УДК 517

Ю. М. Березанский, А. А. Калюжный

Представления гиперкомплексных систем с локально компактным базисом

В статье обобщаются теоремы типа Стоуна и С.-Надя—Хилле о представлениях операторами коммутативных групп на случай гиперкомплексных систем (г. с.) с локально компактным базисом (их теорию см. в [1—4]). Полученные результаты обобщают работы [5, 6] и могут быть применены к гипергруппам (см. обзор [7] и [2]); они получены при помощи общего подхода, развитого в [8, 9]. Рассматриваются также примеры г. с. и применение полученной теоремы к ним.

1. Пусть Q—полное сепарабельное локально компактное пространство точек $p, q, r, \ldots$; $\mathscr{B}(Q)$ — σ-алгебра его борелевских подмножеств; $\mathscr{B}_0(Q)$ — подкольцо $\mathscr{B}(Q)$, состоящее из множеств с компактным замыканием. Пусть $\mathscr{L}_1(Q, dp)$ — нормальная г. с. с базисной единицей (б. е.) o; $\gamma(A, B, p)$, $A, B \in \mathscr{B}(Q)$; $p \in Q$, — ее структурная мера, $Q \ni p \to p^* \in Q$ — инволютивный гомеоморфизм [2 — 4]. Обозначим $L_{2,0}$ множество финитных функций из $L_2(Q, dp) = L_2$ и снабдим его топологией индуктивного предела $L_{2,0} = \operatorname{ind}\lim\limits_{n\to\infty} L_2(Q_n, dp)$, где Q_n — расширяющаяся последовательность компактов такая, что $Q = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Q_n$.

Измеримую (вообще говоря, неограниченную) не равную нулю почти везде функцию $Q \ni p \to \chi(p) \in \mathbb{C}^1$ будем называть обобщенным характером г. с., если $\chi \in L_{2,\mathrm{loc}} = L'_{2,0}$ и для нее выполняется равенство $\int\limits_Q \gamma(A, B, r) \times \chi(r)\, dr = \int\limits_A \chi(p)\, dp \int\limits_B \chi(q)\, dq$, $A, B \in \mathscr{B}_0(Q)$.

Пространства обобщенных и обычных характеров г. с. обозначим X_g и X соответственно. Если г. с. нормальна, то ее обобщенные характеры — непрерывные функции. Доказывается это так же, как и для обычных характеров. Обобщенный характер будем называть эрмитовым, если $\chi(p^*) = \overline{\chi(p)}$, $p \in Q$. Наделим пространство обобщенных эрмитовых характеров $X_{g,h}$ топологией, индуцированной слабой топологией пространства $L_{2,\mathrm{loc}} = L'_{2,0}$. Сужение этой топологии на пространство X_h эрмитовых характеров г. с. совпадает с топологией пространства максимальных идеалов.

Определим понятие представления нормальной г. с. с б. е. o вначале ограниченными, а затем и неограниченными нормальными операторами, действующими в сепарабельном гильбертовом пространстве H. Назовем представлением г. с. ограниченными операторами операторнозначную функцию $Q \ni p \to U_p$, где U_p — ограниченные нормальные операторы, удовлетворяющую следующим условиям: (B1) $U_p^* = U_{p^*}$, $p \in Q$; (B2) $U_0 = I$; (B3) функция $Q \ni p \to (U_p\varphi, \psi)_H \in \mathbb{C}^1$ непрерывна для любых $\varphi, \psi \in H$; (B4) для каждых $A, B \in \mathscr{B}_0(Q) \int\limits_Q \gamma(A, B, r)\, U_r dr = \int\limits_A U_p dp \int\limits_B U_q dq$ (оператор $U_\xi = \int\limits_Q \xi(p)\, U_p dp$, $\xi \in L_{2,0}$, определяется следующим образом: $(U_\xi\varphi, \psi)_H = \int\limits_Q \xi(p)\, (U_p\varphi, \psi)_H dp$, $\varphi, \psi \in H$).

Определение представления г. с. неограниченными операторами выглядит сложнее. Назовем таким представлением операторнозначную функцию $Q \ni p \to U_p$, где U_p — нормальные, вообще говоря неограниченные, операторы, удовлетворяющую следующим условиям: (U1) операторы U_p, $p \in Q$, коммутируют в смысле разложения единицы; (U2) существует линейное многообразие $\mathscr{D} \subseteq \bigcap\limits_{p\in Q} \mathscr{D}(U_p)$, плотное в H и инвариантное относительно операторов U_p; (U3) $U_p^* = U_{p^*}$, $p \in Q$; (U4) $U_0 = I$; (U5) функция $Q \ni p \to (U_p\varphi, \psi)_H \in \mathbb{C}^1$ непрерывна для любых $\varphi \in \mathscr{D}$, $\psi \in H$; (U6) для каждых $A, B \in \mathscr{B}_0(Q)$ $\left(\int\limits_Q \gamma(A, B^*, p)\, U_p dp \varphi, \psi\right)_H = \left(\int\limits_A U_p dp \varphi, \int\limits_B U_q dq \psi\right)_H$, $\varphi, \psi \in \mathscr{D}$ (оператор $U_\xi = \int\limits_Q \xi(p)\, U_p dp$, $\xi \in L_{2,0}$, определяется следующим образом: $(U_\xi \varphi, \psi)_H = \int\limits_Q \xi(p)\, (U_p\varphi, \psi)_H dp$, $\mathscr{D}(U_\xi) = \mathscr{D}$, $\varphi \in \mathscr{D}$; $\psi \in H$).

По сравнению с предыдущим определением здесь появляются два новых условия на операторы представления. Дело в том, что в случае ограниченных операторов условие (U1) автоматически следует из (B3), (B4) и коммутативности г. с. В случае неограниченных операторов это уже не так, и (U1) приходится постулировать. Наличие условия (U2) объясняется тем, что, с одной стороны, нужно определить операторы U_ξ, $\xi \in L_{2,0}$, а с другой — существуют несчетные семейства коммутирующих нормальных операторов, пересечение областей определения которых состоит только из нуля. Если имеется счетное семейство коммутирующих нормальных операторов, то условие (U2) автоматически выполняется. Таким образом, для г. с. с дискретным базисом это условие излишне.

Теорема 1. *Пусть $Q \ni p \to U_p$ — представление нормальной г. с. с б. е. нормальными, вообще говоря неограниченными, операторами. Тогда справедливо представление посредством спектрального интеграла*

$$U_p = \int\limits_{X_{g,h}} \chi(p)\, dE(\chi), \quad p \in Q, \tag{1}$$

где E — разложение единицы на σ-алгебре $C_\sigma(X_{g,h})$ множеств из пространства $X_{g,h}$, порожденной цилиндрическими множествами с конечномерными борелевскими основаниями. Если задано представление г. с. ограниченными операторами, то E сосредоточено на множестве $\{\chi \in X_{g,h} \mid |\chi(p)| \leqslant \| U_p \|\}$. Если функция $Q \ni p \to \|U_p\|$ ограничена, то условия (B1)—(B4) необходимы для существования интегрального представления (1), а E сосредоточено на множестве X_h эрмитовых характеров г. с. и задано на σ-алгебре борелевских множеств из X_h.

Доказательство основано на применении теории разложения по обобщенным собственным функциям коммутирующих нормальных операторов [8, 9]. Оснащение строится с помощью уточнения конструкции Гординга. Роль пространства основных функций, необходимого для проведения конструкции Гординга, здесь играет пространство $\mathscr{Z}(Q, \Xi)$, построенное в [3].

Замечания. 1. Пусть Q — компакт. Тогда из теоремы 1 немедленно следует (в силу того, что $|\chi(p)| \leqslant 1$), что если операторнозначная функция $Q \ni p \to U_p$ задает представление г. с. нормальными операторами, то операторы U_p ограничены, причем $\| U_p \| \leqslant 1$, $p \in Q$.

2. С помощью подобной конструкции можно доказывать теоремы об интегральном представлении решений некоторых абстрактных операторных уравнений на г. с., подобные аналогичным теоремам для сверточных алгебр, полученных в работах [5, 6]. Условия на операторнозначную функцию $Q \ni p \to U_p$ будут выглядеть следующим образом: (U1)′ операторы U_p нормальны и коммутируют в смысле разложения единицы; (U2)′ существует линейное многообразие $\mathscr{D} \subseteq \bigcap\limits_{p \in Q} \mathscr{D}(U_p)$, плотное в H и инвариантное относительно операторов U_p; (U3)′ $U_p^* = U_{p^*}$; (U4)′ $U_0 = I$; (U5)′ функция $Q \ni p \to (U_p\varphi, \psi)_H$ непрерывна для любых $\varphi \in \mathscr{D}$, $\psi \in H$; (U6)′ операторы U_ξ, $\xi \in L_{2,0}$, удовлетворяют соответствующему операторному уравнению.

3. Нетрудно показать, что если вместо условий (U1) и (U2) в определении представления г. с. неограниченными операторами потребовать существование плотной области совместных аналитических векторов для операторов $U_p, p \in Q$, то условия (U1) и (U2) будут автоматически выполняться и

утверждение теоремы 1 сохранится. Представляется интересным изучить вопрос о том, когда из условий (U1)—(U5) следует существование плотной области совместных аналитических векторов для операторов представления г. с., т. е. доказать аналог теоремы Нельсона для г. с.

2. Приведем три примера применения теоремы 1 к г. с.

I. Пусть G — компактная группа, $L_1(G)$ — ее групповое кольцо; Q — компакт классов сопряженных элементов группы G, $d\mathfrak{g}$ — мера Хаара на G, равная 1 от всей G. Известно [1], что центр группового кольца совпадает с $L_1(Q, dg)$ и является нормальной г. с. с б. е.; здесь dg — мера на $\mathcal{B}(Q)$, определяемая равенством $\int\limits_G x(\mathfrak{g})\,d\mathfrak{g} = \int\limits_Q x(g)\,dg$, где x — непрерывные функции на G, постоянные на классах сопряженных элементов. В качестве инволютивного гомеоморфизма берется отображение $Q \ni g = \{a^{-1}\mathfrak{g}a \mid a \in G\} \to \{a^{-1}\mathfrak{g}^{-1}a \mid a \in G\} = g^* \in Q$; единица группы служит б. е. полученной г. с. Характерами этой г. с. служат характеры ϑ неприводимых представлений группы G, точнее, $\chi(g) = (n(\vartheta))^{-1}\vartheta(\mathfrak{g})$, $\mathfrak{g} \in g$; $\chi \in X$, где $n(\vartheta)$ — степень представления, соответствующего ϑ.

Пусть задано слабо непрерывное представление $G \ni \mathfrak{g} \to U_\mathfrak{g}$ группы G унитарными операторами в H. Операторнозначная функция $G \ni \mathfrak{g} \to V_\mathfrak{g} = \int\limits_G U_{a^{-1}\mathfrak{g}a}\,da$ постоянна на классах сопряженных элементов, поэтому можно ввести отображение $Q \ni g \to V_g$, где $V_g = V_\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} \in g$. Легко показать, что $Q \ni g \to V_g$ есть представление г. с. $L_1(Q, dg)$. Применяя теорему 1, получим

$$\int\limits_G U_{a^{-1}\mathfrak{g}a}\,da = \int\limits_\Theta \frac{1}{n(\vartheta)}\,\vartheta(\mathfrak{g})\,dE(\vartheta), \tag{2}$$

где Θ — множество характеров неприводимых представлений. Интересно выяснить, при каких условиях на структурную меру г. с. с компактным (или даже конечным) базисом будет центром группового кольца некоторой компактной группы; любое представление такой г. с. можно было бы разложить подобно (2) по характерам неприводимых представлений этой группы.

II. Пусть G—компактная группа, H — некоторая ее подгруппа (стационарная подгруппа). В этом случае множество G/H левых классов смежности группы G по подгруппе H будет однородным пространством с группой движений G. Элементы полученного однородного пространства будем обозначать буквами α, β, γ, ...; элемент, отвечающий классу eH будем обозначать буквой o (неподвижная точка). Полученное однородное пространство будем называть симметрическим, если для любых двух его точек $\alpha, \beta \in G/H$ найдется движение $\mathfrak{g} \in G$, переставляющее эти точки: $\mathfrak{g}\alpha = \beta$ и $\mathfrak{g}\beta = \alpha$. Пусть $\gamma \in G/H$, множество $\{\mathfrak{h}\gamma \mid \mathfrak{h} \in H\}$ называется круговой орбитой точки γ относительно o (или сферой с центром в неподвижной точке) и G/H распадается на множество Q круговых орбит. Очевидно, Q есть множество классов смежности при разложении G по двойному модулю H, H, $Q = G//H$. Суммируемая по мере Хаара функция x на G называется орбитальной, если она принимает постоянные значения на двойных классах смежности G по H, т. е. $x(\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}\mathfrak{h}_2) = x(\mathfrak{g})$ почти для всех $\mathfrak{g} \in G$ и всех $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2 \in H$. Если пространство G/H симметрическое, то совокупность всех орбитальных функций K образует эрмитову г. с. с базисом Q и б. е. o [1]. Мультипликативно мерой э ой г. с. служит мера dg на Q, задаваемая с помощью равенства $\int\limits_G x(\mathfrak{g}\, d\mathfrak{g} = \int\limits_Q x(g)\,dg$, $x \in K$; $\mathfrak{g} \in g$; в качестве инволютивного гомеоморфизма берется отображение $Q \ni g = H\mathfrak{g}H \to H\mathfrak{g}^{-1}H = g^* \in Q$. В силу того, что $H\mathfrak{g}H = H\mathfrak{g}^{-1}H$, г. с. $K = L_1(Q, dg)$ эрмитова. Пусть задано непрерывное унитарное представление $U_\mathfrak{g}$ группы G в H. Операторнозначная функция $G \ni \mathfrak{g} \to V_\mathfrak{g} = \int\limits_H\int\limits_H U_{\mathfrak{h}_1\mathfrak{g}\mathfrak{h}_2}\,d\mathfrak{h}_1 d\mathfrak{h}_2$ постоянна на круговых орбитах, поэтому можно ввести отображение $Q \ni g \to V_g$, где

$V_{\mathfrak{g}} = V_g$, $\mathfrak{g} \in g$. Легко видеть, что оно задает представление г. с. $L_1(Q, dg)$ самосопряженными операторами. Известно [1], что множество характеров г. с. $L_1(Q, dg)$ находится во взаимно однозначном соответствии с множеством Z зональных функций ζ на G. По теореме 1 получаем

$$\int_H \int_H U_{\mathfrak{h}_1 \mathfrak{g} \mathfrak{h}_2} d\mathfrak{h}_1 d\mathfrak{h}_2 = \int_Z \zeta(\mathfrak{g})\, dE(\zeta).$$

Теперь справедливо также замечание, подобное сделанному в конце предыдущего примера.

III. Рассмотрим уравнение Штурма — Лиувилля на полуоси

$$y'' - q(t)\,y = -\lambda y, \quad t \in \mathbb{R}^1_+ = [0, \infty). \tag{3}$$

Пусть $v(t, s; \tau, \sigma)$ — функция Римана уравнения

$$\partial^2 u/\partial t^2 - q(t)\,u = \partial^2 u/\partial s^2 - q(s)\,u, \quad u = u(t, s); \quad t, s \in \mathbb{R}^1, \tag{4}$$

где $q(t)$, $t \in \mathbb{R}^1_+$, — непрерывная функция, имеющая ограниченную вариацию на полуоси, $q(-t) = q(t)$, $t \geqslant 0$. Пусть $\tilde{q}(t)$ — неотрицательная невозрастающая функция такая, что $|q(t') - q(t'')| \leqslant \tilde{q}(t') - \tilde{q}(t'')$, $0 \leqslant t' < t'' < \infty$. Обозначим через $\mu(t)$, $t \in \mathbb{R}^1_+$, решение уравнения $y'' - \tilde{q}(t)\,y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $\mu(0) = 1$, $\mu'(0) = 0$. Введем оператор обобщенного сдвига T_s, полагая, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции $x(t)$, $t \in \mathbb{R}^1_+$, $(T_s x)(t) = u(t, s)$, $t, s \in \mathbb{R}^1_+$, где $u(t, s)$ — решение уравнения (4) с начальными условиями $u(t, 0) = x(t)$, $(\partial u/\partial s)\,(t, 0) = 0$ $(x(-t) = x(t),\ t \geqslant 0)$. Интегрируя (4) при помощи метода Римана, получим

$$(T_s x)(t) = \frac{1}{2}[x(t - s) + x(t + s)] - \frac{1}{2} \int_{t-s}^{t+s} \frac{\partial v(t, s; \tau, 0)}{\partial \sigma} x(\tau)\, d\tau.$$

В [1] показано, что пространство $L_1(\mathbb{R}^1_+, \mu(t)\,dt)$ относительно умножения $(x * y)(t) = \int_0^\infty (T_s x)(t)\, y(s)\, ds$ образует г. с. с базисом $\mathbb{R}^1_+$.

Структурная мера этой г. с., вообще говоря, меняет знак; она будет неотрицательной, если $q(t)$ не возрастает. Построенная г. с. эрмитова ($t = t^*$) и содержит базисную единицу ($o = 0$). Обобщенными эрмитовыми характерами этой г. с. служат функции $\varphi(t, \lambda)$, где $\varphi(t, \lambda)$ — решение уравнения (3), удовлетворяющее начальным условиям $\varphi(0, \lambda) = 1$, $\varphi'(0, \lambda) = 0$, а $\lambda \in \mathbb{R}^1$. Хотя структурная мера этой г. с. и меняет знак, теорема 1 остается в силе, так как при построении оснащения пространства H вместо пространства $\mathcal{D}(Q, \Xi)$ в этом случае можно взять пространство $C_0^\infty(\mathbb{R}_1^+)$, понимаемое как проективный предел соболевских пространств с весами.

Теорема 2. *Пусть в H задано семейство $(A_t)_{t \in \mathbb{R}^1_+}$ коммутирующих самосопряженных, вообще говоря неограниченных, операторов, удовлетворяющее следующим условиям:* а) *найдется линейное многообразие $\mathcal{D} \subseteq \bigcap_{t \in \mathbb{R}^1_+} \mathcal{D}(A_t)$, плотное в H и инвариантное относительно операторов A_t;* б) $A_0 = I$; в) *функция $\mathbb{R}^1_+ \ni t \to (A_t \varphi, \psi)_H$ непрерывна для всех $\varphi \in \mathcal{D}$, $\psi \in H$;* г) *для всех $\varphi, \psi \in \mathcal{D}$*

$$\mu(t + s)(A_{t+s}\varphi, \psi)_H + \mu(t - s)(A_{t-s}\varphi, \psi)_H - \int_{t-s}^{t+s} \frac{\partial v(t, s; \tau, 0)}{\partial \sigma} (A_\tau \varphi, \psi)_H \mu(\tau)\, d\tau =$$

$$= 2\mu(t)\,\mu(s)\,(A_t A_s \varphi, \psi)_H, \quad A_{-t} = A_t, \quad t \geqslant 0; \quad t, s \in \mathbb{R}^1_+.$$

Тогда найдется разложение единицы E такое, что справедливо интегральное представление $A_t = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \varphi(t, \lambda)\, dE(\lambda)$, $t \in \mathbb{R}^1_+$.

Доказательство этой теоремы основано на применении теоремы 1 и свойствах операторов обобщенного сдвига T_s в г. с.

1. *Березанский Ю. М., Крейн С. Г.* Гиперкомплексные системы с континуальным базисом.— Успехи мат. наук, 1957, **12**, № 1, с. 147—152.
2. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гиперкомплексные системы с локально компактным базисом.— Киев, 1982.— 57 с.— (Препринт / АН УССР, Ин-т математики)
3. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Ядерные пространства функций на базисе гиперкомплексной системы.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 1, с. 9—17.
4. *Калюжный А. А.* Одна теорема о существовании мультипликативной меры.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 3, с. 369—371.
5. *Maltese G.* Spectral representations for some unbounded normal operators.— Trans. AMS, 1964, **110**, N 1, p. 79—87.
6. *Maltese G.* Spectral representations for solutions of certain abstract functional eqations.— Compositio Math., 1962, **15**, N 1, p. 1—22.
7. *Ross K. A.* Hypergroups and centers of measure algebras.— Symp. Math., 1977, **22**, p. 189—203.
8. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
9. *Березанский Ю. М.* Спектральные представления решений некоторых классов функциональных и дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 579—582.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 31.08.83