
7. *Джрбашян М. М.* Об обратной задаче наилучшего приближения в пространстве функций $L_2(-\infty, +\infty)$ // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-мат. наук. – 1958. – **11**, № 2. – С. 79 – 82.
8. *Ибрагимов И. И.* Экстремальные свойства целых функций конечной степени. – Баку: Изд-во АН АзССР, 1962. – 316 с.
9. *Камке Э.* Интеграл Лебега – Стильтьеса. – М.: Физматгиз, 1959. – 328 с.
10. *Халмош П.* Теория меры. – М.: Изд-во иностр. лит., 1953. – 292 с.
11. *Шилов Г. Е., Гуревич Б. Л.* Интеграл, мера и производная. Общая теория. – М.: Наука, 1967. – 220 с.
12. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 336 с.
13. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.

Получено 11.07.2005