УДК 517.929

В. Б. Черепенников (Ин-т систем энергетики СО РАН, Иркутск; Иркут. гос. техн. ун-т, Россия),
Е. В. Ветрова (Иркут. гос. ун-т, Россия)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

We consider the scalar linear retarded functional differential equation

$$\dot{x}(t) = ax(t-1) + bx\left(\frac{t}{q}\right) + f(t), \quad q > 1.$$

The study of linear retarded functional differential equations deals mainly with two initial-value problems: an initial-value problem with initial function and an initial-value problem with initial point (when one seeks a classical solution whose substitution into the original equation reduces it to an identity). In the present paper, an initial-value problem with initial point is investigated by the method of polynomial quasisolutions. We prove theorems on the existence of polynomial quasisolutions and exact polynomial solutions of the considered linear retarded functional differential equation. The results of a numerical experiment are presented.

Розглядається скалярне лінійне функціонально-диференціальне рівняння (ЛФДР) загаювального типу

$$\dot{x}(t) = ax(t-1) + bx\left(\frac{t}{q}\right) + f(t), \quad q > 1.$$

При дослідженні ЛФДР в основному розглядаються дві початкові задачі: початкова задача з початковою функцією і початкова задача з початковою точкою, коли шукається класичний розв'язок, підстановка якого у вихідне рівняння перетворює його в тотожність. У даній роботі досліджується початкова задача с початковою точкою з допомогою методу поліноміальних квазірозв'язків. Доведено теореми існування поліноміальних квазірозв'язків і точних поліноміальних розв'язків розглядуваного ЛФДР. Наведено результати числового експерименту.

1. Постановка задачи. Рассмотрим скалярное линейное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = ax(t-1) + bx\left(\frac{t}{q}\right) + \bar{f}(t), \quad q > 1, \tag{1.1}$$

где a и b — константы,

$$\bar{f}(t) = \sum_{n=0}^{F} \bar{f}_n t^n. \tag{1.2}$$

Исследуем начальную задачу с начальной точкой для уравнения (1.1), задав в точке $t = 0$ начальное условие

$$x(0) = x_0. \tag{1.3}$$

Известно, что при $a = 0$ начальная задача (1.1)–(1.3) имеет единственное аналитическое решение (см., например, [1]), а при $b = 0$ и $f(t) \equiv 0$ — бесконечное множество аналитических решений, каждое из которых порождается соответствующим корнем характеристического квазиполинома. В общем случае условия существования аналитических решений начальной задачи (1.1)–(1.3) авторам не известны. Применить же здесь классический метод неопределенных коэффициентов не представляется возможным. Действительно, пусть

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n, \quad t \in R. \tag{1.4}$$

В этом случае

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n x_n t^{n-1}, \qquad x(t-1) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n (t-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{x}_n t^n, \qquad x\left(\frac{t}{q}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_n}{q^n} t^n. \tag{1.5}$$

Здесь

$$\tilde{x}_n = x_n + \sum_{i=1}^{\infty} \bar{C}_{n+i}^i x_{n+i}, \tag{1.6}$$

$\bar{C}_p^q = (-1)^q C_p^q$, $C_p^q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ — биномиальные коэффициенты.

Подставляя (1.4), (1.5) в (1.1) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получаем

$$n x_n = \begin{cases} a\tilde{x}_{n-1} + \dfrac{b}{q^{n-1}} x_{n-1} + \bar{f}_{n-1}, & 1 \le n \le F+1, \\ a\tilde{x}_{n-1} + \dfrac{b}{q^{n-1}} x_{n-1}, & n \ge F+2. \end{cases} \tag{1.7}$$

Если бы в исходной начальной задаче (1.1)–(1.3) не было запаздывания, то $\tilde{x}_n = x_n$ и формула (1.7) представляла бы собой рекуррентную формулу, из которой последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ определялась бы единственным способом. Это означало бы существование в силу теоремы Коши единственного аналитического решения. В данном случае наличие запаздывания проявляется в том, что, как видно из (1.6), каждый коэффициент $\tilde{x}_n$ зависит от всех последующих коэффициентов x_{n+i}, $i = \overline{0, \infty}$. Построить рекуррентную формулу здесь не представляется возможным, так как полученная в этом случае бесконечномерная линейная система относительно неизвестных коэффициентов x_n пока не поддается анализу в смысле однозначной вычисляемости последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Следуя методу полиномиальных квазирешений [2], вводим полином

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in R. \tag{1.8}$$

Тогда

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=0}^{N} n x_n t^{n-1}, \qquad x(t-1) = \sum_{n=0}^{N} \tilde{x}_n t^n, \qquad x\left(\frac{t}{q}\right) = \sum_{n=0}^{N} \frac{x_n}{q^n} t^n, \tag{1.9}$$

где

$$\tilde{x}_n = x_n + \sum_{i=1}^{N-n} \bar{C}_{n+i}^i x_{n+i}, \qquad n = \overline{1, N-1}; \quad \tilde{x}_N = x_N. \tag{1.10}$$

При подстановке полиномов (1.8) и (1.9) в уравнение (1.1) возникает некорректность в смысле размерности полиномов. Так, производная $\dot{x}(t)$ имеет размерность $N-1$, слагаемые $ax(t-1)$

и $bx\left(\dfrac{t}{q}\right)$ имеют размерность N, а $\bar f(t)$ имеет размерность F. С другой стороны, как следует из (1.7), для того, чтобы последний коэффициент x_N в (1.8) определялся последним коэффициентом $\bar f_F$ в (2.5), необходимо, чтобы в формуле (1.8) $N = F + 1$.

Полагая в (1.8) $N = F + 1$, определяем функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \bar f(t) + \Delta(t) = \sum_{n=0}^{N} f_n t^n, \tag{1.11}$$

где $f_n = \bar f_n$, $n = \overline{0, N-1}$, а невязка $\Delta_N(t) = f_N t^N$, f_N — неизвестный коэффициент.

С учетом введенных обозначений рассмотрим начальную задачу

$$\dot x(t) = ax(t-1) + bx\left(\frac{t}{q}\right) + f(t), \qquad x(0) = x_0, \quad t \in R. \tag{1.12}$$

Определение 1.1. *Задачу* (1.12) *будем называть согласованной по размерности полиномов относительно задачи* (1.1) – (1.3).

Подставляя (1.8) и (1.9) в (1.12), методом неопределенных коэффициентов получаем

$$\begin{gathered} nx_n = a\tilde x_{n-1} + \frac{b}{q^{n-1}} x_{n-1} + f_{n-1}, \quad 1 \le n \le F+1, \\ 0 = a\tilde x_N + \frac{b}{q^N} x_N + f_N, \quad n = F+2. \end{gathered} \tag{1.13}$$

***Замечание* 1.1.** Поскольку степень полинома $x(t)$ равна $F + 1$, можно выбрать степень полинома $\bar f(t)$ в (1.2) в зависимости от желаемой степени полинома $x(t)$, добавляя к $\bar f(t)$ соответствующее число нулевых членов.

Определение 1.2. *Если существует полином степени* $N = F + 1$

$$x(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \quad t \in R, \tag{1.14}$$

тождественно удовлетворяющий начальной задаче (1.12), *то этот полином будем называть полиномиальным квазирешением* (*ПК-решением*) *задачи* (1.1) – (1.3).

Таким образом, задача нахождения ПК-решения степени N состоит в установлении условий существования и способов нахождения невязки $\Delta_N(t)$, порождающей решение начальной задачи (1.12) в виде полинома (1.8).

2. Основные результаты. ***2.1. Теорема существования ПК-решений.*** Вернемся к формулам (1.13). Полагая $n = 1, 2, \ldots, F + 2$ и учитывая (1.9) и (1.10), записываем эти формулы в виде

$$(-a-1)x_1 + ax_2 - ax_3 + \ldots + (-1)^N ax_N = -(a+b)x_0 - f_0,$$

$$\left(a + \frac{b}{q}\right) x_1 + (\bar C_2^1 a - 2)x_2 + \ldots + \bar C_k^{k-1} ax_k + \ldots + \bar C_N^{N-1} ax_N = -f_1,$$

$$\left(a + \frac{b}{q^2}\right) x_2 + (\bar C_3^1 a - 3)x_3 + \ldots + \bar C_k^{k-2} ax_k + \ldots + \bar C_N^{N-2} ax_N = -f_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \tag{2.1}$$

$$\left(a+\frac{b}{q^k}\right)x_k+(\bar{C}^1_{k+1}a-(k+1))x_{k+1}+\ldots+\bar{C}^m_{k+m}ax_{k+m}+\ldots+\bar{C}^{N-k}_N ax_N=-f_k,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left(a+\frac{b}{q^{N-1}}\right)x_{N-1}+(\bar{C}^1_N a-N)x_N=-f_F,$$

$$\left(a+\frac{b}{q^N}\right)x_N+f_N=0.$$

Введем следующие обозначения:

$$a_{s,s}=-s(a+1),\quad s=\overline{1,N};\qquad a_{1,s}=(-1)^s a,\quad s=\overline{2,N};$$

$$a_{s,s-1}=a+\frac{b}{q^{s-1}},\quad s=\overline{2,N+1}; \tag{2.2}$$

$$a_{2+i,3+i+j}=\bar{C}^{2+j}_{3+i+j}a,\quad i=\overline{0,N-3},\quad j=\overline{0,N-3-i};$$

$$\bar{x}_N=(x_1,x_2,\ldots,x_N,f_N)^T,\qquad \bar{g}_N=(-(a+b)x_0-f_0,-f_1,-f_2,\ldots,-f_F,0)^T.$$

Тогда система линейных алгебраических уравнений (2.1) в матричном виде запишется так:

$$M_N\bar{x}_N=\bar{g}_N, \tag{2.3}$$

где

$$M_N=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,N-1} & a_{1,N} & 0\\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,N-1} & a_{2,N} & 0\\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,N-1} & a_{3,N} & 0\\ 0 & 0 & a_{4,3} & \ldots & a_{4,N-1} & a_{4,N} & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{N,N-1} & a_{N,N} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & a_{N+1,N} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Теорема 2.1. *Пусть матрица* M_N *линейной системы* (2.3), *определенная в силу уравнения* (1.1), *невырожденная. Тогда для любого* $x_0\in R$ *начальная задача* (1.1)–(1.3) *имеет единственное ПК-решение в виде полинома* (1.14) *степени* $N=F+1$ *с невязкой* $\Delta(t)=f_Nt^N$.

Действительно, в этом случае существует матрица M_N^{-1}, обратная матрице M_N, и из (2.3) получаем

$$\bar{x}_N=M_N^{-1}\bar{g}_N.$$

Следовательно, коэффициенты $x_1,x_2,\ldots,x_N$ ПК-решения (1.14) и невязка $\Delta(t)$ вычисляются единственным образом, что и доказывает теорему.

2.2. Точные полиномиальные решения. Рассмотрим начальную задачу с начальной точкой для однородного функционально-дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$\dot{x}(t) = ax(t-1) + bx\left(\frac{t}{q}\right), \qquad x(0) = x_0, \quad q > 1. \tag{2.5}$$

Следуя алгоритму нахождения ПК-решений в виде полинома (1.14) степени N, записываем задачу (1.12), согласованную по размерности полиномов,

$$\dot{x}(t) = ax(t-1) + bx\left(\frac{t}{q}\right) + f(t), \qquad x(0) = x_0, \quad q > 1, \tag{2.6}$$

где согласно (1.11) $f(t) = \sum_{n=0}^{N} f_n t^n$, $f_n = 0$, $n = \overline{0, N-1}$, а f_N — неизвестный коэффициент. Для нахождения коэффициентов x_n, $n = \overline{0, N}$, и f_N воспользуемся матричным уравнением (2.3). Здесь в силу (2.2)

$$\bar{x}_N = (x_1, x_2, \ldots x_N, f_N)^T, \qquad \bar{g}_N = (-(a+b)x_0, 0, 0, \ldots, 0)^T. \tag{2.7}$$

Пусть для $k < N$ выполняется соотношение

$$a + \frac{b}{q^k} = 0. \tag{2.8}$$

Обозначим

$$\bar{x}_{k_N} = (x_{k+1}, x_{k+2}, \ldots, x_N, f_N)^T, \qquad \bar{g}_{k_N} = (0, 0, 0, \ldots, 0)^T. \tag{2.9}$$

Рассмотрим линейную систему, состоящую из последних $N-k$ строк линейной системы (2.3). В матричном виде эта система запишется так:

$$M_{k_N} \bar{x}_{k_N} = \bar{g}_{k_N}, \tag{2.10}$$

где

$$M_{k_N} = \begin{pmatrix} a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k+2} & a_{k+1,k+3} & \cdots & a_{k+1,N-1} & a_{k+1,N} & 0 \\ a_{k+2,k+1} & a_{k+2,k+2} & a_{k+2,k+3} & \cdots & a_{k+2,N-1} & a_{k+2,N} & 0 \\ 0 & a_{k+3,k+2} & a_{k+3,k+3} & \cdots & a_{k+3,N-1} & a_{k+3,N} & 0 \\ 0 & 0 & a_{k+4,k+3} & \cdots & a_{k+4,N-1} & a_{k+4,N} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{N,N-1} & a_{N,N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{N+1,N} & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.11}$$

Теорема 2.2. *Пусть для начальной задачи* (2.6) *при* $k < N$ *выполняется условие* $a + \dfrac{b}{q^k} = 0$. *Тогда если матрица* M_N, *определенная формулой* (2.4), *и матрица* M_{k_N} *невырожденные, то для любого* $x_0 \neq 0$ *полином*

$$x(t) = \sum_{n=0}^{k} x_n t^n \tag{2.12}$$

будет точным решением начальной задачи (2.6).

Доказательство. Поскольку по условию теоремы $\det M_{k_N} \neq 0$, существует матрица $M_{k_N}^{-1}$, обратная матрице M_{k_N}. Тогда из (2.10) находим

$$\bar{x}_{k_N} = M_{k_N}^{-1} \bar{g}_{k_N}.$$

А так как согласно (2.7) и (2.9) вектор $\bar{g}_{k_N}$ является нуль-вектором, вектор $\bar{x}_{k_N}$ тоже будет нуль-векторм, т. е. $x_{k+i} = 0$, $i = \overline{1, N-k}$, и $f_N = 0$. В силу этого из (2.3) получаем

$$\hat{M}_k \hat{x}_k = \hat{g}_k. \tag{2.13}$$

Здесь

$$\hat{M}_k = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots & a_{1,k-1} & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots & a_{2,k-1} & a_{2,k} \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots & a_{3,k-1} & a_{3,k} \\ 0 & 0 & a_{4,3} & \ldots & a_{4,k-1} & a_{4,k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{k,k-1} & a_{k,k} \end{pmatrix}, \tag{2.14}$$

$$\hat{x}_k = (x_1, x_2, \ldots, x_k)^T, \qquad \hat{g}_k = (-(a+b)x_0, 0, \ldots, 0)^T. \tag{2.15}$$

Поскольку по условию теоремы в (2.4) $\det M_N \neq 0$, с учетом теоремы 2.1 $\det \hat{M}_k \neq 0$. Тогда существует матрица $\hat{M}_k^{-1}$, обратная матрице $\hat{M}_k$, и согласно (2.13)

$$\hat{x}_k = \hat{M}_k^{-1} \hat{g}_k.$$

Из этого соотношения и формул (2.15) следует, что коэффициенты x_i, $i = \overline{1, k}$, вычисляются единственным образом, что и доказывает существование решения начальной задачи (2.6) в виде полинома (2.12).

***Замечание* 2.1.** При $x_0 = 0$ начальная задача (2.6) имеет тривиальное решение $x(t) \equiv 0$.

***Замечание* 2.2.** Теорема 2.2 доказывает существование решения начальной задачи (2.6) в виде полинома. Но это не означает, что это решение единственное.

3. Численный эксперимент.

***Пример* 3.1.** Исследуем начальную задачу для функционально-дифференциального уравнения

$$\dot{x}(t) = \frac{3}{16} x(t-1) - 24x\left(\frac{t}{2}\right), \qquad x(0) = 1, \quad t \in R. \tag{3.1}$$

Задача, согласованная по размерности полиномов относительно этой задачи, согласно (2.6) имеет вид

$$\dot{x}(t) = \frac{3}{16} x(t-1) - 24x\left(\frac{t}{2}\right) + \Delta(t), \quad x(0) = 1,$$

где

$$x(t) = x_N(t) = \sum_{n=0}^{N} x_n t^n, \qquad \Delta(t) = \Delta_N(t) = f_N t^N.$$

Ниже приведены результаты расчетов по нахождению ПК-решений для $N = \overline{4,7}$ и соответствующие им невязки:

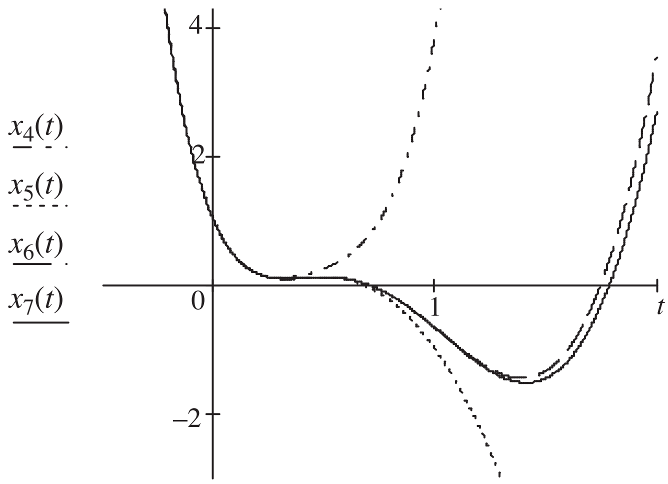
$$x_4(t) = 1 - 7{,}765t + 24{,}405t^2 - 33{,}547t^3 + 19{,}683t^4 - 3{,}853t^4,$$

$$x_5(t) = 1 - 7{,}810t + 24{,}237t^2 - 32{,}011t^3 + 17{,}433t^4 - 3{,}853t^5,$$

$$x_6(t) = 1 - 7{,}818t + 24{,}271t^2 - 31{,}986t^3 + 17{,}258t^4 - 3{,}677t^5 + 0{,}290t^6,$$

$$x_7(t) = 1 - 7{,}818t + 24{,}273t^2 - 31{,}988t^3 + 17{,}256t^4 - 3{,}671t^5 + 0{,}268t^6 - 0{,}006t^7,$$

$$\Delta_4(t) = 26{,}071t^4, \qquad \Delta_5(t) = -2{,}167t^5, \qquad \Delta_6(t) = -0{,}054t^6, \qquad \Delta_7(t) = 0.$$



На рисунке приведены графики полученных ПК-решений начальной задачи (3.1).

Расчеты показали, что при $N = 7$ невязка $\Delta_7(t) = 0$. Это означает, что полученное ПК-решение начальной задачи (3.1) в виде полинома седьмой степени является точным решением этой задачи. Этот результат является следствием теоремы 2.2, так как в этом случае $a + \dfrac{b}{q^k} = \dfrac{3}{16} - \dfrac{24}{2^7} = 0$.

1. *Черепенников В. Б.* Об аналитических решениях некоторых систем функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1990. – **26**, № 6. – С. 1094 – 1095.
2. *Черепенников В. Б.* Полиномиальные квазирешения линейных систем дифференциально-разностных уравнений // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 10. – С. 49 – 58.

Получено 20.10.11,
после доработки — 28.12.12