УДК 517.98

Д. П. Проскурін (Київ. нац. ун-т ім. Т. Шевченка),
Р. Я. Якимів (Нац. ун-т біоресурсів і природокористування України, Київ)

ПРО $*$-ЗОБРАЖЕННЯ λ-ДЕФОРМАЦІЙ КАНОНІЧНИХ КОМУТАЦІЙНИХ СПІВВІДНОШЕНЬ

We study irreducible integrable $*$-representations of the algebra $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ generated by the following relations:

$$\mathfrak{A}_{\lambda,2} = \mathbb{C}\big\langle a_j, a_j^* \mid a_j^* a_j = 1 + a_j a_j^*,\ a_1^* a_2 = \lambda a_2 a_1^*,\ a_2 a_1 = \lambda a_1 a_2,\ j = 1, 2\big\rangle.$$

For this $*$-algebra, we prove an analog of the von Neumann theorem on the uniqueness of an irreducible integrable representation.

Изучаются неприводимые интегрируемые $*$-представления алгебры $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$, порожденной соотношениями вида

$$\mathfrak{A}_{\lambda,2} = \mathbb{C}\big\langle a_j, a_j^* \mid a_j^* a_j = 1 + a_j a_j^*,\ a_1^* a_2 = \lambda a_2 a_1^*,\ a_2 a_1 = \lambda a_1 a_2,\ j = 1, 2\big\rangle.$$

А именно, для этой $*$-алгебры доказан аналог теоремы Дж. фон Неймана об единственности интегрируемого неприводимого представления.

1. Вступ. У цій роботі ми вивчаємо незвідні інтегровні зображення віківської алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$, що є фактор-алгеброю віківської алгебри $\mathfrak{A}_\lambda$, $|\lambda| = 1$ (див. [6]), породженої співвідношеннями

$$a_i^* a_i - a_i a_i^* = 1, \quad i = 1, 2, \quad a_1^* a_2 = \lambda a_2 a_1^*, \tag{1}$$

за максимальним квадратичним віківським ідеалом. А саме, опишемо класи унітарної еквівалентності незвідних інтегровних зображень $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$.

Знайдемо твірні максимального квадратичного віківського ідеалу $\mathfrak{A}_\lambda$ (див. [6, 9]). Оператор коефіцієнтів цієї віківської алгебри $T\colon \mathbb{H}^{\otimes 2} \to \mathbb{H}^{\otimes 2}$, $\mathbb{H} = \mathbb{C}\langle e_1,\ e_2\rangle$, діє на базисі $e_1 \otimes e_1$, $e_2 \otimes e_2$, $e_1 \otimes e_2$, $e_2 \otimes e_1$ таким чином:

$$T e_i \otimes e_i = e_i \otimes e_i, \quad T e_1 \otimes e_2 = \overline{\lambda} e_2 \otimes e_1, \quad T e_2 \otimes e_1 = \lambda e_1 \otimes e_2. \tag{2}$$

Легко переконатись, що T задовольняє рівняння Янга – Бакстера та $\ker(\mathbf{1} + T) = \langle e_2 \otimes e_1 - \lambda e_1 \otimes e_2\rangle$. Отже, максимальний квадратичний віківський ідеал $\mathcal{I}_2$ алгебри $\mathfrak{A}_\lambda$ породжується елементом $a_{12} = a_2 a_1 - \lambda a_1 a_2$.

Таким чином, $\mathfrak{A}_\lambda / \mathcal{I}_2 = \mathfrak{A}_{\lambda,2}$ має вигляд

$$\mathfrak{A}_{\lambda,2} = \mathbb{C}\big\langle a_1,\ a_2 \mid a_i^* a_i = 1 + a_i a_i^*,\ i = 1, 2,\ a_1^* a_2 = \lambda a_2 a_1^*,\ a_2 a_1 = \lambda a_1 a_2\big\rangle.$$

Зрозуміло, що, поклавши $\lambda = 1$, одержимо алгебру канонічних комутаційних співвідношень із двома твірними в термінах операторів народження та знищення (див. [1]).

Зазначимо, що оператор коефіцієнтів T алгебри $\mathfrak{A}_\lambda$ задовольняє нерівності $-\mathbf{1} \le T \le \mathbf{1}$, причому обидві оцінки є точними. З результатів робіт [2, 5] випливає існування фоківського зображення π_F алгебри $\mathfrak{A}_\lambda$, яке є незвідним, причому ядро фоківського зображення збігається з двостороннім $*$-ідеалом, породженим $\mathcal{I}_2$. Таким чином, π_F є точним незвідним $*$-зображенням алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$. Ми доведемо, що фоківське зображення є єдиним, з точністю до унітарної еквівалентності, незвідним інтегровним зображенням $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$. Цей результат можна вважати аналогом теореми Дж. фон Неймана про єдиність незвідного зображення CCR зі скінченним числом ступенів волі.

2. Незвідні інтегровні зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$. Зрозуміло, що в будь-якому зображенні образи твірних a_i, $i = 1, 2$, є необмеженими операторами. Тому потрібно дати визначення сім'ї необмежених операторів, що задовольняє визначальні співвідношення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$.

Спочатку нагадаємо означення аналітичного вектора оператора (див. [3]).

Означення 1. *Нехай A — лінійний оператор, що діє на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Вектор f називається аналітичним вектором для A, якщо $f \in \mathcal{D}(A^k)$, $k \in \mathbb{N}$, та знайдуться $C > 0$, $M > 0$ такі, що $||A^n f|| \leq C \cdot M^n n!$.*

Сформулюємо тепер означення інтегровного зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ в термінах інваріантних областей, подібне до означення, наведеного в роботах [8, 10].

Означення 2. *Будемо казати, що замкнені оператори A_i, $i = 1, 2$, які діють на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$, визначають інтегровне зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$, якщо*:

1) *існує щільна лінійна підмножина $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$, інваріантна відносно A_i, A_i^*, $i = 1, 2$;*

2) *для кожного $x \in \mathcal{D}$ мають місце рівності*

$$A_i^* A_i x = (\mathbf{1} + A_i A_i^*)x, \quad i = 1, 2,$$

$$A_1^* A_2 x = \lambda A_2 A_1^* x, \quad A_2 A_1 x = \lambda A_1 A_2 x;$$

3) *вектори області $\mathcal{D}$ є аналітичними для оператора $\Delta = A_1^* A_1 + A_2^* A_2$.*

Тепер дамо означення інтегровного зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ в термінах обмежених операторів.

Означення 3. *Нехай A_1, A_2 — замкнені лінійні оператори на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$. Побудуємо полярні розклади $A_i = S_i C_i$, $C_i^2 = A_i^* A_i$, $i = 1, 2$, та розглянемо $D_i = S_i C_i S_i^*$. Будемо казати, що A_1, A_2 задають інтегровне зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$, якщо*:

1) *оператори C_1 та C_2 комутують в сенсі розкладів одиниці*;

2) *оператори S_1, S_2 задовольняють співвідношення*

$$S_i^* S_i = \mathbf{1}, \quad i = 1, 2, \quad S_1^* S_2 = \lambda S_2 S_1^*, \quad S_2 S_1 = \lambda S_1 S_2;$$

3) *для довільної дійсної обмеженої вимірної функції $F(\cdot)$ мають місце співвідношення*

$$F(D_i^2) S_i = S_i F(\mathbf{1} + D_i^2), \quad F(D_i^2) S_j = S_j F(D_i^2), \quad i, j = 1, 2, \ i \neq j.$$

Зауважимо, що умова 3 означення 3 виконується тоді й лише тоді, коли для довільної борелівської множини $\delta \subset \mathbb{R}_+$ мають місце співвідношення $E_j(\delta) S_j = S_j E_j(\delta - 1)$, $E_j(\delta) S_i = S_i E_j(\delta)$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2$. Тут і нижче через $E_k(\cdot)$ позначено розклад одиниці оператора D_k^2.

Твердження 1. *З означення 2 випливає означення 3.*

Доведення. Нехай замкнені оператори A_1, A_2 задають інтегровне зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ в сенсі означення 2, що діє на просторі $\mathcal{H}$. Нижче ми застосуємо міркування, подібні до наведених у роботах [8, 10].

Розглянемо ліві полярні розклади $A_i = S_i C_i$, де $C_i^2 = A_i^* A_i$ та S_i, $i = 1, 2$, — ізометричні оператори. Легко переконатись, що на області $\mathcal{D}$ має місце співвідношення $C_1^2 C_2^2 = C_2^2 C_1^2$. Дійсно,

$$C_1^2C_2^2 = A_1^*A_1A_2^*A_2 = \lambda A_1^*A_2^*A_1A_2 = \lambda\overline{\lambda}A_2^*A_1^*A_1A_2 =$$

$$= \overline{\lambda}A_2^*A_1^*A_2A_1 = \overline{\lambda}\lambda A_2^*A_2A_1^*A_1 = C_2^2C_1^2.$$

Зокрема, $\Delta C_i^2 = C_i^2\Delta$, $i = 1, 2$, на $\mathcal{D}$.

1. Доведемо, що вектори області $\mathcal{D}$ є аналітичними для C_i^2, C_i, $i = 1, 2$.

Дійсно, покажемо, що $C_i^{2n} \leq \Delta^n$ на $\mathcal{D}$. Побудуємо множину

$$I_n = \{1, 2, \ldots, n\}^n.$$

Тоді

$$\Delta^n = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_n} C_{i_1}^2C_{i_2}^2\ldots C_{i_n}^2 = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_n} A_{i_1}^*A_{i_1}A_{i_2}^*A_{i_2}\ldots A_{i_n}^*A_{i_n} =$$

$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in I_n} A_{i_1}^*A_{i_2}^*\ldots A_{i_n}^*A_{i_n}\ldots A_{i_2}A_{i_1},$$

де використано співвідношення

$$A_jA_i^*A_i = A_i^*A_iA_j, \quad A_j^*A_i^*A_i = A_i^*A_iA_j^*, \quad i \neq j.$$

Оскільки кожен доданок у сумі є додатним на $\mathcal{D}$, одержимо $C_i^{2n} = (A_i^*A_i)^n \leq \Delta^n$. Далі, для кожного $f \in \mathcal{D}$ маємо

$$||C_i^{2n}f||^2 = \langle C^{4n}f, f\rangle \leq \langle\Delta^{2n}f, f\rangle = ||\Delta^nf||^2,$$

крім того, з аналітичності f для Δ випливає аналітичність для C_i^2. Аналогічно

$$||C_i^nf||^2 \leq \langle\Delta^nf, f\rangle \leq ||\Delta^nf||\,||f||.$$

З аналітичності f для Δ випливає, що $||\Delta^nf|| \leq M^nn!$ для деякого $M > 0$. Тоді

$$||C_i^nf|| \leq M^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!} \leq M^{\frac{n}{2}}n!$$

і вектори області $\mathcal{D}$ є також аналітичними для C_i, $i = 1, 2$.

Отже, оператори C_1^2, C_2^2 та Δ переставні на щільній області аналітичних векторів. Тоді вони переставні в термінах розкладів одиниці. Зокрема, для кожного $f \in \mathcal{D}$ маємо $C_1C_2f = C_2C_1f$.

2. Розглянемо тепер $D_i = S_iC_iS_i^*$. З аналітичності області $\mathcal{D}$ для C_i^2 випливає, що для кожного $i = 1, 2$ пара $\{A_i, A_i^*\}$ задає інтегровне зображення CCR з одним ступенем волі. Тоді для довільної дійсної обмеженої борелівської функції $F(\cdot)$ мають місце співвідношення

$$D_i^2S_i = S_iF(\mathbf{1} + D_i^2), \qquad i = 1, 2.$$

3. Покажемо тепер, що для кожного $f \in \mathcal{D}$ вектори C_if є аналітичними для Δ, а отже, й для C_j^2, $j = 1, 2$. Дійсно,

$$||\Delta^nC_if||^2 = \langle\Delta^nC_if, \Delta^nC_if\rangle = \langle C_i^2\Delta^nf, \Delta^nf\rangle \leq$$

$$\leq \langle\Delta^{n+1}f, \Delta^nf\rangle \leq ||\Delta^{n+1}f||\,||\Delta^nf||.$$

Внаслідок аналітичності f для деякого $M > 0$ виконуються нерівності $||\Delta^n f|| \le M^n n!$, $n \in \mathbb{N}$. Тоді

$$||\Delta^n C_i f||^2 \le M \cdot M^{2n}(n!)^2(n+1).$$

Розкладемо M в добуток $M = M_1 M_2$, де $0 < M_1 < 1$, тоді

$$||\Delta^n C_i f|| \le \sqrt{M} M_2^n n! \cdot M_1^n \sqrt{n+1}.$$

Оскільки $M_1^n \sqrt{n+1} \to 0$, $n \to \infty$, знайдеться $K \in \mathbb{N}$ таке, що для всіх $n \ge K$ виконується нерівність

$$||\Delta^n C_i f|| \le \sqrt{M} M_2^n n!$$

і вектор $C_i f$ є аналітичним для Δ.

4. Вище ми перевірили, що

$$A_1 A_2^* A_2 = A_2^* A_2 A_1, \quad A_2 A_1^* A_1 = A_1^* A_1 A_2$$

на $\mathcal{D}$. Таким чином, враховуючи переставність C_1 і C_2 на $\mathcal{D}$, одержуємо

$$S_1 C_2^2 C_1 f = S_1 C_1 C_2^2 f = C_2^2 S_1 C_1 f, \quad f \in \mathcal{D}.$$

А оскільки для $i = 1, 2$ маємо $\ker C_i = \{0\}$ та $C_i(\mathcal{D})$ є щільним в $\mathcal{D}$, справджується рівність

$$S_1 C_2^2 = C_2^2 S_1 \tag{3}$$

на щільній підмножині $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$, де в якості $\mathcal{D}_1$ можна взяти $C_1(\mathcal{D})$. З переставності операторів C_1 та C_2 на $\mathcal{D}$ випливає

$$C_2^4 S_1 C_1 f = C_2^2 S_1 C_2^2 C_1 f = C_2^2 S_1 C_1 C_2^2 f = S_1 C_2^2 C_1 C_2^2 f = S_1 C_2^4 C_1 f, \ f \in \mathcal{D}.$$

Отже, $C_2^4 S_1 = S_1 C_2^4$ на $\mathcal{D}_1$. Використовуючи індукцію, одержуємо рівності

$$S_1 C_2^{2n} f = C_2^{2n} S_1 f, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f \in \mathcal{D}_1.$$

Зокрема, для будь-якого $f \in \mathcal{D}_1$ вектор $S_1 f$ є аналітичним для C_2^2. Оскільки співвідношення (3) виконується на щільній множині аналітичних векторів оператора C_2^2, для довільної дійсної обмеженої борелівської функції $F(\cdot)$ маємо

$$F(C_2^2) S_1 = S_1 F(C_2^2), \quad F(C_2^2) S_1^* = S_1^* F(C_2^2).$$

Зокрема, S_1 комутує зі спектральними проекторами оператора C_2^2. Аналогічно $E_{C_1}(\delta) S_2 =$ $= S_2 E_{C_1}(\delta)$ для будь-якого $\delta \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R}_+)$.

5. Запишемо тепер співвідношення $A_1^* A_2 = \lambda A_2 A_1^*$ у термінах S_i, C_i, $i = 1, 2$:

$$C_1 S_1^* S_2 C_2 f = \lambda S_2 C_2 C_1 S_1^* f, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Очевидно, $S_1^* f \in \mathcal{D}(C_2 C_1)$. Оскільки S_1^* комутує зі спектральними проекторами оператора C_2 та вектор f належить $\mathcal{D}(C_2)$, одержуємо, що $S_1^* f$ належить $\mathcal{D}(C_2)$, $S_1^* f$ є аналітичним для C_2 та

$$C_2C_1S_1^*f = C_1C_2S_1^*f = C_1S_1^*C_2f.$$

Таким чином, маємо рівність

$$C_1S_1^*S_2C_2f = \lambda S_2C_1S_1^*C_2f, \quad f \in \mathcal{D}.$$

Аналогічно $S_1^*C_2f \in \mathcal{D}(C_1)$, отже, $S_2S_1^*C_2f \in \mathcal{D}(C_1)$ та

$$C_1S_1^*S_2C_2f = \lambda C_1S_2S_1^*C_2f.$$

Оскільки $\ker C_1 = \{0\}$ та $C_2(\mathcal{D})$ щільні в $\mathcal{H}$, отримуємо рівність

$$S_1^*S_2 = \lambda S_2S_1^*.$$

6. Як показано в роботі [4], якщо ізометрії S_1, S_2 задовольняють на гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ співвідношення $S_1^*S_2 = \lambda S_1S_2^*$, то співвідношення $S_2S_1 = \lambda S_1S_2$ виконується автоматично.

7. Нагадаємо, що $D_i = S_iC_iS_i^*$, $i = 1, 2$. Тоді для спектральних проекторів $E_i(\sigma) = E_{D_i}(\sigma)$, $\sigma \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, маємо

$$E_i(\sigma) = (\mathbf{1} - S_iS_i^*) \cdot \delta_0 + S_iE_{C_i}(\sigma)S_i^*, \quad i = 1, 2,$$

де через δ_0 позначено дельта-міру, зосереджену в нулі.

Таким чином, враховуючи рівності

$$S_1^*S_2 = \lambda S_1S_2, \qquad S_2S_1 = \lambda S_1S_2, \qquad E_{C_1}(\sigma)S_2 = S_2E_{C_1}(\sigma),$$

одержуємо

$$E_1(\sigma)S_2 = (\mathbf{1} - S_1S_1^*)S_2 \cdot \delta_0 + S_1E_{C_1}(\sigma)S_1^*S_2 =$$

$$= S_2(\mathbf{1} - S_1S_1^*) \cdot \delta_0 + S_2S_1E_{C_1}(\sigma)S_1^* = S_2E_1(\sigma).$$

Твердження доведено.

Введемо тепер поняття незвідних інтегровних зображень та унітарно еквівалентних інтегровних зображень алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$.

Означення 4. *Будемо казати, що набір замкнених на просторі $\mathcal{H}$ операторів $\{A_1, A_2\}$ визначає незвідне інтегровне зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$, якщо виконуються умови означення 3 та сім'я обмежених операторів*

$$\mathcal{B} = \{S_i,\ S_i^*, E_j(\delta_j),\ i, j = 1, 2,\ \delta_j \subset \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$$

є незвідною на $\mathcal{H}$.

Означення 5. *Два інтегровних зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$, що визначаються наборами $\{A_1^{(1)}, A_2^{(1)}\}$ та $\{A_1^{(2)}, A_2^{(2)}\}$, є унітарно еквівалентними тоді й лише тоді, коли відповідні сім'ї $\mathcal{B}^{(1)}$ та $\mathcal{B}^{(2)}$ є унітарно еквівалентними.*

Опишемо інтегровні в термінах означення 3 зображення алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$.

Теорема 1. *Існує єдине, з точністю до унітарної еквівалентності, незвідне інтегровне зображення $*$-алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$, а саме, простір зображення $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes l_2(\mathbb{Z}_+)$ та*

$$D_1 = D \otimes \mathbf{1}, \quad D_2 = \mathbf{1} \otimes D,$$

$$S_1 = S \otimes \mathbf{1}, \quad S_2 = d(\lambda) \otimes S,$$

де оператори $D, S, d(\lambda)\colon l_2(\mathbb{Z}_+) \to l_2(\mathbb{Z}_+)$ визначено на стандартному базисі e_n, $n \in \mathbb{Z}_+$, таким чином:

$$De_n = \sqrt{n}e_n, \quad Se_n = e_{n+1}, \quad d(\lambda)e_n = \lambda^n e_n.$$

Оператори A_1, A_2 мають вигляд

$$A_1 = a \otimes \mathbf{1},$$

$$A_2 = d(\lambda) \otimes a,$$

де a — оператор народження фоківського зображення одновимірних CCR,

$$ae_n = \sqrt{n+1}e_{n+1}, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Доведення. Нехай A_1, A_2 визначають незвідне інтегровне зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ на просторі $\mathcal{H}$. Розглянемо полярні розклади $A_i = S_i C_i$, $i = 1, 2$. З означення 3 випливає, що оператор A_1 задає інтегровне зображення CCR з одним ступенем волі на $\mathcal{H}$. Тоді за теоремою єдиності Дж. фон Неймана (див [1]) будемо мати $\mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathcal{K}$ для деякого гільбертового простору $\mathcal{K}$ та

$$C_1 = C \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}}, \quad S_1 = S \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}},$$

де $Ce_n = \sqrt{n+1}e_n$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Зазначимо також, що

$$D_1 = S_1 C_1 S_1^* = SCS^* \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}} = D \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}},$$

$$De_n = ne_n, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Далі, зі співвідношень $S_2 S_1 = \lambda S_1 S_2$, $S_1^* S_2 = \lambda S_2 S_1^*$ випливає (див. [4]), що $S_2 = d(\lambda) \otimes \widetilde{S}_2$ для деякої ізометрії $\widetilde{S}_2 \in B(\mathcal{K})$.

Оскільки спектральні проектори оператора D_1, що відповідають числам $\lambda_n = \sqrt{n}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, мають вигляд

$$P_n = S_1^n (S_1^n)^* - S_1^{n+1} (S_1^{n+1})^*, \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

то $P_n S_2 = S_2 P_n$ та $F(D_1) S_2 = S_2 F(D_1)$ для будь-якої дійсної борелівської функції $F(\cdot)$.

Через те, що зображення одновимірних CCR на $\mathcal{H}$, що визначене оператором A_2, теж є інтегровним та $A_2 = S_2 C_2$ — полярний розклад, ізометрія S_2 є чистою і спектральний розклад оператора D_2 має вигляд

$$D_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \left(S_2^n (S_2^n)^* - S_2^{n+1} (S_2^{n+1})^* \right).$$

Звідси випливає, що $\widetilde{S}_2$ є чистою ізометрією на $\mathcal{K}$ і

$$D_2 = \mathbf{1}_{l_2(\mathbb{Z}_+)} \otimes \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \left(\widetilde{S}_2^n (\widetilde{S}_2^n)^* - \widetilde{S}_2^{n+1} (\widetilde{S}_2^{n+1})^* \right).$$

Зауважимо, що будь-який оператор $T \in B(\mathcal{H})$, переставний з S_i, S_i^*, $i = 1, 2$, буде також переставним з усіма спектральними проекторами операторів D_1, D_2. Легко переконатись, що будь-який такий T буде мати вигляд

$$T = \mathbf{1}_{l_2(\mathbb{Z}_+)} \otimes \widetilde{T},$$

де $\widetilde{T}$ переставний з $\widetilde{S}_2$, $\widetilde{S}_2^*$. Таким чином, інтегровне зображення, визначене операторами A_1, A_2, буде незвідним на $\mathcal{H}$ тоді й лише тоді, коли ізометрія $\widetilde{S}_2$ є чистою та набір $\{\widetilde{S}_2, \widetilde{S}_2^*\}$ є незвідним на $\mathcal{K}$.

Аналогічними міркуваннями неважко переконатись, що інтегровні зображення на просторах $l_2(\mathbb{Z}_+) \otimes \mathcal{K}_j$, $j = 1, 2$, визначені як

$$A_1^{(j)} = a \otimes \mathbf{1}_{\mathcal{K}_j}, \quad A_2^{(j)} = d(\lambda) \otimes \widetilde{D}_2^{(j)} \widetilde{S}_2^{(j)}, \quad j = 1, 2,$$

де

$$\widetilde{D}_2^{(j)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} \left((\widetilde{S}_2^{(j)})^n (\widetilde{S}_2^{(j)})^{*n} - (\widetilde{S}_2^{(j)})^{n+1} (\widetilde{S}_2^{(j)})^{*n+1} \right), \quad j = 1, 2,$$

є унітарно еквівалентними тоді й лише тоді, коли набори $\{S_2^{(j)}, S_2^{(j)*}\}$, $j = 1, 2$, є унітарно еквівалентними.

Нагадаємо, що єдиним, з точністю до унітарної еквівалентності, незвідним зображенням $*$-алгебри, породженої одним ізометричним елементом s, в якому його образ — чиста ізометрія, є фоківське (див., наприклад, [7]):

$$\pi_F(s) = S \colon l_2(\mathbb{Z}_+) \to l_2(\mathbb{Z}_+), \qquad Se_n = e_{n+1}, \qquad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Отже, ми можемо вважати, що в незвідному інтегровному зображенні $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ $\mathcal{K} = l_2(\mathbb{Z}_+)$, $\widetilde{S}_2 = S$. Тоді спектральний розклад $\widetilde{D}_2$ має вигляд

$$\widetilde{D}_2 = \sum_{n=0} \sqrt{n} \left(S^n (S^n)^* - S^{n+1} (S^{n+1})^* \right).$$

Отже,

$$A_2 = \left(\mathbf{1}_{l_2(\mathbb{Z}_+)} \otimes \widetilde{D}_2 \right) (d(\lambda) \otimes S) = d(\lambda) \otimes a.$$

Теорему доведено.

Зауваження. **1**. Вектор $\Omega = e_0 \otimes e_0 \in \mathcal{H} = l_2(\mathbb{Z}_+)^{\otimes 2}$ є циклічним для операторів незвідного інтегровного зображення $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ і

$$A_1^*\Omega = 0, \qquad A_2^*\Omega = 0.$$

Таким чином (див. [6]), побудоване інтегровне зображення є зображенням Фока і для алгебри $\mathfrak{A}_{\lambda,2}$ має місце аналог теореми Дж. фон Неймана про єдиність незвідного інтегровного зображення.

2. Безпосередня перевірка показує, що оператори A_1, A_2, визначені в теоремі 1, задовольняють умови означення 2. Отже, означення 2 та 3 є еквівалентними.

1. *Bratelli O., Robinson D. W.* Operator algebras and quantum statistical mechanics-2. Equilibrium states. Models in quantum statistical mechanics. – Berlin etc.: Springer, 2002. – 532 p.
2. *Bożejko M., Speicher R.* Completely positive maps on Coxeter groups, deformed commutation relations, and operator spaces // Mat. Ann. –1994. – **300**. – P. 97 – 120.
3. *Berezansky Yu. M., Sheftel Z. G., Us G. F.* Functional analysis. – Berlin etc.: Springer, 1996. – 452 p.
4. *Proskurin D.* Stability of a special class of q_{ij}-CCR and extensions of higher-dimensional noncommutative tori // Lett. Math. Phys. – 2000. – **52**, № 2. – P. 165 – 175.
5. *Jørgensen P. E. T., Proskurin D. P., Samoilenko Yu. S.* The kernel of Fock representation of Wick algebras with braided operator of coefficients // Pacif. J. Math. – 2001. – **198**. – P. 109 – 122.
6. *Jørgensen P. E. T., Schmitt L. M., Werner R. F.* Positive representations of general commutation relations allowing Wick ordering // J. Funct. Anal. – 1995. – **134**. – P. 33 – 99.
7. *Ostrovskyi V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented algebras // Rev. Math. and Math. Phys. – 2000. – **11**. – 261 p.
8. *Ostrovskyi V., Proskurin D., Turowska L.* Unbounded representations of q-deformation of Cuntz algebra // Lett. Math. Phys. – 2008. – **85**, № 2-3. – P. 147 – 162.
9. *Proskurin D.* Homogeneous ideals in Wick $*$-algebras // Proc. Amer. Math. Soc. – 1998. – **126**, № 11. – P. 3371 – 3376.
10. *Pusz W., Woronowicz S. L.* Twisted second quantization // Rep. Math. Phys. – 1989. – **27**. – P. 251 – 263.

Одержано 15.11.12