

К. А. Касымов (Ин-т математики и механики Каз. нац. ун-та, Алматы, Казахстан),

Д. Н. Нургабыл (Жетысус. гос. ун-т, Талдыкорган, Казахстан),

А. Б. Уайсов (Ин-т математики и механики Каз. нац. ун-та, Алматы, Казахстан)

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С НАЧАЛЬНЫМ СКАЧКОМ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С МАЛЫМ ПАРАМЕТРОМ ПРИ ПРОИЗВОДНЫХ

We obtain asymptotic estimates for solutions of singularly perturbed boundary-value problems with initial jumps.

Встановлено асимптотичні оцінки розв'язків сингулярно збурених крайових задач з початковими стрибками.

Для довольно широкого класса сингулярно возмущенных задач были разработаны эффективные асимптотические методы, позволяющие строить равномерные приближения с любой точностью [1 – 8].

Вместе с тем для широкого класса сингулярно возмущенных краевых задач выбор надлежащего метода для построения решений или их асимптотических приближений без предварительного исследования оказывается весьма затруднительным. Анализ показывает, что к таким задачам можно отнести и краевые задачи, для которых характерно наличие начального скачка. Наиболее общие результаты в этом направлении получены в [9 – 11].

Однако в указанных работах рассматривается случай, когда малый параметр содержится только при старшей производной. Естественно возникает вопрос о выделении новых классов краевых задач, имеющих начальный скачок. Именно это и является целью настоящей работы.

1. Постановка задачи. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение высшего порядка с малым параметром при производных

$$L_{\varepsilon} y_{\varepsilon} \equiv \sum_{r=1}^m \varepsilon^r A_{n+r}(t) \frac{d^{n+r} y}{dt^{n+r}} + \sum_{k=0}^n A_k(t) \frac{d^k y}{dt^k} = h(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$\left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = \overline{0, l-1}, \quad \left. \frac{d^i y}{dt^i} \right|_{t=1} = \beta_i, \quad i = \overline{0, p-1}, \quad (2)$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, α_i, β_i — постоянные, $A_{n+m}(t) = 1$, $m + n = l + p$.

В настоящей работе устанавливаются асимптотические оценки и характер роста производных решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \rightarrow 0$, выделяется класс краевых задач, имеющих начальный скачок.

Потребуем выполнения следующих условий:

1⁰. Функции $A_i(t) \in C^{n+m+1}([0, 1])$, $i = \overline{0, n+m}$, $h(t) \in C([0, 1])$.

2⁰. Функция $A_n(t)$ удовлетворяет неравенству $A_n(t) \neq 0$, $0 \leq t \leq 1$.

3⁰. Дополнительное характеристическое уравнение

$$\mu^m + A_{n+m-1}(t)\mu^{m-1} + \dots + A_{n+1}(t)\mu + A_n(t) = 0$$

имеет m различных корней μ_1, \dots, μ_m с отрицательными вещественными частями, причем $m < l$. Пусть $l - m = n_1$.

4⁰. Справедливо $\bar{J}_0 = \det \|\sigma_{ij}\| \neq 0$, где элементы $\sigma_{ij} = u_{j_0}^{(i-1)}(0)$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, l}$, $\sigma_{l+i, j} = u_{j_0}^{(i-1)}(1)$, $j = \overline{1, n}$, $i = \overline{1, p}$, составлены на основе фундаментальной системы решений $u_{10}(t)$, $u_{20}(t), \dots, u_{n0}(t)$ уравнения

$$L_0 \bar{y} = 0. \quad (3)$$

Пусть $\bar{W}(t)$ — вронскиан фундаментальной системы решений уравнения (3), тогда $\bar{W}(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$.

5⁰. Имеет место

$$\Lambda_0 = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i-1} \frac{\bar{J}_i^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} + \sum_{i=1}^p \beta_{i-1} \frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} - \sum_{i=1}^{n_2} \frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} \int_0^1 \frac{\bar{W}_t^{(i-1)}(1, s)}{\bar{W}(s)A_n(s)} h(s) ds - \alpha_{m_1} \neq 0, \quad (4)$$

где $\bar{J}_k^{(n_1)}(0)$ — определитель n -го порядка, полученный из \bar{J}_0 заменой k строки на строку $u_{10}^{(n_1)}(0), \dots, u_{n0}^{(n_1)}(0)$, определитель $\bar{W}_t^{(q)}(t, s)$ получается из $\bar{W}(s)$ заменой n -й строки на строку $u_{10}^{(q)}(t), u_{20}^{(q)}(t), \dots, u_{n0}^{(q)}(t)$.

2. Фундаментальная система решений. Наряду с уравнением (1) рассмотрим соответствующее однородное возмущенное уравнение

$$L_\varepsilon y = 0. \quad (5)$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия 1⁰–3⁰. Тогда для фундаментальной системы решений $\tilde{y}_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+m}$, сингулярно возмущенного однородного уравнения (5) справедливы следующие асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ представления:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_i^{(q)}(t, \varepsilon) &= u_{i_0}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n}, \quad q = \overline{0, n+m-1}, \\ \tilde{y}_{n+r}^{(q)}(t, s) &= \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_r(x) dx\right) \left(u_{n+r}(t) \mu_r^q(t) + O(\varepsilon)\right), \\ r &= \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n+m-1}, \end{aligned} \quad (6)$$

где $u_{10}(t), u_{20}(t), \dots, u_{n0}(t)$ — фундаментальная система решений уравнения (3), $u_{n+r}(t) \neq 0$, $t \in [0, 1]$.

Доказательство леммы непосредственно следует из известной теоремы Шлезингера – Биркгофа – Нуайона (см., например, [7, с. 29–34]).

В качестве фундаментальной системы решений уравнения (5) возьмем

$$y_i(t, \varepsilon) = \tilde{y}_i(t, \varepsilon), \quad i = 1, \dots, n, \quad y_{n+s}(t, \varepsilon) = \varepsilon^{n_1} \tilde{y}_{n+s}(t, \varepsilon), \quad s = 1, \dots, m, \quad (7)$$

где $n_1 = l - m$, $p = n - n_1 = n_2$. Составим определитель Вронского $W(t, \varepsilon)$ системы решений (7). С учетом (6) и (7) вынесем функции $\varepsilon^{n_1} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_i(x) dx\right)$, $i = 1, \dots, m$, за знак определителя $W(t, \varepsilon)$. Тогда получим

$$W(t, \varepsilon) = \varepsilon^\chi \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx\right) \rho(t, \varepsilon),$$

где $\mu = \mu_1 + \dots + \mu_m$, $\chi = n_1 m$, $\rho(t, \varepsilon) = \det \|\rho_{ij}(t, \varepsilon)\|$ — определитель $(n + m)$ -го порядка, элементы которого имеют вид

$$\rho_{ij}(t, \varepsilon) = \begin{cases} u_{j0}^{(i-1)}(t) + O(\varepsilon), & j = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, n + m, \\ \frac{1}{\varepsilon^{i-1}} \left(u_{j0}(t) \mu_{j-n}^{i-1} + O(\varepsilon) \right), & j = n + 1, \dots, n + m, \quad i = 1, \dots, n + m. \end{cases}$$

Теперь исследуем асимптотическое представление определителя $\rho(t, \varepsilon)$. Раскладываем $\rho(t, \varepsilon)$ по всем возможным минорам первых n столбцов. Все эти миноры имеют нулевой порядок по ε . Поэтому в сумме произведений всех этих миноров на их алгебраические дополнения доминирующим членом $\rho(t, \varepsilon)$ будет то произведение, в котором алгебраическое дополнение имеет наименьший порядок по ε . В силу (6), (7) порядок главного члена элементов одного и того же столбца, занимающего с $(n + 1)$ -й по $(n + m)$ -ю строки, начиная с первой строки убывает по мере роста номера строки. Следовательно, алгебраическое дополнение главного минора n -го порядка $w_\varepsilon(t)$, расположенного в левом верхнем углу, имеет наименьший порядок по ε . Поэтому доминирующий член определителя $\rho(t, \varepsilon)$ получается умножением минора $w_\varepsilon(t)$ на его алгебраическое дополнение, которое мы обозначим через $D(t, \varepsilon)$. Тогда, используя представления (6) и (7), для $\rho(t, \varepsilon)$ получаем

$$\rho(t, \varepsilon) = w_\varepsilon(t) D(t, \varepsilon) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\lambda-1}}\right), \quad (8)$$

где $\lambda = \frac{(2n + m - 1)m}{2}$. Определитель $w_\varepsilon(t)$ и алгебраическое дополнение $D(t, \varepsilon)$ в первом приближении при достаточно малых ε представимы в виде

$$w_\varepsilon(t) = \bar{W}(t) + O(\varepsilon), \quad D(t, \varepsilon) = (-1)^{n(n+1)} \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \pi(t) \omega(t) (1 + O(\varepsilon)), \quad (9)$$

где $n(n + 1)$ — четное число; $\pi(t) = \prod_{k=1}^m u_{n+k}(t) \mu_k^n(t)$; $\omega(t)$ — определитель Вандермонда для корней μ_1, \dots, μ_m , который отличен от нуля на $0 \leq t \leq 1$, так как эти корни попарно различны и отличны от нуля. Согласно процедуре определения функции $u_{n+1}(t), \dots, u_{n+m}(t)$ также отличны от нуля на отрезке $[0, 1]$. Теперь, учитывая представления (9), из (8) имеем

$$\rho(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^\lambda} \bar{W}(t) \pi(t) \omega(t) (1 + O(\varepsilon)) \neq 0.$$

Тогда

$$W(t, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^\lambda}{\varepsilon^\lambda} \bar{W}(t) \pi(t) \omega(t) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx\right) (1 + O(\varepsilon)) \neq 0. \quad (10)$$

3. Функция Коши и граничные функции.

Определение 1. Функция $K(t, s, \varepsilon)$, определенная при $0 \leq t, s \leq 1$, называется функцией Коши, если она по t удовлетворяет однородному уравнению (5) и при $t = s$ — начальным условиям

$$K^{(j)}(s, s, \varepsilon) = 0, \quad j = \overline{0, n+m-2}, \quad K^{(n+m-1)}(s, s, \varepsilon) = 1.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $1^0 - 3^0$. Тогда при достаточно малых ε функция Коши $K(t, s, \varepsilon)$ при $0 \leq t, s \leq 1$ существует, единственна и выражается формулой

$$K(t, s, \varepsilon) = W(t, s, \varepsilon) / W(s, \varepsilon), \quad (11)$$

где $W(t, s, \varepsilon)$ — определитель $(n+m)$ -го порядка, получаемый из вронскиана $W(s, \varepsilon)$ $(n+m)$ -й строки фундаментальной системы решений $y_1(t, \varepsilon), y_2(t, \varepsilon), \dots, y_{n+m}(t, \varepsilon)$ уравнения (5).

Лемма 2. Если выполнены условия $1^0 - 3^0$, то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ функция Коши $K(t, s, \varepsilon)$ при $0 \leq s \leq t \leq 1$ представима в виде

$$K_t^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \varepsilon^m \left(\frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s)}{\bar{W}(s) A_n(s)} + \frac{\varepsilon^{n-1} \omega^{(q)}(t, s, \varepsilon)}{\varepsilon^q \omega(s)} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^n \omega^{(q)}(t, s, \varepsilon)}{\varepsilon^q \omega(s)}\right) \right), \quad (12)$$

где $\bar{W}_t^{(q)}(t, s)$ — определитель из (4), а $\omega^{(q)}(t, s, \varepsilon)$ — определитель m -го порядка, полученный из $\omega(s)$ заменой m -й строки на строку

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_1(x) dx\right) \frac{u_{n+1}(t) \mu_1^q(t)}{u_{n+1}(s) \mu_1^n(s)}, \dots, \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_m(x) dx\right) \frac{u_{n+m}(t) \mu_m^q(t)}{u_{n+m}(s) \mu_m^n(s)}. \quad (13)$$

Доказательство. Из (11) определим $W_t^{(q)}(t, s, \varepsilon)$. С учетом (6) и (7) вынесем за знак определителя $W_t^{(q)}(t, s, \varepsilon)$ функции $\varepsilon^{n_i} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mu_i(x) dx\right)$, $i = 1, \dots, m$. Тогда получим

$$W_t^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \varepsilon^\lambda \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu(x) dx\right) \rho^{(q)}(t, s, \varepsilon), \quad (14)$$

где $\rho^{(q)}(t, s, \varepsilon)$ — определитель $(n+m)$ -го порядка, полученный из $\rho(s, \varepsilon)$ заменой $(n+m)$ -й

строки на строку $y_1^{(q)}(t, \varepsilon), \dots, y_n^{(q)}(t, \varepsilon), v_{n+1}(t, s, \varepsilon), \dots, v_{n+m}(t, s, \varepsilon)$, причем функции $v_{n+j}(t, s, \varepsilon)$ при достаточно малых ε представимы в виде

$$v_{n+j}(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_s^t \mu_j(x) dx\right) \left(u_{n+j}(t) \mu_j^q(t) + O(\varepsilon)\right), \quad j = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n+m-1}. \tag{15}$$

Раскладывая $\rho^{(q)}(t, s, \varepsilon)$ по элементам $(n+m)$ -й строки, получаем

$$\begin{aligned} \rho^{(q)}(t, s, \varepsilon) &= y_1^{(q)}(t, \varepsilon) M_{n+m,1}(s, \varepsilon) + \dots + y_{n_1}^{(q)}(t, \varepsilon) M_{n+m,n_1}(s, \varepsilon) + \\ &+ v_{n+1}(t, s, \varepsilon) M_{n+m,n+1}(s, \varepsilon) + \dots + v_{n+m}(t, s, \varepsilon) M_{n+m,n+m}(s, \varepsilon). \end{aligned} \tag{16}$$

Исследуя теперь алгебраические дополнения $M_{n+m,j}(s, \varepsilon)$ так же, как и при выводе формул (8)–(10), находим

$$M_{n+m,j}(s, \varepsilon) = \frac{(-1)^{n+m+j} \varepsilon^m \pi(s) \omega(s)}{\varepsilon^\lambda \prod_{k=1}^m \mu_k(s)} (\bar{W}_{nj}(s) + O(\varepsilon)), \quad j = 1, \dots, n, \tag{17}$$

где $\bar{W}_{nj}(s)$ — определитель $(n-1)$ -го порядка, полученный из определителя $\bar{W}(s)$ вычеркиванием n -й строки и j -го столбца; $\omega(t)$ — определитель Вандермонда для корней μ_1, \dots, μ_m .

Аналогичным образом для $M_{n+m,n+j}(s, \varepsilon)$ получаем представление

$$M_{n+m,n+j}(s, \varepsilon) = (-1)^{2n+m+j} \frac{\varepsilon^{n+m-1} \pi(s) \bar{W}(s)}{\varepsilon^\lambda} \left(\frac{\omega_{mj}(s)}{u_{n+j}(s) \mu_j^n(s)} + O(\varepsilon) \right), \quad j = \overline{1, m}, \tag{18}$$

где $\omega_{mj}(s)$ — определитель $(m-1)$ -го порядка, полученный из определителя Вандермонда $\omega(s)$ вычеркиванием m -й строки и j -го столбца.

С учетом (6), (7), (15), (17), (18), а также формулы $A_n(s) = (-1)^m \prod_{k=1}^m \mu_k(s)$ разложение (16) примет вид

$$\rho^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^m \pi(s)}{\varepsilon^\lambda} \left(\frac{\bar{W}_t^{(q)}(t, s) \omega(s)}{A_n(s)} + \frac{\varepsilon^{n-1}}{\varepsilon^q} \omega^{(q)}(t, s, \varepsilon) \bar{W}(s) + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^n}{\varepsilon^q} \bar{W}(s) \omega^{(q)}(t, s, \varepsilon)\right) \right), \tag{19}$$

где $\omega^{(q)}(t, s, \varepsilon)$ — определитель m -го порядка, который получается из определителя $\omega(s)$ заменой m -й строки на строку (13).

Теперь, используя представление (19) и формулы (8), (14), из (13) при достаточно малых ε получаем искомую оценку (12).

Лемма доказана.

Определение 2. Функции $\Phi_k(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1, n+m}$, называются граничными функциями краевой задачи (1), (2), если они удовлетворяют однородному уравнению (5) и краевым условиям

$$\begin{aligned}
\Phi_k^{(j-1)}(0, \varepsilon) &= 1 \quad \text{при } k = j, \quad j = \overline{1, l}, \\
\Phi_k^{(j-1)}(0, \varepsilon) &= 0 \quad \text{при } k \neq j, \quad j = \overline{1, l}, \quad k = \overline{1, n+m}, \\
\Phi_k^{(j-1)}(1, \varepsilon) &= 1 \quad \text{при } k = l+j, \quad j = \overline{1, p}, \\
\Phi_k^{(j-1)}(1, \varepsilon) &= 0 \quad \text{при } k \neq l+j, \quad j = \overline{1, p}, \quad k = \overline{1, n+m}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Рассмотрим определитель $J(\varepsilon) = \det \|\delta_{ij}\|$, $i, j = \overline{1, n+m}$, где элементы

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= y_j^{(i-1)}(0, \varepsilon), \quad j = \overline{1, n+m}, \quad i = \overline{1, l}, \\
\delta_{ij} &= y_j^{(i-l-1)}(1, \varepsilon), \quad j = \overline{1, n+m}, \quad i = \overline{l+1, l+p},
\end{aligned}$$

в силу (6) и (7) представимы в виде

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= u_{j0}^{(i-1)}(0) + O(\varepsilon), \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, l}, \\
\delta_{l+i, j} &= u_{j0}^{(i-1)}(1) + O(\varepsilon), \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, p},
\end{aligned} \tag{21}$$

$$\delta_{i, n+j} = \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^{i-1}} \left(u_{n+j, 0}(0) \mu_j^{i-1}(0) + O(\varepsilon) \right), \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, l},$$

$$\delta_{l+i, n+j} = \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^{i-1}} \left(u_{n+j, 0}(1) \mu_j^{i-1}(1) + O(\varepsilon) \right) \exp \left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \mu_j(x) dx \right) = o(\varepsilon^N), \quad j = \overline{1, m}, \quad i = \overline{1, p}.$$

Здесь N — любое натуральное число.

Теперь с учетом (21) будем раскладывать $J(\varepsilon)$ по всем возможным минорам первых n столбцов. Все эти миноры имеют нулевой порядок по ε . Тогда в сумме произведений всех этих миноров на их алгебраические дополнения доминирующим членом $J(\varepsilon)$ будет то произведение, в котором алгебраическое дополнение имеет наименьший порядок по ε . Алгебраическое дополнение минора $J_0(\varepsilon)$ порядка n , расположенного в первых n столбцах и строках с номерами $1 \leq k \leq n_1$, $l+1 \leq k \leq l+n_2$, имеет наименьший порядок по ε , так как в силу (6), (7) порядок элементов определителя $J(\varepsilon)$, занимающих строки с первой по l -ю и столбцы с $(n+1)$ -го по $(n+m)$ -й, убывает по мере роста номера строки. Следовательно, доминирующий член определителя $J(\varepsilon)$ получается умножением минора $J_0(\varepsilon)$ на его алгебраическое дополнение $D(\varepsilon)$, и поэтому определитель $J(\varepsilon)$ в первом приближении равен произведению определителей $J_0(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$:

$$J(\varepsilon) = J_0(\varepsilon) D(\varepsilon) + O \left(\frac{1}{\varepsilon^{\lambda_1-1}} \right).$$

Здесь $\lambda_1 = \frac{m(m-1)}{2}$, определители $D(\varepsilon)$ и $J_0(\varepsilon)$ при достаточно малых ε имеют вид

$$J_0(\varepsilon) = \bar{J}_0 + O(\varepsilon), \quad D(\varepsilon) = (-1)^{mm_2} \frac{1}{\varepsilon^{\lambda_1}} (\pi(0)\omega(0) + O(\varepsilon)), \quad (22)$$

где $\bar{J}_0 \neq 0$, $\pi(0) = \prod_{s=1}^m u_{n+s}(0)\mu_s^{n_1}(0)$ и $\omega(0) = \omega(\mu_1(0), \dots, \mu_m(0))$ отличны от нуля. Тогда для определителя $J(\varepsilon)$ с учетом (22) при достаточно малых ε на отрезке $0 \leq t \leq 1$ имеет место представление

$$J(\varepsilon) = (-1)^{mm_2} \frac{\bar{J}_0}{\varepsilon^{\lambda_1}} \pi(0)\omega(0)(1 + O(\varepsilon)) \neq 0. \quad (23)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия 1^0-4^0 . Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+t}$, на отрезке $[0, 1]$ существуют, единственны и выражаются формулой

$$\Phi_i(t, \varepsilon) = J_i(t, \varepsilon)/J(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n+t}, \quad (24)$$

где $J_i(t, \varepsilon)$ — определитель, полученный из $J(\varepsilon)$ заменой i -й строки фундаментальной системой решений $y_k(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1, n+t}$, уравнения (5).

Отметим, что функция Коши $K(t, s, \varepsilon)$ и граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+t}$, не зависят от выбора фундаментальной системы решений уравнения (5).

Лемма 3. Если выполнены условия 1^0-4^0 , то граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n+t}$, на отрезке $0 \leq t \leq 1$ имеют асимптотические при $\varepsilon \rightarrow 0$ представления

$$\Phi_i^{(q)}(t, \varepsilon) = \frac{\bar{J}_i^{(q)}(t)}{\bar{J}_0} - \varepsilon^{n_1-q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)} \frac{\bar{J}_i^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{n_1-q+1} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)}\right), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad (25)$$

$$\Phi_{n_1+m+i}^{(q)}(t, \varepsilon) = \frac{\bar{J}_{n_1+i}^{(q)}(t)}{\bar{J}_0} - \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)} \frac{\bar{J}_{n_1+m+i}^{(n_1)}(0)}{\bar{J}_0} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^{n_1+1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)}\right), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad (26)$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(q)}(t, \varepsilon) = \varepsilon^i \left(\frac{\bar{J}_{n_1}^{(q)}(t)}{\bar{J}_0} \frac{\omega_i}{\omega(0)} - \frac{\varepsilon^{n_1-1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_i^{(q)}(t)}{\omega(0)} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_i^{(q)}(t)}{\omega(0)}\right) \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad (27)$$

$$q = \overline{0, n+t-1},$$

где $\bar{J}_k^{(q)}(t)$ — определитель n -го порядка, полученный из \bar{J}_0 заменой k -й строки на строку $u_{10}^{(q)}(t), u_{20}^{(q)}(t), \dots, u_{n0}^{(q)}(t)$; ω_i — определитель m -го порядка, получаемый из определителя Вандермонда $\omega(0)$ заменой i -й строки на строку $\mu_1^{-1}(0), \dots, \mu_m^{-1}(0)$; $\omega_i^{(q)}(t)$ — определитель m -го порядка, который получается из определителя $\omega(0)$ заменой i -й строки на строку

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_1(x) dx\right) \frac{u_{n+1}(t)\mu_1^q(t)}{u_{n+1}(0)\mu_1^n(0)}, \dots, \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_0^t \mu_m(x) dx\right) \frac{u_{n+m}(t)\mu_m^q(t)}{u_{n+m}(0)\mu_m^n(0)}. \quad (28)$$

Доказательство. Разложим определитель $J_i^{(q)}(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n_1}$, $q = \overline{0, n+m-1}$, по элементам i -й строки, состоящей из фундаментальной системы решений $y_k^{(q)}(t, \varepsilon)$, $k = \overline{1, n+m}$, $q = \overline{0, n+m-1}$, уравнения (5):

$$J_i^{(q)}(t, \varepsilon) = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} y_j^{(q)}(t, \varepsilon) M_{ij}(\varepsilon) + \sum_{j=1}^m (-1)^{i+n+j} y_{n+j}^{(q)}(t, \varepsilon) M_{in+j}(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (29)$$

Разложим определитель $M_{ij}(\varepsilon)$ по всем возможным минорам первых $n-1$ столбцов. При достаточно малых ε доминирующий член определителя $M_{ij}(\varepsilon)$ получается умножением минора $J_{ij}(\varepsilon)$ порядка $n-1$, расположенного в первых $n-1$ столбцах и строках с номерами $1 \leq k \leq n_1-1$, $l \leq k \leq l+n_2-1$, на его алгебраическое дополнение $D(\varepsilon)$. Тогда для определителя $M_{ij}(\varepsilon)$ в первом приближении справедливо представление

$$M_{ij}(\varepsilon) = (-1)^{mn_2} \left(J_{ij}(\varepsilon) D(\varepsilon) + O\left(\frac{1}{\varepsilon^{\lambda_1-1}}\right) \right),$$

причем минор $J_{ij}(\varepsilon)$ в силу (6), (7) при достаточно малых ε имеет вид

$$J_{ij}(\varepsilon) = \bar{J}_{ij} + O(\varepsilon). \quad (30)$$

Здесь \bar{J}_{ij} — дополнительный минор элемента $u_j^{(i-1)}(0)$ в определителе \bar{J}_0 . Тогда, используя (22), (30), определитель $M_{ij}(\varepsilon)$ при достаточно малых ε можно представить в виде

$$M_{ij}(\varepsilon) = \frac{(-1)^{mn_2}}{\varepsilon^{\lambda_1}} \pi(0) \omega(0) \bar{J}_0 \left(\frac{\bar{J}_{ij}}{\bar{J}_0} + O(\varepsilon) \right). \quad (31)$$

Аналогично тому, как была получена оценка (31) для $M_{ij}(\varepsilon)$, нетрудно показать, что

$$M_{i, n+j}(\varepsilon) = \frac{(-1)^{mn_2+n_1-i-n_2} \pi(0) \omega_{1j}(0)}{\varepsilon^{\lambda_1} u_{n+j}(0) \mu_j^{n_1}(0)} \left(\bar{J}_i^{(n_1)} + O(\varepsilon) \right), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad j = \overline{1, m}, \quad (32)$$

где $\bar{J}_i^{(n_1)}$ — определитель n -го порядка, который получается из \bar{J}_0 заменой i -й строки на строку $u_1^{(n_1)}(0), \dots, u_n^{(n_1)}(0)$; $\omega_{1j}(0)$ — определитель $(m-1)$ -го порядка, получаемый из определителя Вандермонда $\omega(0)$ вычеркиванием первой строки и j -го столбца.

Из разложения (29) с учетом (31) и (32) находим

$$J_i^{(q)}(t, \varepsilon) = \frac{(-1)^{mn_2} \bar{J}_0 \omega(0) \pi(0)}{\varepsilon^{\lambda}} \times \left(\frac{\bar{J}_i^{(q)}(t)}{\bar{J}_0} - \frac{\varepsilon^{n_1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)} \frac{\bar{J}_i^{(n_1)}}{\bar{J}_0} + O\left(\varepsilon + \frac{\varepsilon^{n_1+1}}{\varepsilon^q} \frac{\omega_1^{(q)}(t)}{\omega(0)}\right) \right), \quad i = \overline{1, n_1}. \quad (33)$$

Используя (24), (23) и (33), получаем для функции $\Phi_i^{(q)}(t, \varepsilon)$ соотношение (25).

Исследуя функции $\Phi_{n_1+m+i}^{(q)}(t, \epsilon)$, $\Phi_{n_1+i}^{(q)}(t, \epsilon)$ аналогично тому, как была получена оценка (25), для функций $\Phi_{n_1+m+i}^{(q)}(t, \epsilon)$, $\Phi_i^{(q)}(t, \epsilon)$ легко получаем оценки (26) и (27).

Лемма доказана.

4. Аналитическое представление и оценка решения. Рассмотрим сингулярно возмущенную краевую задачу (1), (2).

Теорема 3. Пусть выполняются условия 1^0-4^0 . Тогда при достаточно малых $\epsilon > 0$ решение сингулярно возмущенной краевой задачи (1), (2) на отрезке $[0, 1]$ существует, единственно и выражается формулой

$$y(t, \epsilon) = \sum_{i=1}^l \alpha_{i-1} \Phi_i(t, \epsilon) + \sum_{i=1}^p \beta_{i-1} \Phi_{l+i}(t, \epsilon) - \sum_{i=1}^p \Phi_{l+i}(t, \epsilon) \frac{1}{\epsilon^m} \int_0^1 K_t^{(j-1)}(1, s, \epsilon) h(s) ds + \frac{1}{\epsilon^m} \int_0^t K(t, s, \epsilon) h(s) ds. \tag{34}$$

Доказательство. Решение $y(t, \epsilon)$ краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y(t, \epsilon) = \sum_{i=1}^{n+m} c_i \Phi_i(t, \epsilon) + \frac{1}{\epsilon^m} \int_0^t K(t, s, \epsilon) h(s) ds, \tag{35}$$

где c_i — неизвестные постоянные. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $y(t, \epsilon)$, заданная по формуле (34), является решением уравнения (1). Для определения c_i подставим (35) в краевые условия (2). Тогда с учетом краевых условий (20) однозначно получим

$$c_i = \alpha_{i-1}, \quad i = \overline{1, l}, \quad c_{l+j} = \beta_{j-1} - \frac{1}{\epsilon^m} \int_0^1 K_t^{(j-1)}(1, s, \epsilon) h(s) ds, \quad j = \overline{1, p}.$$

Подставляя их в (35), получаем (34). Единственность решения доказывается от противного.

Теорема доказана.

Теорема 4. Пусть выполнены условия 1^0-4^0 . Тогда при достаточно малых $\epsilon > 0$ для решения $y(t, \epsilon)$ краевой задачи (1), (2) и его производных на отрезке $0 \leq t \leq 1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} |y^{(q)}(t, \epsilon)| \leq C & \left[\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i-1} + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_{i-1} + \max_{0 \leq t \leq 1} |h(t)| + \epsilon^{n-q} \max_{0 \leq t \leq 1} |h(t)| + \right. \\ & \left. + \epsilon^{n_1-q} \exp\left(-\frac{\nu t}{\epsilon}\right) \left(\sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i-1} + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_{i-1} + \max_{0 \leq t \leq 1} |h(t)| + \alpha_{n_1} \right) \right], \quad q = \overline{0, n+m-1}. \tag{36} \end{aligned}$$

Доказательство. Из формул (12), (25)–(27) в силу условий 1^0-3^0 имеем следующие оценки:

$$\left| K_i^{(q)}(t, s, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^m \left(1 + \varepsilon^{n-1-q} \exp\left(-\frac{v(t-s)}{\varepsilon}\right) \right), \quad q = \overline{0, n+m-1}, \quad (37)$$

$$\left| \Phi_i^{(q)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \left(1 + \varepsilon^{n_1-q} \exp\left(-\frac{vt}{\varepsilon}\right) \right), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad q = \overline{0, n+m-1},$$

$$\left| \Phi_{n_1+m+i}^{(q)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \left(1 + \varepsilon^{n_1-q} \exp\left(-\frac{vt}{\varepsilon}\right) \right), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad q = \overline{0, n+m-1}, \quad (38)$$

$$\left| \Phi_{n_1+i}^{(q)}(t, \varepsilon) \right| \leq C \varepsilon^i \left(1 + \varepsilon^{n_1-1-q} \exp\left(-\frac{vt}{\varepsilon}\right) \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad q = \overline{0, n+m-1}.$$

Оценивая решение (34) с учетом (37), (38), получаем оценку (36).

Теорема доказана.

Теперь определим вырожденную задачу. Без каких-либо дополнительных рассуждений мы не можем сформулировать краевые условия для невозмущенного (вырожденного) уравнения

$$L_0 \bar{y} = h(t), \quad (39)$$

получаемого из (1) при $\varepsilon = 0$. Такие дополнительные рассуждения мы можем получить из теоремы 4. Из оценки (36) при $q = 0$ следует, что предельная функция для $y(t, \varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ не будет содержать $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{l-1}$, так как коэффициенты при α_i , $i = \overline{0, n_1-1}$, и β_i , $i = \overline{0, n_2-1}$, имеют порядок $O(1)$, а при $\alpha_{n_1}, \alpha_{n_1+1}, \dots, \alpha_{l-1}$ — порядок $O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Следовательно, краевые условия для решения $\bar{y}(t)$ невозмущенного уравнения (39) определяются с помощью краевых условий (2), содержащих α_i , $i = \overline{0, n_1-1}$, и β_i , $i = \overline{0, n_2-1}$:

$$\left. \frac{d^i \bar{y}}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n_1-1, \quad \left. \frac{d^i \bar{y}}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i, \quad i = 0, 1, \dots, n_2-1, \quad (40)$$

где $n_1 = l - m$, $n_2 = n - n_1 = p$. Ниже покажем, что уравнение (39) и краевые условия (40) действительно определяют вырожденную задачу.

По аналогии с (11), (24) для задачи (39), (40) введем функцию Коши и граничные функции

$$\bar{K}(t, s) = \frac{\bar{W}(t, s)}{\bar{W}(s)}, \quad \bar{\Phi}_k(t) = \frac{\bar{J}_k(t)}{\bar{J}_0}, \quad k = 1, \dots, n, \quad (41)$$

где определители \bar{J}_0 , $\bar{W}(t)$, $\bar{W}(t, s)$ введены в пункте 1, $\bar{J}_k(t)$ — определитель из леммы 3 при $q = 0$.

Очевидно, что $\bar{K}(t, s)$ — функция Коши: $L_0 \bar{K}(t, s) = 0$ при $0 \leq t, s \leq 1$, $\bar{K}^{(j)}(s, s) = 0$, $j = \overline{0, n-2}$, $\bar{K}^{(n-1)}(s, s) = 1$, а $\bar{\Phi}_k(t)$, $k = \overline{1, n}$, — граничные функции краевой задачи (39), (40):

$$L_0 \bar{\Phi}_k(t) = 0, \quad \Phi_k^{(j)}(0) = 1 \quad \text{при} \quad j = k - 1, \quad \Phi_k^{(j)}(0) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k - 1, \quad k = \overline{1, n_1},$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(j)}(1) = 1 \quad \text{при} \quad j = i - 1, \quad \Phi_{n_1+i}^{(j)}(1) = 0 \quad \text{при} \quad j \neq i - 1, \quad i = \overline{1, n_2}.$$

Теорема 5. Пусть выполнены условия $1^0 - 4^0$. Тогда краевая задача (39), (40) на отрезке $0 \leq t \leq 1$ имеет единственное решение

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_{i-1} \bar{\Phi}_i(t) + \sum_{i=1}^{n_2} \beta_{i-1} \bar{\Phi}_{n_1+i}(t) - \sum_{i=1}^{n_2} \bar{\Phi}_{n_1+i}(t) \int_0^1 \frac{\bar{K}_t^{(i-1)}(1, s)}{A_n(s)} h(s) ds + \int_0^t \frac{\bar{K}(t, s)}{A_n(s)} h(s) ds. \tag{42}$$

Доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 3.

Заметим, что условие 5^0 в силу (41), (42) примет вид $\Lambda_0 = \alpha_{n_1} - \bar{y}^{(n_1)}(0) \neq 0$.

Теорема 6. Пусть выполнены условия $1^0 - 4^0$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$|y^{(q)}(t, \varepsilon) - \bar{y}^{(q)}(t)| \leq C \left(\varepsilon + \varepsilon^{n_1-q} \exp\left(-\frac{\nu t}{\varepsilon}\right) + \varepsilon^{n_1+1-q} \right), \quad 0 \leq t \leq 1. \tag{43}$$

Доказательство. Пусть $y(t, \varepsilon) - \bar{y}(t) = u(t, \varepsilon)$. Тогда из (1), (2) относительно $u(t, \varepsilon)$ получаем задачу

$$L_\varepsilon u = f(t, \varepsilon), \quad f(t, \varepsilon) = O(\varepsilon), \quad 0 \leq t \leq 1, \tag{44}$$

$$\left. \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{t=0} = 0, \quad i = \overline{0, n_1 - 1}, \quad \left. \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{t=1} = 0, \quad i = \overline{0, p - 1},$$

$$\left. \frac{d^i u}{dt^i} \right|_{t=0} = \alpha_i - \bar{y}^{(i)}, \quad i = \overline{n_1, l - 1}.$$

Применяя теорему 4 к краевой задаче (44), получаем искомые оценки (43).

Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы 6 непосредственно следует, что решение $y(t, \varepsilon)$ сингулярно возмущенной задачи (1), (2) при стремлении малого параметра ε к нулю стремится к решению $\bar{y}(t)$ вырожденной задачи (39), (40):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(q)}(t, \varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(t), \quad 0 \leq t \leq 1, \quad q = 0, 1, \dots, n_1 - 1, \tag{45}$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(q)}(t, \varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(t), \quad 0 < t \leq 1, \quad q = n_1, \dots, n_1 + n_2. \tag{46}$$

Заметим, что предельные переходы (46) не являются равномерными в окрестности точки $t = 0$.

5. Определение начального скачка решения. В силу теоремы 6 и предельных равенств (45), (46) имеем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(q)}(0, \varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(0), \quad q = \overline{0, n_1 - 1}, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} y^{(n_1)}(0, \varepsilon) = \bar{y}^{(n_1)}(0) + \Lambda, \quad (47)$$

$$y^{(n_1+j)}(0, \varepsilon) = O(\varepsilon^{-j}), \quad j = \overline{1, n_2 + m - 1},$$

где Λ — некоторая величина, $y(t, \varepsilon)$ — решение задачи (1), (2), $\bar{y}(t)$ — решение вырожденной задачи (39), (40). В этом случае будем говорить, что задача (1), (2) имеет начальный скачок n_1 -го порядка в точке $t = 0$ (Λ является величиной начального скачка решения задачи (1), (2)).

Определим Λ — величину скачка. Из формул (12), (25)–(27) с учетом формулы (41) и условий 1^0 – 4^0 находим следующие асимптотические представления:

$$K_i^{(j)}(1, s, \varepsilon) = \varepsilon^m \left(\frac{\bar{K}^{(j)}(1, s)}{A_n(s)} + O(\varepsilon) \right), \quad j = \overline{0, n_2 - 1}, \quad (48)$$

$$\Phi_i^{(n_1)}(0, \varepsilon) = \bar{\Phi}_i^{(n_1)}(0) - \frac{\omega_1^{(n_1)}(t)}{\omega(0)} \bar{\Phi}_i^{(n_1)}(0) + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n_1},$$

$$\Phi_{n_1+m+i}^{(n_1)}(t, \varepsilon) = \bar{\Phi}_{n_1+i}^{(n_1)}(0) - \frac{\omega_1^{(n_1)}(0)}{\omega(0)} \bar{\Phi}_{n_1+m+i}^{(n_1)}(0) + O(\varepsilon), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad (49)$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(n_1)}(0, \varepsilon) = \varepsilon^{i-1} \left(\frac{\omega_i^{(n_1)}(0)}{\omega(0)} + O(\varepsilon) \right), \quad i = \overline{1, m}.$$

Теперь из (34) в силу (48), (49) получаем

$$y^{(n_1)}(0, \varepsilon) = \bar{y}^{(n_1)}(0) - \frac{\omega_1^{(n_1)}(0)}{\omega(0)} \left[\bar{y}^{(n_1)}(0) - \alpha_{n_1} \right] + O(\varepsilon). \quad (50)$$

Если выполнены условия 1^0 – 4^0 , то из (53) находим формулу начального скачка

$$\Lambda = \frac{\omega_1^{(n_1)}(0)}{\omega(0)} \left(\alpha_{n_1} - \bar{y}^{(n_1)}(0) \right). \quad (51)$$

Выясним характер роста производных $n_1 + j$ порядков решения задачи (1), (2), в окрестности точки $t = 0$. Из (25)–(27) находим

$$\Phi_i^{(n_1+j)}(0, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^j} \frac{\omega_1^{(n_1+j)}(0)}{\omega(0)} \left(\bar{\Phi}_i^{(n_1)}(0) + O(\varepsilon) \right), \quad i = \overline{1, n_1}, \quad j = \overline{1, m + n_2 - 1},$$

$$\Phi_{n_1+m+i}^{(n_1+j)}(0, \varepsilon) = -\frac{1}{\varepsilon^j} \frac{\omega_1^{(n_1+j)}(0)}{\omega(0)} \left(\bar{\Phi}_{n_1+i}^{(n_1)}(0) + O(\varepsilon) \right), \quad i = \overline{1, n_2}, \quad j = \overline{1, m + n_2 - 1}, \quad (52)$$

$$\Phi_{n_1+i}^{(n_1+j)}(0, \varepsilon) = \frac{\varepsilon^{i-1}}{\varepsilon^j} \left(\frac{\omega_i^{(n_1+j)}(0)}{\omega(0)} + O(\varepsilon) \right), \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, m + n_2 - 1}.$$

Подставляя (48), (52) в формулу (34), находим более точную оценку для $y^{(n_1+j)}(0, \varepsilon)$, чем (47):

$$y^{(n_1+1)}(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon}\right), y^{(n_1+2)}(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\right), \dots, y^{(n+m-1)}(0, \varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^{n_2+m-1}}\right).$$

Исходя из (51) и характера роста производных, заключаем, что сингулярно возмущенная краевая задача в окрестности точки $t = 0$ имеет начальный скачок n_1 -го порядка, что является одной из особенностей изучаемой задачи.

Замечание. Установленный рост производных позволяет свести краевую задачу (1), (2) к задаче Коши с начальным скачком, что в свою очередь служит основой для построения асимптотических разложений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач с начальными скачками.

1. Тихонов А. Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра // Мат. сб. – 1948. – 22 (64), № 2. – С. 193 – 204.
2. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – 12, № 5. – С. 3 – 122.
3. Васильева А. Б. Асимптотика решений некоторых краевых задач для квазилинейных уравнений с малым параметром при старшей производной // Докл. АН СССР. – 1958. – 123, № 4. – С. 583 – 586.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 503 с.
5. Мищенко Е. Ф., Розов Н. Х. Дифференциальные уравнения с малым параметром и релаксационные колебания. – М.: Наука, 1979. – 154 с.
6. Иманалиев М. И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро-дифференциальных систем // Исследования по интегро-дифференциальным уравнениям. – Фрунзе: Илим, 1962. – Т. 2. – С. 21 – 39.
7. Ломов С. А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 399 с.
8. Бутузов В. Ф. Угловой погранслоем в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений второго порядка // Докл. АН СССР. – 1977. – 235, № 5. – С. 997 – 1000.
9. Вишик М. И., Люстерник Л. А. О начальном скачке для нелинейных дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Докл. АН СССР. – 1960. – 132, № 6. – С. 1242 – 1245.
10. Касымов К. А., Нургабыл Д. Н. Асимптотическое поведение решений линейных сингулярно возмущенных общих разделенных краевых задач, имеющих начальный скачок // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 11. – С. 1496 – 1508.
11. Касымов К. А., Нургабыл Д. Н. Асимптотические оценки решения сингулярно возмущенной краевой задачи с начальным скачком для линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 2004. – 40, № 4. – С. 597 – 607.

Получено 08.07.12