УДК 517:944:511

*В. С. Илькив*

# Нелокальная краевая задача для уравнений в частных производных бесконечного порядка

При исследовании краевых задач для уравнений в частных производных бесконечного порядка эллиптического и гиперболического типов Ю. А. Дубинским введены и изучены [1, 2] пространства Соболева бесконечного порядка.

В настоящей работе для задач, порожденных общими дифференциальными выражениями в частных производных с постоянными коэффициентами и нелокальными (обобщающими условия периодичности) граничными условиями, введены аналоги пространств Соболева бесконечного порядка; изучены некоторые их свойства, в частности доказаны теоремы вложения в пространства Соболева конечного порядка.

Установлены условия разрешимости этих задач в указанных пространствах.

В области $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega$ — $m$-мерный тор, образованный отождествлением противоположных граней параллелепипеда $\{x : 0 \leqslant x_j \leqslant \leqslant 2\pi;\ j = 1, \dots, m\}$, рассматривается задача

$$L(\partial/\partial t, \partial/\partial x)\, u \equiv \sum_{|s|=0}^{\infty} a_s \frac{\partial^{|s|} u(x, t)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} = f(x, t), \tag{1}$$

$$\partial^\alpha u/\partial t^\alpha|_{t=0} - \mu\, \partial^\alpha u/\partial t^\alpha|_{t=T} = 0, \alpha = 0, 1, \dots, \tag{2}$$

где $x = (x_1, \dots, x_m)$, $s = (s_0, s_1, \dots, s_m)$, $|s| = s_0 + s_1 + \dots + s_m$; $\mu$, $a_s$ — комплексные числа.

Исследуем вопрос о классе функций, в котором будем искать решение задачи (1), (2).

Для этого в области $\Omega_T$ рассмотрим следующую задачу на собственные значения для уравнения конечного порядка, соответствующую задаче (1), (2).

$$\sum_{|s|=0}^{n} a_s \frac{\partial^{|s|} u(x, t)}{\partial t^{s_0} \partial x_1^{s_1} \dots \partial x_m^{s_m}} = \lambda u(x, t), \tag{3}$$

$$\partial^\alpha u/\partial t^\alpha|_{t=0} - \mu \partial^\alpha u/\partial t^\alpha|_{t=T} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, (n-1). \tag{4}$$

Решение задачи (3), (4) ищем в пространстве функций $v(x, t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^m} v_k(t) \exp i(k, x)$, где $(k \cdot x) = k_1 x_1 + \dots + k_m x_m$, таких, что для каждого $t \in [0, T]$ функция $\partial^\alpha v/\partial t^\alpha$, $\alpha = 0, 1, \dots, n$, будет принадлежать пространству функций, у которых производные порядка $n - \alpha$ суммируемы с квадратом и непрерывны в норме этого пространства.

Теорема 1. *Собственные функции задачи* (3), (4) — $\exp(\tau(p) t + i(k,x))$, *где* $\tau(p) = -\ln \mu/T + i 2\pi p/T$, $(k, p) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ ($\ln \mu$ — *понимается в смысле главного значения*), *и образуют базис Рисса в* $L_2(\Omega_T)$.

Доказательство теоремы проведено в [3] (см. также [4]).

Для задачи (1), (2) в случае уравнения конечного порядка естественно рассматривать пространства Соболева конечного порядка $W^q(\Omega_T)$, $q \in \mathbb{R}$, являющиеся пополнением конечных сумм вида $u(x, t) = \sum_{k,p} u_{k,p} \exp(\tau(p) t + i(k \cdot x))$ по норме $\|u\|_q^2 = (2\pi)^m T \sum_{(k,p) \in \mathbb{Z}^{m+1}} (1 + \|k\|^2 + p^2)^q |u_{k,p}|^2$, $\|k\|^2 = k_1^2 + \dots + k_m^2$.

Для определения соответствующих пространств в случае уравнения бесконечного порядка используем обозначения

$$\Omega = \mathbb{Z}^{m+1} \setminus \Omega_0, \ \Omega_0 = \{(k, p) \in \mathbb{Z}^{m+1} : L(\tau(p), ik) = 0\}, \tag{5}$$

$$\lambda_{k,p} = \{1 : (k, p) \in \Omega_0, \ |L(\tau(p), ik)| : (k, p) \in \Omega\}. \tag{6}$$

Условимся считать, что если для некоторого вектора $(k, p) \in \mathbb{Z}^{m+1}$ ряд $L(\tau(p), ik)$ расходится, то соответствующее $\lambda_{k,p} = +\infty$.

Пространством Соболева бесконечного порядка для задачи (1), (2) назовем пространство

$$W^\infty\{a_s\} = \Big\{u(x, t) = \sum_{(k,p) \in \mathbb{Z}^{m+1}} u_{k,p} \exp(\tau(p) t + i(k, x)) : \|u\|_\infty^2 = $$

$$= \sum_{(k,p) \in \mathbb{Z}^{m+1}} \lambda_{k,p} |u_{k,p}|^2 < \infty\Big\}. \tag{7}$$

При этом по определению при $\lambda_{k,p} = +\infty$ полагаем $u_{k,p} = 0$ и считаем соответствующее слагаемое в (7) равным нулю.

Замечание. Если $L(\tau(p), ik)$, $(k, p) \in \mathbb{Z}^{m+1}$, — действительные положительные числа, то норма $\|\cdot\|_\infty$ энергетическая, т. е. $\|u\|_\infty^2 = (Lu, u)_0$.

Возникает вопрос о нетривиальности $W^\infty\{a_s\}$. Пространство $W^\infty\{a_s\}$ называется нетривиальным, если оно бесконечномерно.

Теорема 2. *Пространство $W^\infty\{a_s\}$ нетривиально тогда и только тогда, когда существует последовательность векторов $(k^j, p^j) \in \mathbb{Z}^{m+1}$, $j = 1, 2 \ldots$, такая, что $\lambda_{k^j,p^j} < \infty$.*

Чтобы избежать вырожденного случая, когда функции зависят от меньшего, чем $m+1$, числа аргументов, будем рассматривать в дальнейшем лишь те нетривиальные пространства $W^\infty(a_s)$, которые плотны в $W_1{}^0(\Omega)$.

Теорема 3. *Пространство $W^\infty\{a_s\}$ плотно в $W^0(\Omega_T)$ тогда и только тогда, когда $\lambda_{k,p} < \infty$ для всех $(k, p) \in \mathbb{Z}^{m+1}$.*

Доказательство этих теорем непосредственно следует из операционного исчисления коммутирующего семейства нормальных операторов.

Рассмотрим пространство, сопряженное к пространству $W^\infty\{a_s\}$, а именно

$$W^{-\infty}\{a_s\} = \Big\{ f = \sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^{m+1}} f_{k,p} \exp(\tau(p)\, t + i(k, x)):$$

$$\|f\|_{-\infty}^2 = \sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^{m+1}} \lambda_{k,p}^{-1} |f_{k,p}|^2 < \infty \Big\}.$$

Очевидно, что $L(\partial/\partial t, \partial/\partial x): W^{-\infty}\{a_s\} \to W^{-\infty}\{a_s\}$. $W^{-\infty}\{a_s\}$ — пространство антилинейных непрерывных функционалов, определенных на пространстве функций $W^\infty\{a_s\}$. Значение функционала $f \in W^{-\infty}\{a_s\}$ на функции $u \in W^\infty\{a_s\}$ дается формулой $f(u) = (f, u)_0$.

Найдем соотношения между введенными пространствами $W^\infty\{a_s\}$ и $W^{-\infty}\{a_s\}$ и пространствами $W^q(\Omega_T)$, $q \in \mathbb{R}$.

Пусть $G \subset \mathbb{R}^\infty$ — множество бесконечномерных векторов $A = \{\mathrm{Re}\, a_s, \mathrm{Im}\, a_s\}$, $|s| = 0, 1, \ldots$, каждый из которых определяет плотное в $W^0(\Omega_T)$ пространство $W^\infty\{a_s\}$, и пусть $G_n$ $(G_n \subset \mathbb{R}^{2m+2})$ — проекция множества $G$ на подпространство векторов $A_n = (\mathrm{Re}\, a_s, \mathrm{Im}\, a_s)$, $s = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{j}, n, 0, \ldots 0)$, $j = 0, 1, \ldots, m$.

Теорема 4. *Для почти всех (в смысле меры Лебега в пространстве $\mathbb{R}^{2m+2}$) векторов $A_n \in G_n$ имеет место включение*

$$W^\infty\{a_s\} \subset W^\alpha(\Omega_T), \quad \alpha < (2n - m - 1)/4, \tag{8}$$

*при этом $\|u\|_\alpha \leqslant c\|u\|_\infty$, $c = c(\{a_s\}) > 0$.*

Доказательство. Используем схему доказательства неравенств (8) из [3] или (29) из [5].

Пусть $A_n = (\theta_1, \ldots, \theta_{2m+2}) \in G_n$, тогда $L(\tau(p), ik) = a_{n,0,\ldots,0}(\tau(p))^n + \sum_{j=1}^{m} a_{\underbrace{0,\ldots,0}_{j},n,0,\ldots,0}(ik_j)^n + L_2(p, k) = L_1(p, k) + L_2(p, k)$, при этом $\mathrm{Re}\, L_1(p, k) = \sum_{j=1}^{2m+2} \theta_j \varphi_j(k, p)$; $\mathrm{Im}\, L_1(p, k) = \sum_{j=1}^{2m+2} \theta_j \psi_j(k, p)$. Оценим меру множества $W_{k,p}$ векторов $A_n \in G_n$, для которых при данном векторе $(k, p)$ выполняется неравенство

$$|L(\tau(p), ik)| < (1 + \|k\|^2 + p^2)^\alpha. \tag{9}$$

Очевидно, $W_{k,p} \subset W'_{k,p}$, где $W'_{k,p}$ — множество векторов $A_n \in G_n$, для которых при данном векторе $(k, p)$ $|\mathrm{Re}\, L(\tau(p), ik)| < (1 + \|k\|^2 + p^2)^\alpha$ и $|\mathrm{Im}\, L(\tau(p),$

$ik) < (1+\|k\|^2+p^2)^\alpha$. Легко видеть, что $W'_{k,p}$ — множество векторов $A_n \in G_n$, содержащихся между гиперплоскостями

$$\sum_{j=1}^{2m+2} \theta_j \varphi_j(k, p) = \mathrm{Re} L_2(p, k) \pm (1+\|k\|^2+p^2)^\alpha$$

и

$$\sum_{j=1}^{2m+2} \theta_j \psi_j(k, p) = \mathrm{Im} L_2(p, k) \pm (1+\|k\|^2+p^2)^\alpha .$$

Можно получить оценку $\mathrm{mes}\, W'_{k,p} \leqslant D^{2m} S$, где $D$ — внешний диаметр области $G_n$, а

$$S = (4(1+\|k\|^2+p^2)^{2\alpha}) \Big/ \left( \sum_{j=1}^{2m+2} \varphi_j^2(k, p) \sum_{j=1}^{2m+2} \psi_j^2(k, p) \right)^{1/2} \sin\theta.$$

Здесь $\theta$ — угол между гиперплоскостями $\sum_{j=1}^{2m+2} \theta_j \varphi_j(k, p) = 0$ и $\sum_{j=1}^{2m+2} \theta_i \psi_j(k, p) = 0$. Легко показать, что

$$S \leqslant 4(m+1)(1+\|k\|^2+p^2)^{2\alpha} / (\max_{j=1,\dots,m} \{|k_j|, |\tau(p)|\})^{2n}.$$

Тогда $\sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^{m+1}} \mathrm{mes}\, W_{k,p} \leqslant \sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^{m+1}} \mathrm{mes}\, W'_{k,p} \leqslant \sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^{m+1}} (1+\|k\|^2+p^2)^{\alpha_1} < \infty$, так как $\alpha_1 < -(m+1)/2$. Тогда по лемме Бореля—Кантелли мера векторов $A_n \in G_n$, для которых бесконечно часто выполняется (9), равняется нулю. Следовательно, для почти всех (в смысле меры Лебега в пространстве $\mathbb{R}^{2m+2}$) векторов $A_n \subset G_n$ $|L(\tau(p), ik)| > (1+\|k\|^2+p^2)^\alpha$ для всех (кроме конечного числа) векторов $(k, p) \in \mathbb{Z}^{m+1}$.

На основании последнего неравенства и (6) получаем доказательство теоремы.

Следствие. *$W^\alpha(\Omega_T) \subset W^{-\infty}\{a_s\}$ при $\alpha > -(2n-m-1)/4$ для почти всех (в смысле меры Лебега в пространстве $\mathbb{R}^{2m+2}$) векторов $A_n \in G_n$.*

Замечание. Для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ существует последовательность $\{a_s^\alpha\}$, $|s| = 0, 1, \dots$, такая, что $W^\infty\{a_s^\alpha\} \setminus W^\alpha(\Omega_T) \neq \varnothing$.

Обозначим $P = 1 - P_0$, где $1$ — единичный оператор, а $P_0$ — оператор проектирования, который элементу $v = \sum_{(k,p)\in\mathbb{Z}^{m+1}} v_{k,p} \exp(\tau(p)t + i(k\cdot x))$ ставит в соответствие элемент $P_0 v = \sum_{(k,p)\in\Omega_0} v_{k,p} \exp(\tau(p)t + i(kx))$.

Под решением задачи (1), (2) понимаем функцию $u \in W^\infty\{a_s\}$ такую, что для каждой функции $v \in W^\infty\{a_s\}$ $(L(\partial/\partial t, \partial/\partial x)u, v)_0 = (f, v)_0$.

Теорема 5. *Решение задачи (1), (2) из $W^\infty\{a_s\}$ существует тогда и только тогда, когда $f \in W^{-\infty}\{a_s\}$ и $P_0 f = 0$, причем $\|Pu\|_\infty = \|f\|_{-\infty}$. Это решение единственно тогда и только тогда, когда $P_0 = 0$.*

Доказательство. Пусть $u$ — решение задачи (1), (2). Тогда для каждой функции $v \in W^\infty\{a_s\}$ получим, что $(P_0 f, v)_0 = (P_0 L(\partial/\partial t, \partial/\partial x)u, v)_0 = (0, v)_0 = 0$, при этом

$$\|f\|_{-\infty}^2 = \|Pf\|_{-\infty}^2 = \|PL(\partial/\partial t, \partial/\partial x)u\|_{-\infty}^2 =$$

$$= \sum_{(k,p)\in\Omega} \lambda_{k,p}^{-1} |L(\tau(p), ik) u_{k,p}|^2 = \sum_{(k,p)\in\Omega} \lambda_{k,p} |u_{k,p}|^2 = \|Pu\|_\infty^2.$$