УДК 517

М. Т. Яворский

Асимптотика матрицианта и аналитические матрицы рассеяния для канонической системы дифференцильных уравнений на полуоси

Пусть J — матрица порядка $2n$ такая что $J^* = -J$, $J^2 = -I$, где I — единичная матрица, и $\operatorname{Sp} J = 0$. Обозначим через $H(x)$ матрицу-функцию порядка $2n$, обладающую следующими свойствами:

а) элементы $H(x)$ — абсолютно непрерывные функции на полуоси $[0, \infty)$ и существует предел $\lim\limits_{x\to\infty} H(x) = H_\infty$, представляющий собой строго положительную матрицу такую, что $H_\infty^{1/2} J H_\infty^{1/2} = \alpha J$, $\alpha > 0$, где $H_\infty^{1/2}$ — положительный корень из H_∞;

б) гильбертовы нормы матрицы $H'(x)$ и $H(x) - H_\infty$ подчинены условию $\int\limits_0^\infty \{\| H'(x)\| + \| H(x) - H_\infty \|\}\, dx < \infty$;

в) $\forall x \in [0, \infty)$ матрица $H(x)$ строго положительна.

Рассмотрим дифференциальную систему

$$-JdY(x, \lambda)/dx = \lambda H(x) Y(x, \lambda) \tag{1}$$

где $Y(x, \lambda)$ — матрица-функция порядка n, а λ — комплексный параметр. Абсолютно непрерывная матрица-функция $\mathscr{E}(x, \lambda)$, удовлетворяющая уравнению (1) и уравнению $\mathscr{E}(0, \lambda) = I$, называются матрициантом канонической системы (1).

В работе [1] было показано, что для $H(x)$, удовлетворяющих указанным условиям, в каждой точке $x \in [0, \infty)$ матрициант является целой матрицей-функцией экспоненциального типа. Кроме того, при $\operatorname{Im} \lambda = 0$ было установлено, что предел $A(\lambda) = \lim\limits_{x \to \infty} \exp\{-\lambda x J H_\infty\} \mathscr{E}(x, \lambda)$ есть непрерывная J-унитарная матрица-функция.

Настоящая работа посвящена дальнейшему выяснению свойств матрицы-функции $A(\lambda)$ и связанных свойств матрицы рассеяния, порождаемых системой (1).

Будем считать, что

$$J = \begin{pmatrix} iI_n, & 0 \\ 0, & -iI_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

где I_n — единичная матрица порядка n. Это предположение не нарушает общности рассмотрения, так как указанные вначале свойства матрицы J позволяют привести ее к виду (2) с помощью унитарного преобразования. В соответствии с представлением (2) положим

$$A(\lambda) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_+(\lambda), & Q_+(\lambda) \\ Q_-(\lambda), & \mathscr{P}_-(\lambda) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Матрицы-функции $\mathscr{P}_+(\lambda)$, $Q_+(\lambda)$ и $\mathscr{P}_-(\lambda)$, $Q_-(\lambda)$ суть граничные значения матриц-функций $\mathscr{P}_+(z)$, $Q_+(z)$ и $\mathscr{P}_-(z)$, $Q_-(z)$, голоморфных соответственно в нижней и верхней полуплоскостях таких, что*

$$\begin{gathered} Q_+(z) Q_+^*(z) \leqslant \mathscr{P}_+(z) \mathscr{P}_+^*(z) \leqslant c e^{-a \operatorname{Im} z} I_n, \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0, \\ Q_-(z) Q_-^*(z) \leqslant \mathscr{P}_-(z) \mathscr{P}_-^*(z) \leqslant c e^{a \operatorname{Im} z} I_n, \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0, \end{gathered} \tag{4}$$

где $a = 2\int\limits_0^\infty \| H(x) - H_\infty \| dx$.

Доказательство. Замена $\mathscr{E}(x, \lambda) = H_\infty^{-1/2} \tilde{\mathscr{E}}(x, \lambda) H_\infty^{1/2}$ переводит систему (1) в систему с матрицей-функцией $\tilde{H}(x) = \alpha H_\infty^{-1/2} H(x) H_\infty^{-1/2}$ удовлетворяющих условию $\tilde{H}_\infty = \lim\limits_{x \to \infty} \tilde{H}(x) = \alpha I$. Поэтому в дальнейшем, не уменьшая общности, будем считать, что $H_\infty = \alpha I$. Пусть

$$P_+ = \begin{pmatrix} I_n, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad P_- = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & I_n \end{pmatrix}.$$

Покажем, что существуют пределы

$$\begin{gathered} G_+(z) = \lim_{x \to \infty} e^{-iz\alpha x} P_+ \mathscr{E}(x, z), \quad \operatorname{Im} z \leqslant 0, \\ G_-(z) = \lim_{x \to \infty} e^{iz\alpha x} P_- \mathscr{E}(x, z), \quad \operatorname{Im} z \geqslant 0. \end{gathered}$$

В рассматриваемом случае справедливы соотношение $\int\limits_0^\infty \| H(x) - \alpha I_{2n} \| dx < \infty$ и уравнение

$$\mathscr{E}(x, \lambda) = e^{\alpha z x J} \left\{ I + z \int_0^x e^{-\alpha z s J} J [H(s) - \alpha I_{2n}] \mathscr{E}(s, z) ds \right\}.$$

Как было показано в [2], из ограниченности целой матрицы-фун $\mathscr{E}(x, \lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda = 0\ \forall x$ получается оценка

$$\|\mathscr{E}(x, z)\| \leqslant C(x)\exp\left\{|\operatorname{Im} z|\int_0^x \|H(s)\|\,ds\right\},$$

где $C(x)$ — неубывающая ограниченная функция. Поэтому при $\mp \operatorname{Im} z$ получаем

$$\|e^{\mp iz\alpha x}P_{\pm}\mathscr{E}(x, z) - e^{\mp iz\alpha x'}P_{\pm}\mathscr{E}(x', z)\| = \|P_{\pm}[e^{-z\alpha xJ}\mathscr{E}(x, z) - e^{-z\alpha x'J}\mathscr{E}(x', z)$$

$$\leqslant |z|\,C\exp\left\{|\operatorname{Im} z|\int_0^\infty \|H(t) - \alpha I\|\,dt\right\}\int_x^{x'}\|H(s) - \alpha I_{2n}\|\,ds \to 0$$

при $x, x' \to \infty$, и значит, указанные пределы существуют. Из (6) видно матрицы-функции $G_+(z)$ и $G_-(z)$ являются пределами последователь целых матриц-функций, равномерно сходящихся на каждом комплек множестве соответственно замкнутой нижней и верхней полуплоско Следовательно, матрицы-функции

$$G_+(z) = \begin{pmatrix} \mathscr{P}_+(z), & Q_+(z) \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad G_-(z) = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ Q_-(z), & \mathscr{P}_-(z) \end{pmatrix}$$

голоморфны в полуплоскостях $\operatorname{Im} z < 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$, а их компоненты и непрерывные граничные значения $P_+(\lambda)$, $Q_+(\lambda)$ и $P_-(\lambda)$, $Q_-(\lambda)$ $\operatorname{Im} z \to 0$.

Так как, согласно (5), при $\mp \operatorname{Im} z \geqslant 0$

$$\|e^{\mp iz\alpha x}P_{\pm}\mathscr{E}(x, z)\| \leqslant C(x)\exp\left[\int_0^x \|H(s)\|\,ds - \alpha x\right]|\operatorname{Im} z| \leqslant$$

$$\leqslant C(x)\exp\left[\int_0^x \|H(s) - \alpha I\|\,ds\right]|\operatorname{Im} z| \leqslant$$

$$\leqslant C(\infty)\exp\left[|\operatorname{Im} z|\int_0^\infty \|H(s) - \alpha I\|\,ds\right],$$

то

$$\|G_{\pm}(z)\| = \lim_{x\to\infty}\|e^{\mp iz\alpha x}P_{\pm}\mathscr{E}(x, z)\| \leqslant Ce^{a/2}|\operatorname{Im} z|,$$

$$a = \int_0^\infty \|H(s) - \alpha I\|\,ds, \quad \mp \operatorname{Im} z > 0,$$

и значит,

$$\mathscr{P}_{\pm}(z)\,\mathscr{P}_{\pm}^*(z)\,I_n \leqslant \|G_{\pm}(z)\|\,I_n \leqslant Ce^{a|\operatorname{Im} z|},\ Q_{\pm}(z)\,Q_{\pm}^*(z)\,I_n \leqslant$$

$$\leqslant Ce^{a|\operatorname{Im} z|}, \ \mp \operatorname{Im} z > 0.$$

Остается проверить первые неравенства в (4). Непосредственно из сис (1) получаем, что при произвольном z $\mathscr{E}^*(x, z)\,J\mathscr{E}(x, z) = J + (\bar{z} - \times\int_0^x \mathscr{E}(s, z)\,H(s)\,\mathscr{E}(s, z)\,ds$, и, поскольку при $x > 0$ матрица $\int_0^x \mathscr{E}^*(s, z)\,H \times \mathscr{E}(x, z)\,ds$ строго положительна, то

$$\mathscr{E}^*(x, z)\,J\mathscr{E}(x, z)/i \geqslant J/i,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0,\ \mathscr{E}^*(x, z)\,J\mathscr{E}(x, z)/i \leqslant J/i,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0,$$

причем равенства в (7) получаются только при $\operatorname{Im} z = 0$. Как изв [3], неравенства (7) равносильны неравенствам

$$\mathscr{E}(x, z)\,J\mathscr{E}^*(x, z)/i \geqslant J/i,\ \operatorname{Im} z \leqslant 0,\ \mathscr{E}(x, z)\,J\mathscr{E}^*(x, z)/i \leqslant J/i,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0.$$

Умножая неравенства (8) соответственно слева на матрицу $P_{\pm}\exp\{\mp z\alpha xJ\}$ и справа на матрицу $\exp\{\pm \bar{z}\alpha xJ\}P_{\pm}$ и переходя к пределу при $x\to\infty$, получаем, что $\mathcal{P}_{\pm}(z)JG^*_{\pm}(z)/i\geqslant 0$, или

$$\mathcal{P}_{+}(z)\mathcal{P}^*_{+}(z)\geqslant Q_{+}(z)Q^*_{+}(z),\ \operatorname{Im} z\leqslant 0,\ \mathcal{P}_{-}(z)\mathcal{P}^*_{-}(z)\geqslant Q_{-}(z)Q^*_{-}(z),\ \operatorname{Im} z\geqslant 0. \tag{9}$$

Теорема доказана.

Из неравенств (9) следует, что существуют голоморфные в полуплоскостях $\mp\operatorname{Im} z>0$ сжимающие матрицы-функции $X_{\pm}(z)$, такие, что $X_{\pm}(z)=\mathcal{P}^{-1}_{\mp}(z)Q_{\pm}(z)$, $\mp\operatorname{Im} z>0$. Так как матрица-функция $A(\lambda)$ ограничена и непрерывна на оси $(-\infty,\infty)$, то непрерывны и ограничены также матрицы-функции $\mathcal{P}_{\pm}(\lambda)$, $Q_{\pm}(\lambda)$.

Поскольку ввиду (7) и (8) всюду на оси $I_n\leqslant\mathcal{P}_{\pm}(\lambda)\mathcal{P}^*_{\pm}(\lambda)\leqslant CI_n$, то непрерывными и ограниченными на оси оказываются и матрицы-функции $\mathcal{P}^{-1}_{\pm}(\lambda)$. Из соотношения (8) при $\operatorname{Im} z=0$ получается, что матрицы-функции $X_{\pm}(z)$ имеют непрерывные граничные значения $X_{\pm}(\lambda)$, причем

$$\mathcal{P}^{-1}_{\pm}(\lambda)[\mathcal{P}^*_{\pm}(\lambda)]^{-1}=I-X_{\pm}(\lambda)X^*_{\pm}(\lambda). \tag{10}$$

Из (10) следует, что всюду на оси

$$X_{\pm}(\lambda)X^*_{\pm}(\lambda)<I, \tag{11}$$

т. е. матрицы-функции $X_{\pm}(\lambda)$ строго сжимающие. Поэтому в силу принципа максимума в полуплоскостях $\mp\operatorname{Im} z>0$ голоморфные матрицы-функции $X_{\pm}(z)$ строго сжимающие.

Напомним, что все самосопряженные расширения без выхода из исходного пространства диметрического дифференциального оператора, задаваемого выражением

$$(D^0_H f)(x)=-H^{-1}(x)Jf'(x),\ J=\begin{pmatrix} iI_n, & 0\\ 0, & -iI_n\end{pmatrix},$$

на множестве абсолютно непрерывных вектор-функций из пространства $L_2(0,\infty\colon H)=\left\{f:\|f\|^2=\int\limits_0^\infty(H(x)f(x),f(x))\,dx\right\}$ таких, что $f(0)=0$, получаются при помощи граничных условий

$$f(0)=\begin{pmatrix} f_+\\ f_-\end{pmatrix},\quad f_-=Kf_+,\quad f_{\pm}=P_{\pm}f(0),$$

K — унитарная матрица порядка n, которой должны удовлетворять вектор-функции из области определения самосопряженного расширения D^K_H.

Как было показано в [4]. матрица $S_K(\lambda)$ рассеяния для пары самосопряженных расширений D^K_H и $D^K_{H\infty}$ операторов $-H^{-1}(x)Jd/dx$ и $-H^{-1}_\infty Jd/$ $/dx$ при рассматриваемых условиях описываются формулой

$$S_K(\lambda)=[Q_{+}(\lambda)+\mathcal{P}_{+}(\lambda)K^*][\mathcal{P}_{-}(\lambda)+Q_{-}(\lambda)K^*]^{-1}K. \tag{12}$$

Как видно из (12), матрица рассеяния $S_k(\lambda)$, вообще говоря, не является граничными значениями голоморфной матрицы-функции. Однако справедлива теорема.

Теорема 2. *Для любых унитарных матриц K_1 и K_2 порядка n разность $S_{K_1}(\lambda)K^*_1-S_{K_2}(\lambda)K^*_2$ является граничными значениями матрицы-функции $F_{K_1K_2}(z)$, определенной в полуплоскости $\operatorname{Im} z>0$ и представленной там в виде*

$$F_{K_1K_2}(z)=[\mathcal{P}^*_1[\bar z)]^{-1}G_{K_1K_2}(z)\mathcal{P}^{-1}_{-}(z),$$

где $G_{K_1K_2}(z)$ — голоморфная в верхней полуплоскости, непрерывная на действительной оси и при условии $\det(I-K_1K_2)\neq 0$ не вырождающаяся нигде в конечной части полуплоскости матрица-функция.

Доказательство. Из выражения (12) условия унитарности рассеяния $S_K(\lambda) = [S_K^*(\lambda)]^{-1}$ и соотношения (7) получаем равенство

$$S_{K_1}(\lambda) K_1^* - S_{K_2}(\lambda) K_2^* = [K_1^* Q_+^*(\lambda) + \mathcal{P}_+^*(\lambda)]^{-1} [K_1^* - K_2^*] [\mathcal{P}_-(\lambda) + Q_-(\lambda) K_2]^{-1} =$$
$$= [\mathcal{P}_1^*(\lambda)]^{-1} [I + K_1^* X_+^*(\lambda)]^{-1} [K_1^* - K_2^*] [I + X_-(\lambda) K_2^*]^{-1}. \qquad (13)$$

Из равенства (13) и установленных свойств матриц-функций $P_\pm(\lambda)$ и $X_\pm(\lambda)$ непосредственно следуют все утверждения теоремы 2.

1. *Адамян В. М., Яворский М. Т.* К теории канонических систем дифференциальных уравнений на полуоси.— Докл. АН АрмССР, 1973, **56**, № 2, с. 71—77.
2. *Яворский М. Т., Галь М. М.* К теории канонических дифференциальных уравнений на полуоси.— В кн.: Методы количественного и качественного исследования дифференциальных и интегральных уравнений. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1975, с. 169—177.
3. *Глазман И. М., Любич Ю. И.* Конечномерный линейный анализ.— М. : Наука, 1969.— 475 с.
4. *Яворський М. Т.* Матриці розсіювання для канонічних систем диференціальних рівнянь на півосі.— В кн.: Теоретичні та прикладні питання алгебри і диференціальних рівнянь. Київ : Наукова думка, 1977, с. 113—118.

Дрогобыч. пед. ин-т Поступила 08.12.81