К О Р О Т К І   П О В І Д О М Л Е Н Н Я

УДК 517.9

Б. А. Алиев (Ин-т математики и механики НАН Азербайджана, Баку)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

We study the asymptotic behavior of eigenvalues of a boundary-value problem with spectral parameter under boundary conditions for an elliptic operator-differential equation of second order. We obtain asymptotic formulas for eigenvalues.

Вивчається асимптотична поведінка власних значень однієї крайової задачі зі спектральним параметром у граничних умовах для еліптичного диференціально-операторного рівняння другого порядку. Одержано асимптотичні формули для власних значень.

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство. Через $L_2((0,b);H)$, $0 < b < +\infty$, обозначим множество всех вектор-функций $x \to u(x)\colon (0,b) \to H$, сильно измеримых и таких, что $\int_0^b \|u(x)\|_H^2\,dx < +\infty$. Как известно, $L_2((0,b);H)$ является гильбертовым пространством относительно скалярного произведения

$$(u, v)_{L_2((0,b);H)} = \int_0^b (u(x), v(x))_H\,dx.$$

Пусть A — самосопряженный положительно определенный оператор в H $(A = A^* \geq \omega^2 I,\ \omega > 0,\ I$ — единичный оператор в $H)$ с областью определения $D(A)$.

Поскольку A^{-1} ограничен в H, $H(A) = \{u : u \in D(A);\ \|u\|_{H(A)} = \|Au\|_H\}$ является гильбертовым пространством, норма в котором эквивалентна норме графика оператора A. Положим

$$W_2^2((0,b); H(A), H) = \Big\{ u : Au,\ u'' \in L_2((0,b);H),$$

$$\|u\|^2_{W_2^2((0,b);H(A),H)} = \|Au\|^2_{L_2((0,b);H)} + \|u''\|^2_{L_2((0,b);H)}\Big\}.$$

Множество $W_2^2((0,b); H(A), H)$ является гильбертовым пространством [1, с. 23].

В пространстве $L_2((0,b);H)$ рассмотрим краевую задачу

$$-u''(x) + Au(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \qquad x \in (0,b), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u'(0) + \lambda u(0) &= 0, \\ u'(b) - \lambda u(b) &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где, как и ранее, $A = A^* \geq \omega^2 I$ в H, оператор A^{-1} вполне непрерывен, $q(x)$ — сильно непрерывная оператор-функция, значениями которой являются самосопряженные ограниченные операторы в H, $\lambda > 0$ — спектральный параметр.

В пространстве $\mathcal{H} = L_2((0,b);H) \oplus H \oplus H$ определим операторы $\mathcal{L}_0$ и $\mathcal{L}$ равенствами

$$D(\mathcal{L}_0) = D(\mathcal{L}) = \{ v = (u(x), -u(0), u(b)),\ u \in W_2^2((0,b); H(A), H) \},$$

$$(\mathcal{L}_0 v)(x) = (-u''(x) + Au(x), u'(0), u'(b)),$$

$$(\mathcal{L} v)(x) = (-u''(x) + Au(x) + q(x)u(x), u'(0), u'(b)).$$

Нетрудно видеть, что собственные значения задачи (1), (2) и оператора $\mathcal{L}$ совпадают.

Цель настоящей работы — изучить асимптотическое поведение собственных значений задачи (1), (2), зная асимптотическое распределение собственных чисел оператора A.

Отметим, что асимптотика собственных значений краевых задач для дифференциально-операторного уравнения Штурма – Лиувилля на конечном отрезке с одним и тем же спектральным параметром в уравнении и в одном из граничных условий изучена в работах [2, 3]. Точнее, в указанных работах, в частности, изучено асимптотическое распределение собственных значений задачи (1) с краевыми условиями

$$\begin{aligned} u'(0) + \lambda u(0) &= 0, \\ u(b) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

в $L_2((0,b);H) \oplus H$. Доказано, что если спектр оператора A дискретен, то спектр оператора, порожденного краевой задачей (1), (3), также дискретный. Собственные значения задачи (1), (3) (при $q(x) = 0$) образуют бесконечные последовательности $\lambda_k \sim \sqrt{\mu_k}$ и $\lambda_{n,k} \sim \mu_k + (\pi^2/b^2)\, n^2$, n, $k \in N$, где $\mu_k = \mu_k(A)$ — собственные значения оператора A.

Асимптотика собственных значений самосопряженных граничных задач для уравнения (1) в случае, когда граничные условия содержат ограниченные самосопряженные операторы, изучалась ранее (см., например, [4, 5]).

В данной работе с использованием идей и техники работ [2, 3] доказывается, что задача (1), (2) также имеет две серии собственных значений $\lambda_k \sim \sqrt{\mu_k}$ и $\lambda_{n,k} \sim \mu_k + (\pi^2/b^2)\, n^2$.

Сначала исследуем задачу (1), (2) при $q(x) \equiv 0$. Условие $A = A^* \geq \omega^2 I$ в H влечет симметричность и положительную определенность оператора $\mathcal{L}_0$ в $\mathcal{H}$. Действительно, если $v_1 = (u_1(x), -u_1(0), u_1(b))$, $v_2 = (u_2(x), -u_2(0), u_2(b))$ — элементы из $D(\mathcal{L}_0)$, то

$$(\mathcal{L}_0 v_1, v_2)_{\mathcal{H}} = \int_0^b (-u_1''(x) + Au_1(x), u_2(x))_{\mathcal{H}}\, dx - (u_1'(0), u_2(0))_H + (u_1'(b), u_2(b))_H =$$

$$= \int_0^b (u_1'(x), u_2'(x))_H dx - (u_1'(b), u_2(b))_H + (u_1'(0), u_2(0))_H + \int_0^b (Au_1(x), u_2(x))_H dx -$$

$$- \left(u_1'(0), u_2(0)\right)_H + \left(u_1'(b), u_2(b)\right)_H = \left(u_1(x), u_2'(x)\right)_H \Big|_0^b - \int_0^b \left(u_1(x), u_2''(x)\right)_H dx +$$

$$+ \int_0^b \left(u_1(x), Au_2(x)\right)_H dx = \int_0^b \left(u_1(x), -u_2''(x) + Au_2(x)\right)_H dx +$$

$$+ \left(u_1(b), u_2'(b)\right)_H - \left(u_1(0), u_2'(0)\right)_H = \left(v_1, \mathcal{L}_0 v_2\right)_H,$$

т. е. $\mathcal{L}_0$ — симметрический оператор.

С другой стороны, для любого $v = \left(u(x), -u(0), u(b)\right) \in D(\mathcal{L}_0)$ имеем

$$(\mathcal{L}_0 v, v)_{\mathcal{H}} = \int_0^b (-u''(x) + Au(x), u(x))_H dx - (u'(0), u(0))_H + (u'(b), u(b))_H =$$

$$= \int_0^b \|u'(x)\|_H^2 dx + \int_0^b (Au(x), u(x))_H dx \geq \int_0^b \|u'(x)\|_H^2 dx + \omega^2 \int_0^b \|u(x)\|_H^2 dx.$$

Поскольку вложение $W_2^1((0, b); H) \subset C([0, b]; H)$ непрерывно, то (см. [6], теорема 1.7.7, [1, с. 48])

$$\|u(0)\|_H \leq c_1 \|u(x)\|_{W_2^1((0,b);H)},$$

$$\|u(b)\|_H \leq c_2 \|u(x)\|_{W_2^1((0,b);H)},$$

где $c_1, c_2 > 0$ — некоторые константы. Следовательно,

$$(\mathcal{L}_0 v, v)_{\mathcal{H}} \geq c\left(\int_0^b \|u(x)\|_H^2 dx + \|u(0)\|_H^2 + \|u(b)\|_H^2\right) = c\|v\|_{\mathcal{H}}^2,$$

т. е. оператор $\mathcal{L}_0$ положительно определен.

Можно также показать, что если A^{-1} вполне непрерывен в H, то оператор $\mathcal{L}_0^{-1}$ вполне непрерывен в $\mathcal{H}$.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \geq \omega^2 I$ *в* H *и* A^{-1} *вполне непрерывен. Тогда для собственных значений задачи* (1), (2) *при* $q(x) = 0$ (*оператора* $\mathcal{L}_0$) *справедливы следующие асимптотические формулы*: $\lambda_k \sim \sqrt{\mu_k}$; $\lambda_{n,k} \sim \mu_k + (\pi^2/b^2)\, n^2$, $n, k = 1, 2, \ldots,$ *где* $\mu_k = \mu_k(A)$ — *собственные значения оператора* A.

Доказательство. Собственные векторы оператора A, соответствующие собственным значениям $\mu_k(A)$, обозначим через φ_k. Известно, что $\{\varphi_k\}$ образует ортонормированный базис в H. Тогда, учитывая спектральное разложение, для коэффициентов $u_k = (u, \varphi_k)$ получаем следующую задачу:

$$-u_k''(x) + (\mu_k - \lambda) u_k(x) = 0, \quad x \in (0, b), \tag{4}$$

$$\begin{aligned} u_k'(0) + \lambda u_k(0) &= 0, \\ u_k'(b) - \lambda u_k(b) &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Общее решение обыкновенного дифференциального уравнения (4) имеет вид

$$u_k(x) = c_1 e^{-x\sqrt{\mu_k - \lambda}} + c_2 e^{-(b-x)\sqrt{\mu_k - \lambda}}, \tag{6}$$

где c_i, $i = 1, 2,$ — произвольные постоянные. Подставив (6) в (5), получим систему относительно c_i, $i = 1, 2,$ определитель которой имеет вид

$$K(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - \sqrt{\mu_k - \lambda} & (\lambda + \sqrt{\mu_k - \lambda})e^{-b\sqrt{\mu_k - \lambda}} \\ -(\lambda + \sqrt{\mu_k - \lambda})e^{-b\sqrt{\mu_k - \lambda}} & -(\lambda - \sqrt{\mu_k - \lambda}) \end{vmatrix} =$$

$$= -\left(\lambda - \sqrt{\mu_k - \lambda}\right)^2 + \left(\lambda + \sqrt{\mu_k - \lambda}\right)^2 e^{-2b\sqrt{\mu_k - \lambda}}.$$

Следовательно, собственные значения оператора $\mathcal{L}_0$ — это нули уравнения

$$e^{2b\sqrt{\mu_k - \lambda}}\left(\lambda - \sqrt{\mu_k - \lambda}\right)^2 - \left(\lambda + \sqrt{\mu_k - \lambda}\right)^2 = 0, \tag{7}$$

а значит, нули уравнений

$$e^{b\sqrt{\mu_k - \lambda}}\left(\lambda - \sqrt{\mu_k - \lambda}\right) - \left(\lambda + \sqrt{\mu_k - \lambda}\right) = 0 \tag{8}$$

и

$$e^{b\sqrt{\mu_k - \lambda}}\left(\lambda - \sqrt{\mu_k - \lambda}\right) + \left(\lambda + \sqrt{\mu_k - \lambda}\right) = 0. \tag{9}$$

Таким образом, спектр оператора $\mathcal{L}_0$ состоит из тех вещественных $\lambda \neq \mu_k$, которые хотя бы при одном k удовлетворяют, по крайней мере, одному из уравнений (8) или (9).

Найдем собственные значения оператора $\mathcal{L}_0$, меньшие μ_k. Положим $\sqrt{\mu_k - \lambda} = y$. Уравнения (8) и (9) в этом случае эквивалентны соответственно уравнениям

$$y \operatorname{cth}\frac{by}{2} + y^2 - \mu_k = 0, \qquad 0 < y < \sqrt{\mu_k}, \tag{10}$$

и

$$y \operatorname{th}\frac{by}{2} + y^2 - \mu_k = 0, \qquad 0 < y < \sqrt{\mu_k}. \tag{11}$$

Уравнение (10) исследовано в работах [2, 3], где показано, что в промежутке $(0, \sqrt{\mu_k})$ оно, начиная с некоторого k, имеет точно один корень y_k, который асимптотически ведет себя как $\sqrt{\mu_k} - 1/2$. Отсюда для собственных значений получаем асимптотическую формулу $\lambda_k \sim \sqrt{\mu_k}$ при $k \to \infty$.

Аналогичным образом исследуется уравнение (11). Обозначим $f_k(y) = y \operatorname{th}\frac{by}{2} + y^2 - \mu_k$, $y \in (0, \sqrt{\mu_k})$. Производная $f_k'(y) = \dfrac{\operatorname{sh} by + by}{2\operatorname{ch}^2(by/2)} + 2y > 0$ при $y \in (0, \sqrt{\mu_k})$, т.е. функция $f_k(y)$ монотонно возрастает на $(0, \sqrt{\mu_k})$. Поскольку $f_k(0) = -\mu_k < 0$ и $f_k(\sqrt{\mu_k}) = \sqrt{\mu_k} \operatorname{th}\dfrac{b\sqrt{\mu_k}}{2} > 0$, очевидно, что в промежутке $(0, \sqrt{\mu_k})$ уравнение (11), начиная с некоторого k, имеет точно один корень y_k. Покажем, что этот корень y_k также ведет себя как $\sqrt{\mu_k} - 1/2$. Действительно, при $\varepsilon > 0$

$$\frac{f_k(\sqrt{\mu_k} - 1/2 - \varepsilon)}{\sqrt{\mu_k} - 1/2 - \varepsilon} = \operatorname{th}\frac{b}{2}\left(\sqrt{\mu_k} - \frac{1}{2} - \varepsilon\right) +$$

$$+ \frac{-2\sqrt{\mu_k}(1/2 + \varepsilon) + (1/2 + \varepsilon)^2}{\sqrt{\mu_k} - 1/2 - \varepsilon} \to -2\varepsilon \quad \text{при} \quad k \to +\infty.$$

Следовательно, $f_k(\sqrt{\mu_k} - 1/2 - \varepsilon) < 0$. Аналогично $\dfrac{f_k(\sqrt{\mu_k} - 1/2 + \varepsilon)}{\sqrt{\mu_k} - 1/2 + \varepsilon} \to 2\varepsilon$

при $k \to +\infty$, т.е. $f_k(\sqrt{\mu_k} - 1/2 - \varepsilon) > 0$. Таким образом, y_k лежит между $\sqrt{\mu_k} - 1/2 - \varepsilon$ и $\sqrt{\mu_k} - 1/2 + \varepsilon$, и в силу произвольности ε $y_k - (\sqrt{\mu_k} - 1/2) \to 0$ при $k \to \infty$, откуда следует, что $\lambda_k \sim \sqrt{\mu_k}$ при $k \to \infty$, где $\lambda_k = \mu_k - y_k^2$.

Для собственных значений оператора $\mathcal{L}_0$, больших μ_k, уравнения (8) и (9) принимают вид

$$\operatorname{ctg}\frac{bz}{2} = \frac{z^2 + \mu_k}{z}, \tag{12}$$

$$\operatorname{tg}\frac{bz}{2} = -\frac{z^2 + \mu_k}{z}, \qquad z \in (0, +\infty), \tag{13}$$

соответственно, где $z = \sqrt{\lambda - \mu_k}$.

Уравнение (12) исследовано в [2, 3], где показано, что в каждом промежутке $\left(\frac{2n\pi}{b}, \frac{2(n+1)\pi}{b}\right)$ это уравнение имеет только один корень $z_{n,k}$:

$$\frac{2n\pi}{b} < z_{n,k} < \frac{2(n+1)\pi}{b}.$$

Отсюда для собственных значений получаем следующую асимптотическую формулу:

$$\lambda_{n,k}^1 \sim \mu_k + \frac{\pi^2}{b^2}(2n)^2. \tag{14}$$

Аналогично исследуется уравнение (13). А именно, рассмотрим функцию $u_k(z) = \frac{z\operatorname{tg}(bz/2) + z^2 + \mu_k}{z} = \frac{\varphi_k(z)}{z}$, где $\varphi_k(z) = z\operatorname{tg}\frac{bz}{2} + z^2 + \mu_k$. Нули функций $\varphi_k(z)$ и $u_k(z)$ совпадают. Функция $\varphi_k(z)$ определена на $(0, +\infty)$ всюду, за исключением точек $z_n = (\pi/b)(2n+1)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Поскольку в каждом промежутке $((\pi/b)(2n+1), (\pi/b)(2n+3))$ $\varphi_k(z)$ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$, а

$$\varphi_k'(z) = \frac{\sin bz + bz}{2\cos^2(bz/2)} + 2z > 0,$$

в нем при каждом k функция $\varphi_k(z)$ имеет только один нуль $z_{n,k}$:

$$\frac{\pi}{b}(2n+1) < z_{n,k} < \frac{\pi}{b}(2n+3).$$

Отсюда для собственных значений получаем асимптотическую формулу

$$\lambda_{n,k}^2 \sim \mu_k + \frac{\pi^2}{b^2}(2n+1)^2. \tag{15}$$

Из (14) и (15) вытекают асимптотические формулы для собственных значений $\lambda > \mu_k$ оператора $\mathcal{L}_0$:

$$\lambda_{n,k} \sim \mu_k + \frac{\pi^2}{b^2}n^2.$$

Теорема 1 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим также, что собственные значения оператора* A, *расположенные в порядке возрастания, удовлетворяют условию* $\mu_k(A) \sim a k^{\alpha}$ $(\lim_{k\to\infty}\mu_k(A)\cdot k^{-\alpha} = a,\ 0 < a,\ \alpha =$

$=\mathrm{const}$). *Тогда собственные значения оператора* $\mathcal{L}_0$ *имеют асимптотику*

$$\lambda_m(\mathcal{L}_0) \sim dm^{\delta},$$

где

$$\delta = \begin{cases} \dfrac{2\alpha}{a+2} & при\ \alpha > 2, \\ \dfrac{\alpha}{2} & при\ \alpha < 2, \\ 1 & при\ \alpha = 2, \end{cases}$$

$d > 0$ — *некоторая константа.*

Доказательство следствия 1 следует из [3] (см. также [4]).

Пусть теперь $q(x) \neq 0$. В пространстве $\mathcal{H}$ определим оператор Q следующим образом:

$$D(Q) = \mathcal{H}, \quad Qv = \big(q(x)u(x), 0, 0\big).$$

Очевидно, что оператор Q ограниченный и самосопряженный. Тогда оператор $\mathcal{L}$ можно представить как $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + Q$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Предположим также, что при каждом* $x \in (0, b)$ $q(x)$ — *самосопряженный ограниченный оператор в* H. *Тогда собственные значения краевой задачи* (1), (2) (*оператора* $\mathcal{L}$) *имеют асимптотику*

$$\lambda_m(\mathcal{L}) \sim \lambda_m(\mathcal{L}_0).$$

Доказательство следствия 2 проводится по той же схеме, что и в [3, 4].

Пример. Рассмотрим в прямоугольнике $\Omega = [0, b] \times [0, 1]$ задачу на собственные значения

$$-\frac{\partial^2\vartheta(x,y)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\vartheta(x,y)}{\partial y^2} + q(x,y)\vartheta(x,y) = \lambda\vartheta(x,y), \tag{16}$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial\vartheta(0,y)}{\partial x} + \lambda\vartheta(0,y) = 0, \\ \frac{\partial\vartheta(b,y)}{\partial x} - \lambda\vartheta(b,y) = 0, \end{gathered} \tag{17}$$

$$\vartheta(x,0) = \vartheta(x,1), \qquad \frac{\partial\vartheta(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial\vartheta(x,1)}{\partial y}, \tag{18}$$

где $q(x, y)$ — непрерывная функция на Ω.

Запишем задачу (16) – (18) в операторной форме

$$\begin{gathered} -u''(x) + Au(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x), \qquad x \in (0, b), \\ u'(0) + \lambda u(0) = 0, \\ u'(b) - \lambda u(b) = 0, \end{gathered}$$

где $u(x) = \vartheta(x, \cdot)$ — вектор-функция со значениями в гильбертовом пространстве $H = L_2(0, 1)$, а операторы A и $q(x)$ определены следующим образом:

$$D(A) = \{u \in W_2^2(0,1) \mid u(0) = u(1), u'(0) = u'(1)\}, \quad Au = -\frac{d^2u}{dy^2} + \omega u \tag{19}$$

($\omega > 0$ — некоторое число),

$$D(q(x)) = L_2(0, 1), \quad q(x)u = q(x, y)u - \omega u. \tag{20}$$

Очевидно, что оператор A, определенный равенством (19), самосопряженный и при достаточно больших $\omega > 0$ положительно определенный, а A^{-1} вполне непрерывен в $L_2(0, 1)$. Простые вычисления показывают, что собственные значения оператора A имеют вид

$$\mu_k(A) = \omega + 4\pi^2 k^2, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Поскольку оператор $q(x)$, определенный в (20), при каждом $x \in (0, b)$ ограничен и самосопряжен в $L_2(0, 1)$, то на основании следствия 2 собственные значения задачи (16) – (18) ведут себя как $\lambda_m \sim \mathrm{const} \cdot m$.

Заметим, что в работах [7, 8] показано, что для уравнения Лапласа в квадрате существуют краевые задачи с оператором в краевых условиях, спектр которых не является дискретным. Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для дифференциально-операторных уравнений второго порядка с кусочно-постоянным коэффициентом при второй производной и с условиями сопряжения изучено в [9].

Автор благодарен профессору С. Я. Якубову за обсуждение полученных результатов.

1. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. – М.: Мир, 1971. – 371 с.
2. *Горбачук В. И., Рыбак М. А.* О граничных задачах для операторного уравнения Штурма – Лиувилля со спектральным параметром в уравнении и в граничном условии // Прямые и обратные задачи теории рассеяния. – Киев, 1981. – С. 3 – 13.
3 *Рыбак М. А.* Об асимптотическом распределении собственных значений некоторых граничных задач для операторного уравнения Штурма – Лиувилля // Укр. мат. журн. – 1980. – **32**, № 2. – С. 248 – 252.
4. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О некоторых граничных задачах для уравнения Штурма – Лиувилля с операторным потенциалом // Там же. – 1972. – **24**, № 3. – С. 291 – 351.
5. *Горбачук В. И., Горбачук М. Л.* О самосопряженных граничных задачах с дискретным спектром, порожденных уравнением Штурма – Лиувилля с неограниченным операторным коэффициентом // Функцион. анализ и его прил. – 1971. – **5**, вып. 4. – С. 67 – 68.
6. *Yakubov S., Yakubov Ya.* Differential-operator equations. Ordinary and partial differential equations. – Boca Raton: Chapman and Hall / CRC, 2000. – 568 p.
7. *Ильин В. А., Филиппов А. Ф.* О характере спектра самосопряженного расширения оператора Лапласа в ограниченной области // Докл. АН СССР. – 1970. – **191**, № 2. – С. 267 – 269.
8. *Якубов С. Я.* Краевая задача для уравнения Лапласа с неклассической спектральной асимптотикой // Там же. – 1982. – **65**, № 6. – С. 1330 – 1333.
9. *Алиев Б. А.* Асимптотическое поведение собственных значений одной краевой задачи для эллиптического дифференциально-операторного уравнения второго порядка с разрывным коэффициентом // Дифференц. уравнения. – 2002. – **38**, № 1. – С. 58 – 62.

Получено 21.01.2005,
после доработки — 28.11.2005