УДК 517.9

А. А. Бойчук, А. А. Покутный (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИЛОЖЕНИЕ ЭРГОДИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ К ИССЛЕДОВАНИЮ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ОПЕРАТОРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

We establish necessary and sufficient conditions for the solvability of a family of differential equations with periodic operator coefficient and periodic boundary condition by using the notion of the relative spectrum of a linear bounded operator in a Banach space and the ergodic theorem. We show that if the existence condition is satisfied, then these periodic solutions can be constructed by using the formula for the generalized inverse of a linear bounded operator obtained in the present paper.

Встановлено необхідні та достатні умови розв'язності сім'ї диференціальних рівнянь із періодичним операторним коефіцієнтом і періодичною крайовою умовою з допомогою поняття відносного спектра лінійного обмеженого оператора в банаховому просторі й ергодичної теореми. Показано, що при виконанні умови існування такі періодичні розв'язки будуються з використанням одержаної у цій статті формули для узагальнено-оберненого оператора до лінійного обмеженого.

1. Введение. Пусть $(\mathbf{B}, ||\cdot||)$ — комплексное банахово пространство, $\overline{0}$ — нулевой элемент в пространстве $\mathbf{B}$, $\mathcal{L}(\mathbf{B})$ — банахово пространство всех линейных ограниченных операторов, действующих из $\mathbf{B}$ в себя. Пусть $A(t)$ — периодическая операторная функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{L}(\mathbf{B})$, $f(t)$ — непрерывная на $[0,\omega]$ периодическая вектор-функция со значениями в $\mathbf{B}$ и периодом $w>0$, т. е. $A(t+w)=A(t)$, $f(t+w)=f(t)$.

В пространстве $\mathbf{B}$ рассмотрим семейство краевых задач

$$\frac{dx(t)}{dt} = \lambda A(t)x(t) + f(t), \tag{1}$$

$$x(0) - x(w) = \overline{0}. \tag{2}$$

Как известно [1], решение задачи Коши для операторного уравнения (1) с произвольным начальным условием $x(0)=x_0$ имеет вид

$$x(t) = U(t,\lambda)x_0 + \int\limits_0^t U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau, \tag{3}$$

где $U(t,\lambda)$ при фиксированном λ есть эволюционный оператор, удовлетворяющий однородному уравнению

$$\frac{dU(t,\lambda)}{dt} = \lambda A(t)U(t,\lambda), \qquad U(0,\lambda) = I.$$

Подставив (3) в краевое условие (2), будем иметь

$$x(0) - x(w) = (I - U(w,\lambda))x_0 - \int\limits_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau.$$

Разрешимость краевой задачи (1), (2) эквивалентна разрешимости операторного уравнения

$$(I - U(w,\lambda))x_0 = \int\limits_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau. \qquad (4)$$

Оператор $U(w,\lambda)$ является оператором монодромии задачи (1), I — тождественный оператор.

Определение 1 [1]. *Точка* λ *называется точкой устойчивости уравнения* (1), *если* $||U^n(w,\lambda)|| \leq c$, $n \in \mathbb{Z}$.

По аналогии с приведенным выше введем следующее понятие.

Определение 2. *Точка* λ *называется точкой устойчивости вправо оператора монодромии* $U(w,\lambda)$ *краевой задачи* (1), (2), *если семейство операторов* $\{U^n(w,\lambda), n \in \mathbb{N}\}$ *равностепенно непрерывно, т. е. если* $||U^n(w,\lambda)|| \leq c$, $n \in \mathbb{N}$.

Данная работа появилась в связи со следующим результатом М. Г. Крейна [1, с. 129].

Лемма . *Если* λ *— точка устойчивости уравнения* (1), *то каждое его решение равномерно ограничено при* $t \in \mathbb{R}$.

Оказывается, что возможна ситуация, когда уравнение (1) может иметь равномерно ограниченные решения и в случае, когда точка λ не является точкой устойчивости уравнения (1). Ниже будет показано, что это возможно при более слабом условии, когда точка λ является точкой *устойчивости вправо* оператора монодромии $U(w,\lambda)$ краевой задачи (1), (2), и в этом случае задача (1), (2) будет иметь ограниченные решения при дополнительных условиях на неоднородность $f(t) \in \mathbf{B}$.

Обозначим через $N(I - U(w,\lambda))$ и $R(I - U(w,\lambda))$ соответственно ядро и образ оператора $I - U(w,\lambda)$, через ρ_{NS} множество тех $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $I - U(w,\lambda)$ является нормально-разрешимым, т. е.

$$\rho_{NS} = \left\{\lambda\colon \lambda \in \mathbb{C}, \quad R(I - U(w,\lambda)) \; = \; \overline{R(I - U(w,\lambda))} \;\right\}.$$

***Замечание* 1.** Как будет показано далее, множество $\sigma_{NS} = \mathbb{C} \setminus \rho_{NS}$ оказывается тесно связанным с понятием относительного спектра (а в случае банахового пространства является его обобщением), введенным и изученным впервые, по-видимому, Асплундом (см. [2]), которому, как отмечено в книге Халмоша [3], не придавалось особого значения.

Относительным спектром оператора A (в гильбертовом пространстве любой размерности) называется множество комплексных чисел λ, для которых оператор $A - \lambda I$ не будет относительно обратимым [2, 3]. Отметим еще, что в отличие от обычного понятия спектра оператора относительный спектр теряет ряд хороших свойств (например, относительный спектр не обязан быть замкнутым множеством (см. пример в [3, с. 227] к задаче 71)).

Напомним [3], что оператор A называется *относительно обратимым*, если существует оператор X такой, что $AXA = A$. Заметим, что в настоящее время принято называть такой оператор *обобщенно-обратимым* [4, 5]. Отметим также, что каждый обратимый оператор является обобщенно-обратимым. Оператор, имеющий только левый или правый обратный, также является обобщенно-обратимым. В конечномерном пространстве каждый оператор является обобщенно-обратимым. Это понятие принадлежит общей теории колец и приведенное выше утверждение об обобщенной обратимости конечномерных операторов может быть сформулировано следующим образом: полная конечномерная алгебра матриц над полем комплексных чисел является регулярным кольцом (фон Нейман [6]).

Целью данной работы является получение необходимых и достаточных условий разрешимости краевой задачи (1), (2) в банаховом и гильбертовом пространствах, а также построение соответствующих решений в случае, когда оператор монодромии является устойчивым вправо. Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\lambda \in \rho_{NS}$ *является точкой устойчивости вправо оператора монодромии* $U(w,\lambda)$ *задачи* (1) *в рефлексивном банаховом пространстве* $\mathbf{B}$. *Тогда*:

а) *краевая задача* (1), (2) *имеет периодические решения тогда и только тогда, когда вектор-функция* $f(t)$ *удовлетворяет условию*

$$U_0(\lambda)\int\limits_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = 0, \qquad \text{где} \quad U_0(\lambda) = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w,\lambda)}{n}; \tag{5}$$

б) *при выполнении условия* (5) *периодические решения краевой задачи* (1), (2) *имеют вид*

$$x(t,c) = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int\limits_0^w G(t,\tau)f(\tau)d\tau, \tag{6}$$

где c — *произвольный элемент банахового пространства* $\mathbf{B}$,

$$G(t,\tau) = U(t,\lambda)\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\right\}^{k+1} -$$

$$-U_0(\lambda))U^{-1}(\tau,\lambda) + U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda) + K(t,\tau)$$

— *обобщенный оператор Грина краевой задачи* (1), (2) *и*

$$K(t,\tau) = \begin{cases} -U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda), & \tau \geq t, \\ 0, & t > \tau. \end{cases}$$

2. Вспомогательные утверждения. Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Если* $\lambda \in \rho_{NS}$ *является точкой устойчивости вправо оператора монодромии* $U(w,\lambda)$, *то краевая задача* (1), (2) *разрешима тогда и только тогда, когда вектор-функция* $f(t)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=2}^{n+1} U^m(w,\lambda)}{n}\int\limits_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = 0. \tag{7}$$

Доказательство. Поскольку оператор монодромии устойчив вправо, он имеет замкнутое множество значений (в силу того, что λ принадлежит ρ_{NS}). Тогда [7, с. 296] множество значений оператора $I - U(w,\lambda)$ можно определить следующим образом:

$$R(I-U(w,\lambda)) = \left\{x \in \mathbf{B}\colon \lim_{n\to\infty}U_n(w,\lambda)x = \overline{0},\ U_n(w,\lambda) = \frac{\sum_{m=1}^{n} U^m(w,\lambda)}{n}\right\}.$$

В этом случае операторное уравнение (4) будет разрешимым тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}U^m(w,\lambda)}{n}\int\limits_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau=0,$$

которое эквивалентно условию (7). Таким образом, равенство (7) гарантирует принадлежность функции $f(t)$ множеству значений оператора $I-U(w,\lambda)$, что и доказывает лемму.

***Замечание* 2.** В случае, когда λ принадлежит ρ_{NS} и одновременно $R(I-U(w,\lambda))=\mathbf{B}$, оператор $I-U(w,\lambda)$ обратим, λ является его регулярной точкой и краевая задача (1), (2) имеет единственное решение при любой неоднородности $f(t)$. В этом случае

$$x_0=(I-U(w,\lambda))^{-1}\int\limits_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau$$

и, как следствие, получаем результат из [1, с. 131]. Более того, как показано в [1, с. 131 – 133], в этом случае оператор монодромии $U(w,\lambda)$ будет устойчивым (и даже сильно устойчивым [1]).

***Замечание* 3.** При доказательстве леммы 1 нигде не использовалась рефлексивность исходного банахового пространства, а потому это утверждение имеет силу в произвольном пространстве $\mathbf{B}$.

Дальнейшие результаты получаются как следствие статистической эргодической теоремы при выполнении дополнительного условия. Будем предполагать, что ограниченные множества рассматриваемого пространства $\mathbf{B}$ слабо секвенциально компактны [7, с. 297]. Отметим, что в гильбертовом пространстве это условие всегда выполнено. Банахово пространство, имеющее это свойство, оказывается рефлексивным (прямое следствие теоремы Эберлейна – Шмульяна [7]). В силу рефлексивности произвольного гильбертового пространства сделанное выше допущение для него всегда выполнено. Тогда [7, с. 298] собственное подпространство $N(I-U(w,\lambda))$ оператора $I-U(w,\lambda)$ совпадает с множеством значений оператора U_0, определяемого равенством

$$U_0(\lambda)x=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=1}^{n}U^m(w,\lambda)}{n}x,$$

т. е.

$$N(I-U(w,\lambda))=R(U_0(\lambda)).$$

Приведем свойства оператора U_0, которые будут использоваться в дальнейшем [7] :

i) $U_0(\lambda)=U_0^2(\lambda)$;

ii) $U_0(\lambda)=U(w,\lambda)U_0(\lambda)$;

iii) $U_0(\lambda)=U_0(\lambda)U(w,\lambda)$.

Следствие. *Если пространство $\mathbf{B}=H$ гильбертово, то в этом случае ортогональное дополнение к $N(I-U(w,\lambda))$ можно представить следующим образом*:

$$N(I-U(w,\lambda))^{\perp}=\{y\in H\colon U_0^*(\lambda)y=\overline{0}\},$$

где $U_0^*(\lambda)$ — оператор, сопряженный к оператору $U_0(\lambda)$.

Лемма 2. *Оператор* $I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))\colon \mathbf{B}\to\mathbf{B}$ *имеет ограниченный обратный*

$$(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))^{-1}=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\right\}^{k+1} \tag{8}$$

для всех $\mu>1\colon |1-\mu|<1/||R_\mu(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))||$.

Доказательство. Покажем, что $N(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))=\overline{0}$. Действительно, если x принадлежит $N(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))$, то

$$(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))x=\overline{0}. \tag{9}$$

Поскольку $(I-U(w,\lambda))x\in R(I-U(w,\lambda))$, $U_0(\lambda)x\in N(I-U(w,\lambda))$, подпространства $R(I-U(w,\lambda))$ и $N(I-U(w,\lambda))$ пересекаются только в нуле, то условие (9) выполняется тогда и только тогда, когда одновременно $(I-U(w,\lambda))x=\overline{0}$ и $U_0(\lambda)x=\overline{0}$ (в случае гильбертового пространства в силу теоремы Пифагора $0=||(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))x||^2= =||(I-U(w,\lambda))x||^2+||U_0(\lambda)x||^2$). Это возможно лишь тогда, когда $x=\overline{0}$. Покажем, что $R(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))=\mathbf{B}$. Для этого достаточно заметить, что $\mathbf{B}=N(I-U(w,\lambda))\oplus R(I- -U(w,\lambda))=R(U_0)\oplus R(I-U(w,\lambda))$. Из этого разложения следует, что любой элемент $x\in\mathbf{B}$ имеет вид $(I-U(w,\lambda))y+U_0(\lambda)z$, что и доказывает равенство $R(I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda)))=\mathbf{B}$. Таким образом, по теореме Банаха [7] исходный оператор, взаимно однозначно отображающий $\mathbf{B}$ на себя, имеет ограниченный обратный. Из доказанного следует, что для оператора $\mu I-(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))$ точка $\mu=1$ является регулярной. Так как степени оператора $U(w,\lambda)$ равномерно ограничены, спектральный радиус $r_{(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))}\le 1$. Известно [7], что резольвентное множество ограниченного оператора открыто. Число $\mu=1\in\rho(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))$. Тогда существует окрестность точки μ такая, что каждая точка этой окрестности принадлежит резольвентному множеству. Для любой точки $\mu>1$ из этой окрестности существует резольвента [7], которую можно представить в виде сильно сходящегося по норме ряда

$$R_\mu:=R_\mu(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))=\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l.$$

Используя аналитичность резольвенты и известное тождество для точек $\mu>1$ таких, что $|1-\mu|<1/||R_\mu(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))||$, получаем

$$R_1=\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^kR_\mu^{k+1}.$$

Окончательно, подставляя в это равенство полученный выше ряд, убеждаемся в справедливости (8).

Лемма 2 доказана.

Оператор $I-(U(w,\lambda)-U_0)$ будем называть *оператором усреднения* к оператору $I-U(w,\lambda)$.

3. Связь с обобщенно-обратным оператором. В этом пункте устанавливается связь обобщенно-обратного оператора с обратным к оператору усреднения. Перед тем как сформулировать вспомогательное утверждение напомним, что оператор $L^- \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$ называется обобщенно-обратным к оператору $L \in \mathcal{L}(\mathbf{B})$ [5], если выполнены следующие условия:

1) $LL^-L = L$;

2) $L^-LL^- = L^-$.

Докажем следующее утверждение.

Лемма 3. *Для любого $\lambda \in \rho_{NS}$ оператор, обобщенно-обратный к оператору $I - U(w, \lambda)$, существует, и его можно представить в виде*

$$(I - U(w, \lambda))^- = (I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda), \tag{10}$$

или в виде сходящегося операторного ряда

$$(I - U(w, \lambda))^- = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} \mu^{-l-1} (U(w, \lambda) - U_0(\lambda))^l \right\}^{k+1} - U_0(\lambda) \tag{11}$$

для всех $\mu > 1$: $|1 - \mu| < 1/||R_\mu(U(w, \lambda) - U_0(\lambda))||$.

Доказательство. Оператор, определяемый правой частью равенства (10), очевидно ограничен. В силу этого для доказательства справедливости представления (10) достаточно проверить выполнение условий 1, 2 данного выше определения. При этом будут использоваться оба представления и свойства i) – iii) для оператора $U_0(\lambda)$.

1. Рассмотрим произведение

$$(I - U(w, \lambda))((I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda))(I - U(w, \lambda)) =$$

$$= (I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)) - U_0(\lambda)) \times ((I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - U_0(\lambda))(I - U(w, \lambda)) =$$

$$= (I - U_0(\lambda)(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1} - (I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))U_0(\lambda) + U_0(\lambda)^2)(I - U(w, \lambda)) =$$

$$= (I - U_0(\lambda)(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1}) \times (I - U(w, \lambda)) =$$

$$= (I - U_0(\lambda)(I - (U(w, \lambda) - U_0(\lambda)))^{-1})((I - U(w, \lambda) + U_0(\lambda)) - U_0(\lambda)) =$$

$$= I - U(w, \lambda) + U_0(\lambda) - U_0(\lambda) - U_0(\lambda) + U_0(\lambda)(I - U(w, \lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda).$$

Отметим, что $U_0(\lambda)(U(w, \lambda) - U_0(\lambda))^l = 0$ для любого $l \in \mathbb{N}$ (это следует непосредственно из свойств i) – iii) и формулы бинома Ньютона). Покажем теперь, что

$$U_0(\lambda)(I - U(w, \lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = U_0(\lambda)(I - U(w, \lambda) + U_0(\lambda))^{-1} =$$

$$= (I - U(w, \lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = U_0(\lambda).$$

Действительно,

$$U_0(\lambda)(I - U(w, \lambda) + U_0(\lambda))^{-1} U_0(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} (\mu - 1)^k U_0(\lambda) \times$$

$$\times\left\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\right\}^{k+1}U_0(\lambda)=\sum_{k=0}^{\infty}\Bigg((\mu^{-1})^{k+1}(\mu-1)^kU_0(\lambda)+$$

$$+(\mu-1)^kU_0(\lambda)\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)-U_0(\lambda))^l\right\}^{k+1}\Bigg)U_0(\lambda)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^{-k-1}(\mu-1)^kU_0(\lambda)=\frac{1}{\mu}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{\mu-1}{\mu}\right)^kU_0(\lambda)=\frac{1}{\mu}\;\frac{1}{1-\dfrac{\mu-1}{\mu}}U_0(\lambda)=U_0(\lambda).$$

Таким образом,

$$I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda)-U_0(\lambda)-U_0(\lambda)+U_0(\lambda)(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda)=I-U(w,\lambda).$$

Отсюда следует, что оператор $I-U(w,\lambda)$ удовлетворяет условию 1 определения.

2. Проверим теперь выполнение условия 2:

$$((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))(I-U(w,\lambda))((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))=$$

$$=((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))-U_0(\lambda))\times$$

$$\times((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))=(I-U_0(\lambda)(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))-$$

$$-(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda)+U_0(\lambda)^2)((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))=$$

$$=(I-(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda))((I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda))=$$

$$=(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda)(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-$$

$$-U_0(\lambda)+(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}U_0(\lambda)=(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda)-$$

$$-U_0(\lambda)+U_0(\lambda)=(I-U(w,\lambda)+U_0(\lambda))^{-1}-U_0(\lambda).$$

Таким образом, лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** В силу леммы 1 краевая задача (1), (2) будет разрешима тогда и только тогда, когда выполняется равенство (7). В силу условия iii) для оператора $U_0(\lambda)$ это равенство можно представить в виде

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{m=2}^{n+1}U^m(w,\lambda)}{n}\int\limits_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau=$$

$$=U_0(\lambda)U(w,\lambda)\int\limits_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau=U_0(\lambda)\int\limits_0^w U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau,$$

что и доказывает пункт a) теоремы.

Пусть условия пункта а) выполнены. В этом случае, согласно теореме [5] о представлении решений с помощью обобщенно-обратного оператора, уравнение (4) имеет семейство решений вида

$$x_0 = (I - U(w,\lambda))^{-} \int\limits_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau + U_0(\lambda)c$$

для любого элемента $c \in \mathbf{B}$. Подставляя в (3) представление (11), получаем

$$x(t,c) = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + U(t,\lambda)(I - U(w,\lambda))^{-} \int\limits_0^w U(w,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^t U(t,\lambda)U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int\limits_0^w K(t,\tau)f(\tau)d\tau +$$

$$+ \int\limits_0^w U(t,\lambda)\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\mu-1)^k \left\{\sum_{l=0}^{\infty}\mu^{-l-1}(U(w,\lambda)) - U_0(\lambda))^l\right\}^{k+1} - U_0(\lambda) + I\right) \times$$

$$\times U^{-1}(\tau,\lambda)f(\tau)d\tau = U(t,\lambda)U_0(\lambda)c + \int\limits_0^w G(t,\tau)f(\tau)d\tau.$$

Таким образом, равенство (6) выполнено, что и завершает доказательство теоремы.

4. Комментарии. 1. В случае, когда $\mathbf{B} = H$ — гильбертово пространство, множество σ_{NS} будет совпадать с относительным спектром, введенным в [2]. Действительно, в этом случае оператор $I - U(w,\lambda)$ будет нормально-разрешимым, а следовательно [5], обобщенно-обратимым. Из свойств 1, 2 обобщенно-обратного оператора непосредственно следует его относительная обратимость. Также известно [8], что если для оператора A существует оператор B такой, что $ABA = A$, то можно подобрать оператор C так, что $ACA = A$, $CAC = C$. Из этого факта следует, что любой относительно обратимый оператор является также обобщенно-обратимым и относительный спектр совпадает со множеством σ_{NS}.

2. В случае банахового пространства условие принадлежности $\lambda \in \rho_{NS}$ означает нормальную разрешимость оператора $I - U(w,\lambda)$. Это условие [4, 5] не гарантирует существование обобщенно-обратного к оператору $I - U(w,\lambda)$. Для существования обобщенно-обратного необходимо и достаточно [4, 5], чтобы ядро $N(I - U(w,\lambda))$ и образ $R(I - U(w,\lambda)) = \overline{R(I - U(w,\lambda))}$ были дополняемыми подпространствами исходного банахового пространства (относительно дополняемости подпространств банахового пространства см. [9], а также статью [10]). Основная теорема получена без предположения дополняемости подпространства $R(I - U(w,\lambda))$. На самом деле в случае, когда оператор $U(w,\lambda)$ является устойчивым вправо и оператор $I - U(w,\lambda)$ имеет замкнутую область значений, подпространство $R(I - U(w,\lambda))$ всегда будет дополняемым [7]. Оператор $I - U(w,\lambda)$ будет обобщенно-обратимым. Более того, поскольку $I - U(w,\lambda)$ действует из банахового пространства $\mathbf{B}$ в себя, он будет приводимо-обратимым [11], так как справедливо следующее разложение пространства $\mathbf{B}$ в прямую сумму:

$$\mathbf{B} = N(I - U(w,\lambda)) \oplus R(I - U(w,\lambda)).$$

3. Если оператор $I - U(w,\lambda)$ имеет конечномерное ядро, то его нуль-пространство будет всегда дополняемым. В этом случае его расширение на все пространство таким образом, чтобы расширенный оператор был обратимым, можно строить иначе (без оператора усреднения). Результаты такого вида детально изложены в статьях [12, 13] и связаны с леммой Аткинсона [14]. Расширенный оператор строится с помощью добавления к исходному оператору проектора на его нуль-пространство. В силу конечномерности $N(I - U(w,\lambda))$ этот проектор может быть представлен с помощью биортогональной системы элементов к элементам базиса нуль-пространства оператора $I - U(w,\lambda)$ [13].

4. В случае, когда нуль-пространство является бесконечномерным дополняемым подпространством, для построения проектора в виде, аналогичном полученному в [13], необходимо существование биортогональной системы элементов к базисным. Возможность такого представления связана с существованием базиса Шаудера в подпространстве $N(I - U(w,\lambda))$ (относительно базиса Шаудера и связанной с ним проблемы аппроксимации детально см. [10, 15]).

5. Отметим, что существуют и другие методы для нахождения периодических решений краевой задачи (1), (2) [5], а также ограниченных решений (см., например, [16 – 19], где их существование исследуется, например, при наличии свойств экспоненциальной дихотомии на всей оси или полуосях [20] у соответствующего однородного уравнения при фиксированном λ).

6. В случае, когда в представлении (11) можно выполнить предельный переход при $\mu \to 1$ $\Big($например, когда ряд $\sum_{l=0}^{\infty}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l$ сходится$\Big)$, формула (11) принимает более простой вид

$$(I - U(w,\lambda))^{-}x \;=\; \sum_{l=0}^{\infty}(U(w,\lambda) - U_0(\lambda))^l x \;-\; U_0(\lambda)x. \tag{12}$$

В общем же случае представление (12) не будет справедливым.

1. *Крейн М.Г.* Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1964. – 186 с.
2. *Asplund E.* A non-closed relative spectrum // Ark. mat. – 1958. – **3**. – P. 425 – 427.
3. *Халмош П.* Гильбертово пространство в задачах. – М.: Мир, 1970. – 352 с.
4. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в одномерную теорию сингулярных интегральных операторов. – Кишинев: Штиинца, 1973. – 426 с.
5. *Boichuk A. A., Samoilenko A. M.* Generalized inverse operators and Fredholm boundary value problems. – Utrecht; Boston: VSP, 2004. – 317 p.
6. *von Neumann J.* On regular rings // Proc. Amer. Math. Soc. – 1936. – **22**. – P. 707 – 713.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 624 с.
8. *Deutch E.* Semi-inverses, reflexive semi-inverses, and pseudoinverses of an arbitrary linear transformation // Linear Algebra and Its Appl. – 1971. – **4**. – P. 313 – 322.
9. *Кадец М. И., Митягин Б. С.* Дополняемые подпространства в банаховых пространствах // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 6. – С. 77 – 95.
10. *Пелчинский А., Фигель Т.* О методе Энфло построения банаховых пространств // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 6. – С. 95 – 109.
11. *Королюк В. С., Турбин А. Ф.* Математические основы фазового укрупнения сложных систем. – Киев: Наук. думка, 1978. – 218 с.

12. *Гохберг И. Ц., Маркус А. С.* Об устойчивости некоторых свойств нормально разрешимых операторов // Мат. сб. – 1956. – **40 (82)**, № 4. – С. 453 – 466.
13. *Гохберг И. Ц., Крейн М. Г.* Основные положения о дефектных числах, корневых числах и индексах линейных операторов // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 2. – С. 43 – 115.
14. *Аткинсон Ф. Р.* Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах // Мат. сб. Нов. сер. – 1951. – **28**, № 1. – С. 3 – 14.
15. *Пелчинский А.* О некоторых проблемах Банаха // Успехи мат. наук. – 1973. – **28**, № 6. – С. 67 – 77.
16. *Баскаков А. Г.* Полугруппы разностных операторов в спектральном анализе линейных дифференциальных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1996. – **30**, № 1. – С. 1 – 11.
17. *Баскаков А. Г.* Оценки ограниченных решений линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2003. – **39**, № 3. – С. 413 – 415.
18. *Latushkin Yu., Tomilov Yu.* Fredholm differential operators with unbounded coefficients // J. Different. Equat. – 2005. – **208**. – P. 388 – 429.
19. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. – 205 с.
20. *Бойчук А. А., Покутный А. А.* Ограниченные решения линейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве // Нелінійні коливання. – 2006. – **9**, № 1. – С. 3 – 14.

Получено 16.01.13