УДК 517.911

М. У. Ахметов, Н. А. Перестюк

О почти периодических решениях одного класса систем с импульсным воздействием

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$dx/dt = A(t)x + f(t), \quad t \neq t_i, \qquad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x + I_i, \tag{1}$$

в которой $x \in R^n$; $A(t)$ — непрерывная периодическая с периодом T квадратная матрица; последовательность постоянных матриц $\{B_i\}$ периодическая с периодом p и $\det(E + B_i) \neq 0$, $i = 0, \pm 1, \ldots$; последовательность моментов времени $\{t_i\}$ удовлетворяет условию $t_{i+p} = t_i + T$, $i = 0, \pm 1, \ldots$.

Функцию $f(t)$ считаем почти периодической в следующем смысле: она кусочно-непрерывная с разрывами первого рода в точках последовательности $\{t_i\}$, равномерно непрерывная на совокупности интервалов $]t_i, t_{i+1}[$, $i = 0, \pm 1, \ldots$, и для любого действительного числа $\varepsilon > 0$ существует относительно плотное множество действительных чисел Т такое, что для $\tau \in \mathrm{T}$ и $t \in R$ справедливо неравенство $|f(t+\tau) - f(t)| < \varepsilon$, если $|t - t_i| > \varepsilon$, $i = 0, \pm 1, \ldots$.

В настоящей заметке продолжены исследования работ [1—4].

Пусть $X(t, \tau)$ — матрица Коши [2] однородной системы $dx/dt = A(t)x$, $t \neq t_i$, $\Delta x|_{t=t_i} = B_i x$, соответствующей системе (1). Применим к системе (1) T-периодическое преобразование $x = \Phi(t) y$ [2]. Здесь $\Phi(t) = X(t) \times \exp(-\Lambda t)$, $\Lambda = \mathrm{Ln}\, X(T)/T$, $X(t) = X(t, 0)$. Тогда система (1) заменится уравнениями

$$dy/dt = \Lambda y + g(t), \quad t \neq t_i, \quad \Delta y|_{t=t_i} = Q_i, \tag{2}$$

где $g(t) = \Phi^{-1}(t) f(t)$, $Q_i = \Phi^{-1}(t_i +) I_i$.

В силу свойств матрицы $\Phi(t)$ вопрос об ограниченности, почти периодичности или асимптотических характеристиках решений системы (1) сводится к такому же вопросу для уравнений (2).

Заметим, что если матрица $A(t)$ не зависит от времени, то матрицу Коши $X(t, \tau)$, а следовательно, и матрицу $\Phi(t)$, можно выписать в явном виде. Действительно, при $A(t) = A$ имеем

$$X(t) = \exp(A(t - t_j)) \prod_{0<t_i<t} (E + B_i) \exp(A(t_i - t_{i-1})) \exp(At_k),$$

$$t_j < t \leqslant t_{j+1}, \quad t_{k-1} < 0 \leqslant t_k, \quad j > k, \quad X(T) = \exp(-At_{j-1}) \times$$

$$\times \prod_{i=j+1}^{j+p} (E + B_j) \exp(A(t_i - t_{i-1})) \exp(At_j), \quad t_{j-1} < 0 \leqslant t_j, \quad t_{j+p-1} < T \leqslant t_{j+p}.$$

Если $\{a_i\}$ — некоторая почти периодическая последовательность векторов, а $\varphi(t)$ — почти периодическая в смысле Бора функция, то, используя методику из [4], можно доказать, что в условиях системы (1) справедлива лемма.

Лемма 1. *Для любых действительных чисел ε и ν, $0 < \nu < \varepsilon$, существуют относительно плотные множества действительных чисел τ и целых чисел Q такие, что для каждого элемента $\tau \in \mathrm{T}$ найдется элемент $q \in Q$, для которых выполняются соотношения:*

1) $|\varphi(t+\tau)-\varphi(t)|<\varepsilon, \quad t\in R;$

2) $|f(t+\tau)-f(t)|<\varepsilon, \quad |t-t_i|>\varepsilon, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

3) $|a_{i+q}-a_i|<\varepsilon, \quad i=0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$

4) $|\bar{t}_k^q-\tau|<\nu, \ \bar{t}_k^q=t_{k+q}-t_k, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots .$

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 (*скалярный случай*) *из ограниченности суммы* $F(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds+\sum\limits_{0<t_i<t} a_i$ *вытекает почти периодичность* $F(t)$.

Здесь и в дальнейшем почти периодичность понимается в определенном выше для функции $f(t)$ смысле.

Доказательство. Пусть $F(t)$ — ограничена и $m=\inf\limits_t F(t)$, $M=\sup\limits_t F(t)$. Предполагается, что $m<M$ (случай $m=M$ тривиален).

1. Покажем, что для $F(t)$ на оси R найдется относительно плотное множество пар точек $\{x_1, x_2\}$, реализующих с точностью до ε колебание функции $\operatorname{osc}\limits_{t\in R} F(t)=M-m$.

По определению нижних и верхних граней существует пара точек $\{s_1, s_2\}\in R$ такая, что $F(s_1)<m+\varepsilon/8$, $F(s_2)>M-\varepsilon/8$.

Так как $f(t)$ ограничена, то можно считать, что $|s_1-t_i|>\varepsilon$ и $|s_2-t_i|>\varepsilon$, $i=0, \pm 1, \ldots$, где ε произвольно мало. Обозначим $d=|s_1-s_2|$, $s=\min(s_1, s_2)$, и рассмотрим пару сдвинутых точек $x_1=s_1+\tau$, $x_2=s_2+\tau$, где $\tau=\tau(\min(\varepsilon/8d, \ \varepsilon/8(d/T+1)p))$ выбрано согласно лемме 1. В силу леммы 1 точки τ и, следовательно, точки $x=s+\tau$ образуют относительно плотное множество и потому существует число $l=l(\min(\varepsilon/8d, \ \varepsilon/8(d/T+1)p))$ такое, что любой отрезок $[a, a+l]$ содержит точку $s+\tau$, причем можно проверить, что из того, что $t_i+\varepsilon<s<t_{i+1}-\varepsilon$, следует, что $t_{i+q}<s+\tau<t_{i+q+1}$. Поэтому в любом отрезке $[a, a+L]$ длины $L=l+d$ содержится пара точек $\{x_1, x_2\}$, для которых $F(x_2)-F(x_1)>M-m-\varepsilon/2$. Отсюда

$$M-F(x_2)<\varepsilon/2, \qquad F(x_1)-m<\varepsilon/2, \tag{3}$$

т. е. найдется относительно плотное множество пар точек $\{x_1, x_2\}$, реализующих колебание $F(t)$ с точностью до ε.

2. Пусть $\tau=\tau[\min(\varepsilon/3L, \varepsilon/6(L/2T+1), \ \varepsilon/12\sup\limits_t|f(t)|(L/2T+1)p)]$.

Используя свойства пар точек $\{x_1, x_2\}$ и оценивая сверху и снизу разность $F(t+\tau)-F(t)$, найдем, что $|F(t+\tau)-F(t)|<\varepsilon \ \forall t\in R$ таких, что $|t-t_i|>\varepsilon$, $i=0, \pm 1, \ldots$, т. е. функция $F(t)$ почти периодична. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть скалярное дифференциальное уравнение с импульсным воздействием*

$$dx/dt=\lambda x+f(t), \quad t\neq t_i, \qquad \Delta x|_{t=t_i}=a_i, \tag{4}$$

где λ — комплексное число, $f(t)$ — почти периодическая функция, $\{a_i\}$ — почти периодическая последовательность, $t_{i+p}=t_i+T$, $i=0, \pm 1, \ldots$, имеет ограниченное решение. Тогда это решение почти периодическое.

Доказательство. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$x(t)=e^{\lambda t}\left[x_0+\int\limits_0^t e^{-\lambda s}f(s)\,ds+\sum_{0<t_i<t} e^{-\lambda t_i}a_i\right], \tag{5}$$

где x_0 — произвольная постоянная.

1. Пусть $\operatorname{Re}\lambda=\alpha>0$, тогда $|e^{\lambda t}|\to\infty$ при $t\to\infty$. Следовательно, для того, чтобы решение (5) было ограниченным, необходимо $x_0=-\int\limits_0^\infty e^{-\lambda s}f(s\ \ ds-\sum\limits_{0<t_i} e^{-\lambda t_i}a_i$. Тогда $x(t)=-\int\limits_t^\infty \exp[\lambda(t-s)]f(s)\,ds-\sum\limits_{t<t_i}\exp[\lambda(t-t_i)]a_i$.

Если $\tau = \tau(\varepsilon)$ есть ε-почти период, определенный леммой 1, то

$$|x(t+\tau) - x(t)| = \left| \int_t^\infty \exp[\lambda(t-s)] (f(s+\tau) - f(s))\, ds + \right.$$

$$\left. + \sum_{t<t_i} \exp[\lambda(t-t_i)] (a_{i+q} - a_i) \right| \leqslant \Gamma_1(\varepsilon)\, \varepsilon,$$

где $\Gamma_1(\varepsilon)$ — ограниченная функция ε.

Таким образом, $x(t)$ — почти периодическая функция.

2. Пусть $\operatorname{Re} \lambda = \alpha < 0$, тогда $|\exp(\lambda t)| \to \infty$ при $t \to -\infty$, и так же, как в случае 1, получим, что ограниченное решение имеет вид $x(t) = \int_{-\infty}^t \exp[\lambda(t-s)] f(s)\, ds + \sum_{t_i<t} \exp[\lambda(t-t_i)]\, a_i$. Это решение почти периодическое.

3. Пусть $\operatorname{Re} \lambda = 0$, $\lambda = i\nu$, и существует ограниченное решение

$$x(t) = e^{i\nu t} \left[x_0 + \int_0^t e^{-i\nu s} f(s)\, ds + \sum_{0<t_k<t} e^{-i\nu t_k} a_k \right].$$

Тогда сумма $\int_0^t e^{-i\nu s} f(s)\, ds + \sum_{0<t_k<t} e^{-i\nu t_k} a_k$ ограничена и по лемме 3 почти периодична.

В этом случае все решения уравнения (4) почти периодические.

Теорема 1. *Если система* (1) *имеет ограниченное решение* $x = h(t)$, *то оно почти периодическое.*

Доказательство. Как было замечено выше, вопрос о почти периодичности ограниченного решения системы (1) равносилен вопросу о почти периодичности ограниченного решения системы (2), полученной из системы (1) периодическим преобразованием $x = \Phi(t)\, y$.

Существует неособенное преобразование $y = Sz$, переводящее систему (2) в систему с верхней треугольной матрицей. Поэтому, не нарушая общности, будем считать, что система (2) имеет вид

$$\begin{aligned} dy_1/dt &= \lambda_1 y_1 + b_{12} y_2 + \ldots + b_{1n} y_n + g_1(t), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad t \neq t_i, \\ dy_n/dt &= \qquad\qquad\qquad\qquad \lambda_n y_n + g_n(t), \\ \Delta y_1|_{t=t_i} &= Q_{i1}, \ldots, \Delta y_n|_{t=t_i} = Q_{in}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь λ_i, $i = \overline{1, n}$, — собственные числа матрицы Λ.

Решая систему (6) при помощи леммы 3 снизу вверх, получим, что ее ограниченное решение почти периодично. Теперь остается, возвращаясь к исходной системе, завершить доказательство теоремы.

Таким образом, доказан аналог теоремы о почти периодичности ограниченного решения из [5].

Теорема 2. *Пусть система* (1) *удовлетворяет всем перечисленным выше условиям и, кроме того, матрица* $\Lambda = \operatorname{Ln} X(T)/T$ *не имеет собственных чисел с нулевой вещественной частью. Тогда система* (1) *имеет единственное почти периодическое решение. Если к тому же матрица* Λ *не имеет собственных чисел с положительной вещественной частью, то почти периодическое решение асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $\Lambda = \operatorname{diag}(P, N)$, где $\operatorname{Re} \lambda_j(P) > 0$, $j = \overline{1, m}$, $\operatorname{Re} \lambda_j(N) < 0$, $j = \overline{m+1, n}$. Положим

$$G(t) = \begin{cases} -\operatorname{diag}(e^{Pt}, 0) & \text{при } t < 0, \\ \operatorname{diag}(0, e^{Nt}) & \text{при } t \geqslant 0. \end{cases}$$

В дальнейшем будем использовать свойства матрицы $G(t)$, определенные в [6].

Покажем, что выражение

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, g(s)\, ds + \sum_{-\infty < t_i < \infty} G(t-t_i)\, Q_i \tag{7}$$

есть решение системы (2).

При $t \neq t_i$, $t \in R$, полагая

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} G(t-s)\, g(s)\, ds + \int_{t}^{\infty} G(t-s)\, g(s)\, ds + \sum_{t_i < t} G(t-t_i)\, Q_i +$$
$$+ \sum_{t_i \geqslant t} G(t-t_i)\, Q_i,$$

получим

$$dy/dt = [G(0+) - G(0-)]\, g(t) + \Lambda \int_{-\infty}^{\infty} G(t-s)\, g(s)\, ds +$$
$$+ \Lambda \sum_{-\infty < t_i < \infty} G(t-t_i)\, Q_i = \Lambda y + g(t).$$

Если $t = t_j$, то $\Delta y|_{t=t_j} = [G(0+) - G(0-)]\, Q_j = Q_j$. Таким образом, $y(t)$ — решение системы (2).

Далее имеем

$$|y(t)| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} C \exp(-\alpha |t-s|) \sup_s |g(s)|\, ds + \sum_{i=-\infty}^{\infty} C \exp(-\alpha |t-t_i|) \times$$
$$\times \sup_i |Q_i| \leqslant 2C \max(1/\alpha, 1/(1-\exp(-\alpha\gamma)))\, (\sup_t |g(t)| + \sup_i |Q_i|),$$

где $C > 0$ и $\alpha > 0$ — постоянные, удовлетворяющие соотношению $|G(t)| < C \exp(-\alpha |t|)$, $t \in R$, а $\gamma = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant p} (t_{i+1} - t_i)$.

Пусть τ — ε-почти период функции $f(t)$, взятый согласно лемме 2. Тогда для $|t - t_i| > \varepsilon$ найдем $|y(t+\tau) - y(t)| \leqslant \Gamma_2(\varepsilon)\, \varepsilon$, где $\Gamma_2(\varepsilon)$ — ограниченная функция ε, т. е. $y(t)$ — почти периодическая функция.

Возвращаясь к системе (1), найдем, что единственное почти периодическое решение имеет вид

$$h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)\, G(t-s)\, \Phi^{-1}(s)\, f(s)\, ds + \sum_{-\infty < t_i < \infty} \Phi(t)\, G(t-t_i)\, \Phi^{-1}(t_i)\, I_i. \tag{8}$$

Следовательно, для него также справедлива оценка вида $\sup\limits_t |h(t)| \leqslant K(\sup\limits_t |f(t)| + \sup\limits_i |I_i|)$.

Пусть все собственные числа матрицы Λ имеют отрицательные вещественные части. Тогда, так как разность любых двух решений системы (2) есть решение однородной системы $dx/dt = \Lambda x$, то система (2) асимптотически устойчива и, следовательно, асимптотически устойчива система (1).

Теорема доказана.

По ходу доказательства теоремы 2 было одновременно показано, что справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $f(t)$ — произвольная кусочно-непрерывная с разрывами первого рода в точках t_i ограниченная функция, а $\{I_i\}$ — произвольная ограниченная последовательность.*

Тогда существует единственное ограниченное решение системы (1), для которого справедлива оценка $\sup\limits_t |x(t)| \leqslant K(\sup\limits_t |f(t)| + \sup\limits_i |I_i|)$ с некоторой конечной положительной постоянной K.

Рассмотрим квазилинейную систему с импульсным воздействием

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \quad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = B_i x + I_i(x), \tag{9}$$

в которой матрицы $A(t)$, B_i, $i = 0, \pm 1, \ldots$, и последовательность $\{t_i\}$ такие же, как и в системе (1), $f(t, x)$ почти периодична по t, а последовательность $\{I_i(x)\}$ почти периодична по i равномерно относительно x на каждом компакте. Кроме того, выполняется условие Липшица

$$|f(t, x) - f(t, y)| + |I_i(x) - I_i(y)| \leqslant N|x - y| \tag{10}$$

равномерно по всем $t \in R$ и $i = 0, \pm 1, \ldots$.

Теорема 4. *Если* $\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda) \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, *то при достаточно малой постоянной N система* (9) *допускает единственное почти периодическое решение. При условии* $\operatorname{Re}\lambda_j(\Lambda) < 0$, $j = \overline{1, n}$, *и достаточно малой постоянной N почти периодическое решение асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Применяя лемму 1 и пользуясь свойствами матрицы $G(t)$, можно проверить, что оператор

$$W[y] = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t)G(t-s)\Phi^{-1}(s)f(s, y(s))\,ds + \sum_{-\infty<t_i<\infty} \Phi(t)G(t-t_i) \times \\ \times \Phi^{-1}(t_i)I_i(y(t_i))$$

определен на множестве почти периодических функций и переводит их в почти периодические же функции. Кроме того, $W[y]$ — оператор сжатия, если справедливо неравенство $2NCM[1/\alpha + 1/(1 - \exp(-\alpha\gamma))] < 1$, где $M = \sup\limits_{t,s\in R} |\Phi(t)||\Phi^{-1}(s)|$. Отсюда следует доказательство первой половины теоремы.

Достаточность условий асимптотической устойчивости почти периодического решения проверяется так же, как и в статье [2]. Пусть $\mu = \sup\limits_t \Lambda(t)$, $\beta^2 = \sup\limits_i \Lambda_i^2$, где $\Lambda(t)$ — наибольшее собственное число матрицы $(A(t) + A^*(t))/2$, Λ_i — наибольшие собственные числа матриц $(E + B_i^*) \times \times (E + B_i)$.

Используя результаты [3] и лемму 1, можно доказать, что справедлива такая теорема.

Теорема 5. *Если* $\mu + (p \ln \beta)/T < 0$, *то система* (1) *имеет единственное асимптотически устойчивое почти периодическое решение.*

1. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М. : Физматгиз, 1974.— 503 с.
2. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Периодические и почти периодические решения дифференциальных уравнений с импульсным воздействием.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 1, с. 66—73.
3. *Самойленко А. М., Перестюк Н. А.* Об устойчивости систем с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 11, с. 1995—2001.
4. *Халанай А., Векслер Д.* Качественная теория импульсных систем.— М. : Мир, 1971.— 312 с.
5. *Bohr H. und Neugebauer O.* Über lineare Differentialgleichungen mit constanten Koeffizienten und fastperiodischer rechter Seite.— Gött. Nachr., 1926, S. 8—22.
6. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости.— М. : Наука, 1967.— 472 с.

Киев. гос. ун-т

Поступила 24.11 82