УДК 513.88

И. И. Рудинский

Об интегральном представлении четно-положительно определенных функций на ядерных пространствах

В настоящей заметке результаты работы [1] переносятся на случай четно-положительно определенных функций на ядерных пространствах. Приведены приложения интегральных представлений четно-положительно определенных функций на ядерных пространствах к интегральным представлениям семейств самосопряженных операторов, связанных соответствующими алгебраическими соотношениями.

1. Пусть задано ядерное пространство $\Phi = \bigcap_{\tau \in T} H_\tau$ — проективный предел гильбертовых пространств (см., например [2]), $k(t)$ — четная, $k(t) = k(-t)$, непрерывная на $\Phi \ni t$ функция.

Определение. *Четную функцию $k(t)$ на ядерном пространстве Φ будем называть четно-положительно определенной (ч. п. о.) если $\forall t^{(1)}, \ldots, t^{(m)} \in \Phi$, $\forall \xi_1, \ldots, \xi_m \in \mathbb{C}^1$ выполняется неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^{m} \frac{k(t^{(i)} + t^{(j)}) + k(t^{(i)} - t^{(j)})}{2} \xi_i \bar{\xi}_j \geqslant 0.$$

В дальнейшем всюду будем предполагать, что функция $k(t)$ ограничена, т. е. $|k(t)| \leqslant b < \infty$.

Теорема 1. *Для того чтобы функция $k(t)$, заданная на ядерном пространстве Φ, допускала представление*

$$k(t) = \int_{\Phi'} \cos \lambda, t)\, d\rho(\lambda), \quad \lambda \in \Phi', \tag{1}$$

где $\rho(\cdot)$ — неотрицательная четная конечная мера на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами в Φ', необходимо и достаточно, чтобы $k(t)$ была ч. п. о., непрерывна и ограничена на Φ. Мера $\rho(\cdot)$ по $k(t)$ определяется однозначно.

Доказательство достаточности проводится по схеме работы [3] с модификациями, связанными со спецификой ч. п. о. функций; необходимость проверяется непосредственно. Единственность определения четной меры в (1) вытекает из ограниченности функции $k(t)$ (подобные рассуждения см. в [4, гл. VIII]).

2. Пусть $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H_0 и ортогональный базис в H_τ $\forall \tau \in \mathrm{T}$ (следовательно, $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ — базис в Φ). Разложение $t \in \Phi$ по базису $(e_i)_{i=1}^{\infty}$ в Φ дает $k\left(t = \sum\limits_{i=1}^{\infty} t_i e_i\right) = k(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots)$. Под четной по каждой переменной функцией $k(t)$, $t \in \Phi$, будем понимать функцию, удовлетворяющую равенству $k(t_1, t_2, \ldots, t_n, \ldots) = k(t_1, t_2, \ldots - t_n, \ldots)$, $t_i = (t, e_i)$, $i = 1, 2, \ldots$.

Теорема 2. *Для того чтобы функция $k(t)$, заданная на ядерном пространстве Φ, допускала представление*

$$k(t) = \int\limits_{\Phi'_+} \prod_{i=1}^{\infty} \cos \lambda_i t_i d\mu(\lambda), \quad \lambda \in \Phi'_+, \quad \Phi'_+ = \{\lambda \mid \lambda_i = (\lambda, e_i)_{H_0} \geqslant 0\}, \qquad (2)$$

где $\mu(\cdot)$ — неотрицательная конечная мера на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами в Φ', необходимо и достаточно, чтобы $k(t)$ была ч. п. о., непрерывна и ограничена на Φ. Мера $\mu(\cdot)$ по $k(t)$ определяется однозначно.

Доказательство достаточности проводится по схеме работы [1]; необходимость проверяется непосредственно. Единственность определения меры в (2) вытекает из [4] и конструкции меры $\mu(\cdot)$.

3. Рассмотрим семейство ограниченных самосопряженных коммутирующих операторов $(A_t)_{t\in\Phi}$ в вещественном гильбертовом пространстве H.

Теорема 3. *Для того чтобы семейство $(A_t)_{t\in\Phi}$ допускало представление*

$$A_t = \int\limits_{\Phi'} \cos(\lambda, t)\, dE(\lambda), \quad \lambda \in \Phi', \qquad (3)$$

где $E(\lambda)$ — разложение единицы на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами в Φ', необходимо и достаточно, чтобы операторы удовлетворяли следующим условиям: 1) $[A_{t+s} + A_{t-s}]/2 = A_t A_s$, $A_t = A_{-t}$, $A_0 = I$; 2) A_t сильно непрерывно зависит от t; 3) $\| A_t \| \leqslant b < \infty$. Разложение единицы $E(\lambda)$ из (3) по $(A_t)_{t\in\Phi}$ определяется однозначно.

Докажем достаточность. Пусть оператор A_t имеет простой спектр, Ω — циклический вектор, т. е. замкнутая линейная оболочка $\{A_t\Omega\} = H$. Положим $(A_t\Omega, \Omega) = k(t)$, $k(t)$ — непрерывная четная ограниченная ч. п. о. функция на Φ. Следовательно, по теореме 1 $k(t) = \int\limits_{\Phi'} \cos(\lambda, t) d\rho(\lambda)$.

Сопоставим векторам $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k A_{t^{(k)}}\Omega \in H$ функции $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \cos(\lambda, t^{(k)}) \in L^2(\Phi', d\rho(\lambda))$, $n = 1, 2, \ldots$. Это соответствие изометрично и продолжается до унитарного отображения $U: H \to L_2(\Phi' d\rho(\lambda))$. При этом отображении оператору A_t соответствует оператор умножения в $L_2(\Phi', d\rho(\lambda))$ на функцию $\cos(\lambda, t)$. Действительно, это следует из таких соотношений:

$$A_t\left(\sum_{k=1}^{n} c_k A_{t^{(k)}}\Omega\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k \left(\frac{A_{t+t^{(k)}} + A_{t-t^{(k)}}}{2}\right)\Omega =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \frac{\cos(\lambda, t + t^{(k)}) + \cos(\lambda, t - t^{(k)})}{2} = \cos(\lambda, t) \sum_{k=1}^{n} c_k \cos(\lambda, t^{(k)}).$$

Эквивалентность формулировок спектральной теоремы в терминах операторов умножения и в терминах разложения единицы завершает доказательство достаточности.

Единственность разложения единицы следует из единственности меры $d\rho(\lambda)$.

Теорема 3 — аналог теоремы 4 из [5], однако методы доказательства этих теорем различны.

Подобно теореме 3 доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Для того чтобы семейство $(A_t)_{t\in\Phi}$ допускало представление*

$$A_t = \int_{\Phi'_+} \prod_{i=1}^{\infty} \cos\lambda_i t_i dF(\lambda), \quad \lambda\in\Phi'_+, \quad t\in\Phi, \quad \Phi'_+ = \{\lambda \mid \lambda_i = (\lambda, e_i)_{H_0} \geqslant 0\}, \quad (4)$$

где $F(\lambda)$ — разложение единицы на σ-алгебре, порожденной цилиндрическими множествами в Φ'_+, необходимо и достаточно, чтобы операторы удовлетворяли следующим условиям: 1) $[A_{t+s} + A_{t-s}]/2 = A_t A_s$, $A_{(t_1,\ldots,t_n,\ldots)} = A_{(t_1,\ldots,-t_n,\ldots)}$, $A_0 = I$; 2) A_t — сильно непрерывно зависит от t, 3) $\|A_t\| \leqslant b < \infty$. Разложение единицы $F(\lambda)$ из (4) по $(A_t)_{t\in\Phi}$ определяется однозначно.

1. *Лопотко О. В., Рудинский И. И.* Интегральное представление четно-положительно определенных ограниченных функций бесконечного числа переменных.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 3, с. 378—380.
2. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев : Наук. думка, 1978.— 360 с.
3. *Калюжный А. А.* Об интегральном представлении экспоненциально выпуклых функций.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 3, с. 370—373.
4. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 800 с.
5. *Березанский Ю. М.* Спектральные представления решений некоторых классов функциональных и дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1978, № 7, с. 579—583.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 20.07.82,
после доработки — 25.07.83