УДК 517.535.4

В. М. Сорокивский

О росте аналитических функций, представленных рядами Дирихле

Пусть (λ_n) — возрастающая последовательность положительных чисел а f — аналитическая в области $\{z : \mathrm{Re}\, z < \sigma\}$, $-\infty < \sigma < +\infty$ функция, представленная рядом Дирихле

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(z\lambda_n), \tag{1}$$

абсцисса абсолютной сходимости которого равна σ. Положим $M(x, f) = \sup\{|f(x+iy)| : y \in R\}$.

Если $\sigma = +\infty$, т. е. f — целая функция, поведение f в горизонтальных полосах и на горизонтальных прямых в тех или иных терминах, характеризующих рост $M(x, f)$, изучено достаточно хорошо [1—5, 6]. Случай, когда σ — конечное число, например $\sigma = 0$, мало изучен. В этом направлении можно отметить лишь работу [7], в которой указаны достаточные условия выполнения равенства $\rho = \rho_s$, где

$$\rho = \overline{\lim_{x\to 0-}} \, |x| \ln\ln M(x, f), \quad \rho_s = \overline{\lim_{x\to 0-}} \, |x| \ln\ln M_s(x, f) \tag{2}$$

и $M_s(x, f) = \max\{|f(x+iy)| : |y - y_0| \leqslant a, \ x < 0\}$. Величина ρ, определенная в (2), названа в [7] R-порядком функции f в полуплоскости $\{z : \operatorname{Re} z < 0\}$.

В настоящей статье укажем условия, при которых выполняется равенство $\rho = \rho^*$, где $\rho^* = \overline{\lim_{x\to 0-}} \, |x| \ln^+\ln|f(x)|$. Как и в [7], в наших оценках будет встречаться величина, аналогичная индексу конденсации. Однако если в определение такой величины в [7] входит целая функция $L(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - z^2/\lambda_n^2)$, то в данной работе вместо L — произведение Бляшке

$$H(z) = \prod_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - z)/(\lambda_n + z). \tag{3}$$

При этом предполагаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} < \infty. \tag{4}$$

Обозначим

$$q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \, (\ln\lambda_n/\lambda_n) \ln|1/H'(\lambda_n)|. \tag{5}$$

Сформулируем основной результат настоящей работы.

Теорема 1. *Если выполнено условие* (4), *то*

$$\rho^* \leqslant \rho \leqslant \rho^* + q. \tag{6}$$

Оценку (6), вообще говоря, улучшить нельзя. При построении примера используется методика из [5].

Для доказательства теоремы 1 необходимо получить оценку для коэффициентов. Пусть

$$h_n(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} (H_n(z)/(1+z)^2) \exp(-tz)\, dz, \quad H_n(z) = \prod_{\substack{k=1 \\ k\neq n}} \frac{\lambda_n - z}{\lambda_n + z}.$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства, при $x \geqslant 0$ не зависит от x, и

$$h_n(t) \exp(tx) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (H_n(z)/(1+z)^2 \exp(-ity)\, dy. \tag{7}$$

Так как в случае $\operatorname{Re} z \geqslant 0$ выполняется неравенство $|H_n(z)| \leqslant 1$, то из (7) следует $|h_n(t)| \leqslant K \exp(-tx)$ при $x \geqslant 0$, K не зависит от x и t. Устремив $x \to +\infty$, имеем $h_n(t) = 0$ при $t > 0$. Если $t < 0$, то, взяв $x = 0$, получаем $|h_n(t)| \leqslant K$. Значит, $|h_n(t)| \leqslant K$.

Таким образом, при фиксированном $x \geqslant 0$ функцию $h_n(t)\exp(tx)$ можно рассматривать как преобразование Фурье функции $H_n(x+iy)/(1+x+iy)^2$. Следовательно,

$$G_n(z) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \frac{H_n(z)}{1+z)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) \exp(tx + ity)\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} h_n(t) \exp(tz)\, dt.$$

Рассмотрим ряд $f(z+\sigma) = \sum_1^{\infty} a_k \exp(\sigma\lambda_k + \lambda_k z)$, $\sigma < 0$, который абсолютно сходится в $\{z : \operatorname{Re} z < |\sigma|\}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{0} f(t+\sigma) h_n(t)\, dt = \sum_1^{\infty} \int_{-\infty}^{0} a_k h_n(t) \exp(t\lambda_k + \sigma\lambda_k)\, dt =$$

$$= \sum_1^{\infty} a_k G_n(\lambda_k) \exp(\sigma\lambda_k) = a_n G_n(\lambda_n) \exp(\lambda_n\sigma),$$

откуда

$$a_n \exp(\sigma\lambda_n) = \frac{1}{G_n(\lambda_n)} \int_{-\infty}^{0} f(t+\sigma)\, h_n(t)\, dt. \tag{8}$$

Поскольку $H_n(\lambda_n) = 2\lambda_n H'(\lambda_n)$, то $|G_n(\lambda_n)| = |H_n(\lambda_n)|/(1+\lambda_n)^2 = 2\lambda_n |H'\times \times(\lambda_n)|/(1+\lambda_n)^2 \geqslant |H'(\lambda_n)|/2\lambda_n$ при достаточно больших $n \geqslant n_0$. Поэтому, учитывая, что $|h_n(t)| \leqslant K$, (8) примет вид

$$|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) \leqslant \frac{2K\lambda_n}{|H'(\lambda_n)|} \int_{-\infty}^{0} |f(t+\sigma)|\, dt = \frac{2K\lambda_n}{|H'(\lambda_n)|} \int_{-\infty}^{\sigma} |f(t)|\, dt. \tag{9}$$

Приступим непосредственно к доказательству теоремы 1. Из определения ρ^* для каждого $\varepsilon > 0$ при $|x|$ достаточно близких к 0 имеем

$$|f(x)| \leqslant \exp\exp(\rho_1/|x|), \quad \rho_1 = \rho^* + \varepsilon, \tag{10}$$

а из определения q получаем

$$-\ln|H'(\lambda_n)| \leqslant (q_1\lambda_n/\ln\lambda_n), \quad q_1 = q + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_1 > 0. \tag{11}$$

Учитывая (10), (11) и то, что $f(t) \sim a_1 \exp(\lambda_1 t)$, $t \to -\infty$, из (9) находим

$$|a_n| = \frac{2K\lambda_n}{|H'(\lambda_n)|} \left\{ \int_{-\infty}^{x_0} |f(t)|\, dt + \int_{x_0}^{x} \exp(\exp(\rho_1/|t|))\, dt \right\} \exp(-x\lambda_n) \leqslant$$

$$\leqslant 2K\lambda_n \exp(e^{\rho_1/|x|} + |x|\lambda_n + q_1\lambda_n/\ln\lambda_n).$$

Это неравенство верно, в частности, и для $1/|x| = (\alpha_n/\rho_1)\ln\lambda_n$, где $\alpha_n = 1 - \ln(\ln\lambda_n)^2/\ln\lambda_n$. Поскольку $\lambda_n^{\alpha_n} = \lambda_n/(\ln\lambda_n)^2$, то

$$|a_n| \leqslant 2K\lambda_n \exp(\lambda_n/\ln^2\lambda_n + \rho_1\lambda_n/\alpha_n\ln\lambda_n + q_1\lambda_n/\ln\lambda_n). \tag{12}$$

Применяя равенство

$$\rho = \overline{\lim_{n\to\infty}} (\ln\lambda_n/\lambda_n) \ln|a_n|, \tag{13}$$

доказанное в [7], из (12) получаем $\rho \leqslant \rho_1 + q_1$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ приходим к неравенствам $\rho^* \leqslant \rho \leqslant \rho^* + q$.

Покажем, что неравенство $\rho \leqslant \rho^* + q$ улучшить нельзя. Рассмотрим аналитическую в полуплоскости $\mathrm{Re}\, z = x < 0$ функцию

$$F(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n (\exp(z\lambda_n) - \exp(z(\lambda_n + \alpha_n))) \tag{14}$$

где $\lambda_n = 2^n$, $n = 2k-1$, $\lambda_n = 2^n + \alpha_n$, $n = 2k$, $\alpha_n = \exp((\bar\rho - \varkappa)\lambda_n/\ln\lambda_n)/ /a_n$, $a_n = \exp(\bar\rho\lambda_n/\ln\lambda_n)$, $\alpha_n \to 0$, $n\to\infty$, $\lambda_n + \alpha_n < \lambda_{n+1}$.

В силу (13) $\rho = \bar\rho$. С другой стороны, при $x < 0$

$$F(x) = \sum_{1}^{\infty} a_n e^{x\lambda_n}(1 - e^{x\alpha_n}) \leqslant e^{|x|} \sum_{1}^{\infty} \beta_n a_n e^{x\lambda_n} = F^*(x), \tag{15}$$

где $\beta_n = \max_x (e^{-|x|}(1 - e^{-|x|\alpha_n})) = \exp((\ln(1+\alpha_n)^{-1}/\alpha_n)(\alpha_n/(1+\alpha_n)) \sim \alpha_n/e$, $n \to \infty$. Поэтому из (15) получаем $|F(x)| \leqslant A \sum_{n=1}^{\infty} \exp(((\bar\rho - \varkappa)\lambda_n/\ln\lambda_n) - \lambda_n|x|)$.

Поскольку коэффициенты функции $F^*(x)$ положительны, то по формуле (13) получаем, что порядок функции F^* равен $\rho - \varkappa$, т. е. $\rho^* \leqslant \rho - \varkappa$. Покажем, что $q \leqslant \varkappa$.

Запишем

$$\ln|H_n(\lambda_n)| = \sum_{k=1}^{n-2} \ln\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n+\lambda_k} + \ln\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n+\lambda_{n-1}} + \ln\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}+\lambda_n} + \quad =$$

$$+ \sum_{k=n+2}^{2n+3} \ln\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n} + \sum_{k=2n+4}^{\infty} \ln\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n}. \tag{16}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n-2} \ln\frac{\lambda_n-\lambda_k}{\lambda_n+\lambda_k} \geqslant \sum_{k=1}^{n-2} \ln\frac{\lambda_n-\lambda_{n-2}}{2\lambda_n} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-2} \ln\frac{2^n-2^{n-2}}{2^{n+1}} \geqslant (1+o(1))\, n \ln\frac{3}{8}, \quad n\to\infty.$$

При $n+2 \leqslant k \leqslant 2n+3$ $(\lambda_k-\lambda_n)/(\lambda_k+\lambda_n) \geqslant (\lambda_{n+2}-\lambda_n)/2\lambda_{2n+3} \geqslant (2^{n+2} - 2^n)/2^{2n+4} \geqslant 2^{-(n+3)}$. Поэтому

$$\sum_{k=n+2}^{2n+3} \frac{\lambda_k-\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n} = (1+o(1))\,(n+1\ \ (n+3)\ln\frac{1}{2}, \quad n\to\infty.$$

Далее,

$$\sum_{k=2n+4}^{\infty} \ln\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n} + \sum_{k=2n+4}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n}\right) > \sum_{k=2n+4}^{\infty} \ln\left(1-\frac{2\lambda_n}{\lambda_k}\right).$$

Кроме того, $2\lambda_n/\lambda_k \leqslant (1/2)^{n+3}$. Поэтому

$$\sum_{k=2n+4}^{\infty} \left|\ln\frac{\lambda_k-\lambda_n}{\lambda_k+\lambda_n}\right| \leqslant \sum_{k=2n+4}^{\infty} \left|\ln\left(1-\frac{2\lambda_n}{\lambda_k}\right)\right| \leqslant K \sum_{k=2n+4}^{\infty} \frac{2^{n+1}}{2^k} \leqslant K_1.$$

Таким образом, $\ln|H_n(\lambda_n)| = \ln((\lambda_n-\lambda_{n-1})/(\lambda_n+\lambda_{n-1})) + \ln(\lambda_{n+1}-\lambda_n)/ /(\lambda_{n+1}+\lambda_n)) + O(n^2)$, $n\to\infty$. Если $n=2m$, то

$$\ln\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n+\lambda_{n-1}} = \ln\frac{\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}}{\lambda_{2m}+\lambda_{2m-1}} = \ln\frac{2^{2m}+\alpha_{2m}-2^{2m}}{2\lambda_{2m}} \geqslant -\ln a_n +$$

$$+ (\bar\rho-\varkappa)\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n} - \ln 2\lambda_n = -\bar\rho\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n} + \bar\rho\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n} - \varkappa\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n} - \ln 2\lambda_n =$$

$$= -\varkappa\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n} - \ln 2\lambda_n, \quad \ln\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}+\lambda_n} \geqslant \ln\frac{\lambda_{2m+1}-\lambda_{2m}}{2\lambda_{2m+1}} =$$

$$= \ln\frac{2^{2m+1}(1-1/2)}{2^{2m+1}2} = \ln\frac{1}{4}.$$

Если же $n=2m-1$, то, как и раньше,

$$\ln\frac{\lambda_{n+1}-\lambda_n}{\lambda_{n+1}+\lambda_n} = \ln\frac{\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}}{2\lambda_{2m}} \geqslant -\varkappa\frac{\lambda_n}{\ln\lambda_n} - \ln 2\lambda_n,$$

$$\ln\frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_n+\lambda_{n-1}} \geqslant \ln\frac{\lambda_{2m}-\lambda_{2m-1}}{2\lambda_{2m}} \geqslant \ln\frac{2^{2m-1}(1-1/2)}{22^{2m-1}} = \ln\frac{1}{4}.$$

Поэтому, учитывая оценки соответствующих произведений, получаем $\ln|H_n(\lambda_n)| \geqslant -(1+o(1))\varkappa\lambda_n/\ln\lambda_n$, $n\to\infty$. Кроме того, $1/|H'(\lambda_n)| = 2\lambda_n/|H_n(\lambda_n)|$; следовательно, $q \leqslant \varkappa$.

В теории аналитических в полуплоскости функций, представленных рядами Дирихле, часто приходится использовать другие шкалы роста, а именно (см., например, [8, 9]) порядок $\bar\rho$ и тип τ, которые соответственно определяются по формулам $\bar\rho = \varlimsup\limits_{x\to 0}(-\ln|x|)^{-1}\ln\ln M(x)$, $\tau = \varlimsup\limits_{x\to 0}|x|^{\bar\rho} \times \ln M(x)$.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (4). *Тогда* $\bar\rho/(1+\bar\rho) \leqslant \max\{\rho^{**}/(1+\rho^{**}), \gamma\}$, *где* $\rho^{**} = \varlimsup\limits_{x\to 0}\ln\ln|f(x)|/(-\ln|x|)$, $\gamma = \varlimsup\limits_{n\to\infty}\ln\ln|1/H'(\lambda_n)|/\ln\lambda_n$.

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (4). *Тогда*

$$\tau^{1/(1+\rho)} \leqslant (\tau^*)^{1/(1+\rho)} + \bar\gamma, \tag{17}$$

где $\tau^* = \varlimsup\limits_{x\to 0-}|x|^{\bar\rho}\ln|f(x)|$, $\bar\gamma = \bar\rho^{\bar\rho/(1+\bar\rho)}\varlimsup\limits_{n\to\infty}\lambda_n^{-\bar\rho/(1+\bar\rho)}\ln|1/H'(\lambda_n)|/(1+\bar\rho)$.

Оценку (17) улучшить нельзя.

Доказательства теорем 2, 3 несущественно отличаются от доказательства теоремы 1, и поэтому мы их здесь не приводим. Кроме того, теоремы 1, 2 можно обобщить на случай обобщенных порядков, введенных в [10], а теорему 3 на случай уточненного порядка.

1. *Мандельбройт С.* Примыкающие ряды. Регуляризация последовательностей. Применение.— М. : Изд-во иностр. лит., 1955.
2. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 535 с.
3. *Леонтьев А. Ф.* Последовательности полиномов из экспонент. — М. : Наука, 1980. — 384 с.
4. *Каримов З. Ш.* Об оценке функции, представленной рядом Дирихле.— Мат. сб., 1975, **96**, № 4, с. 560—567.
5. *Шеремета М. Н.* О росте на действительной оси функции, представленной рядом Дирихле.— Мат. заметки, 1983, **33**, № 2, с. 235—245.
6. *Винницкий Б. В., Сорокивский В. М.* О росте целых функций, представленных рядами Дирихле.— Львов, 1982.— 20 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ 13.01.82, № 176—82 Деп.
7. *Гайсин А. М.* Оценка роста функции, представленной рядом Дирихле в полуполосе.— Мат. сб., 1982, **117**, № 3, с. 412—424.
8. *Бойчук В. С.* О росте абсолютно сходящихся в полуплоскости рядов Дирихле.— В кн.: Мат. сб. Киев : Наук. думка, 1976, с. 238—240.
9. *Дагене Е.* О центральном показателе ряда Дирихле.— Литов. мат. сб., 1968, 8, № 3, с. 504—521.
10. *Галь Ю. М., Шеремета М. Н.* О росте аналитических в полуплоскости функций, заданных рядами Дирихле.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 12, с. 1064—1067.

Львов. гос. ун-т

Поступила 12.06.83