УДК 517.5

В. С. Романюк (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КОНСТРУКТИВНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КЛАССОВ ГЕЛЬДЕРА И m-ЧЛЕННЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПО КРАТНОМУ БАЗИСУ ХААРА

In terms of the best polynomial approximations in the multiple Haar basis, we obtain a constructive characteristic of Hölder classes H_p^α of functions defined on the unit cube $\mathbb{I}^d$ in the space $\mathbb{R}^d$ under the restriction $0 < \alpha < \dfrac{1}{p} \le 1$. In addition, we solve the problem of order estimates of the best m-term approximations in the Haar basis of classes H_p^α in the Lebesque spaces $L_q(\mathbb{I}^d)$.

У термінах найкращих поліноміальних наближень за кратним базисом Хаара отримано конструктивну характеристику класів Гельдера H_p^α функцій, визначених на одиничному кубі $\mathbb{I}^d$ простору $\mathbb{R}^d$, при обмеженні $0 < \alpha < \dfrac{1}{p} \le 1$. Розв'язано також задачу про порядкові оцінки найкращих m-членних наближень за базисом Хаара класів H_p^α у просторах Лебега $L_q(\mathbb{I}^d)$.

Всюду в работе используются стандартные обозначения $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}_+$ соответственно для множеств натуральных, вещественных, вещественных неотрицательных, целых и целых неотрицательных чисел.

Через $A^d = \prod_{i=1}^d A$, $d \in \mathbb{N}$, обозначено декартово произведение d множеств A, где A — одно из множеств $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$ или отрезок $[a,b] \subset \mathbb{R}$, а через $\bigotimes_{i=1}^d \mathfrak{M}(i)$ — тензорное произведение некоторых множеств $\mathfrak{M}(i)$, $i = \overline{1,d}$, в частности функциональных; $\sharp A$ обозначает количество точек конечного множества $A \subset \mathbb{Z}^d$, а $\operatorname{card} A$ — количество элементов некоторого конечного множества A.

Для выражений a и b, определяемых некоторой совокупностью параметров, запись $a \asymp b$ означает, что существуют положительные величины c_1 и c_2, не зависящие от одного существенного параметра, такие, что $c_1 b \le a \le c_2 b$. Если только $a \le c_2 b$ $(c_1 b \le a)$, то пишем $a \ll b$ $(a \gg b)$. В большинстве случаев в отношениях $a \asymp b$ существенным является один из числовых параметров n, k, N и т. п. В некоторых ситуациях, с целью исключения недоразумений, параметр, от которого не зависят величины c_1 и c_2, будем указывать явно, например $a \overset{f}{\asymp} b$.

Через $C(p)$, $C_1(d,p)$ обозначены величины, зависящие, возможно, только от указанных в скобках параметров и положительные при всех допустимых значениях этих параметров, а через C, C_1, C_2 и т. п. — абсолютные положительные постоянные, необязательно одинаковые в разных местах текста.

Через $L_q(\mathbb{I}^d)$, $1 \le q < \infty$, обозначено банахово пространство функций $\varphi\colon \mathbb{I}^d \to \mathbb{R}$ $(\mathbb{I} := := [0,1])$, измеримых и суммируемых в степени q на $\mathbb{I}^d$, с нормой

$$\|\varphi\|_q := \left(\int\limits_{\mathbb{I}^d} |\varphi(x)|^q dx \right)^{1/q},$$

где $x = (x_1, \ldots, x_d)$ — элемент евклидового пространства $\mathbb{R}^d$. $L_\infty(\mathbb{I}^d)$ — пространство функций φ, измеримых и существенно ограниченных на $\mathbb{I}^d$, с нормой

$$\|\varphi\|_\infty := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \mathbb{I}^d} |\varphi(x)|.$$

В дальнейшем иногда вместо $L_q(\mathbb{I}^d)$ будем писать L_q.

Пусть $1 \le p < \infty$. Определим p-интегральный модуль непрерывности функции $f \in L_p$:

$$\omega(f,t)_p := \sup_{0 \le \tau_i \le t < 1} \left(\int\limits_{I_\tau^d} |f(x+\tau) - f(x)|^p dx \right)^{1/p},$$

где $\tau = (\tau_1, \ldots, \tau_d) \in \mathbb{R}_+^d$, $I_\tau^d := \prod\limits_{i=1}^{d} [0, 1-\tau_i]$.

Положим также

$$\omega(f,t)_\infty := \sup_{0 \le \tau_i \le t < 1} \operatorname{ess\,sup}_{x \in \mathbb{I}_\tau^d} |f(x+\tau) - f(x)|$$

для $f \in L_\infty$.

Определение базисной системы Хаара функций многих переменных дадим с помощью двух различных способов индексации ее элементов, отправляясь от известной системы Хаара функций одной переменной. Информацию о базисе Хаара (одномерном) и его основных свойствах можно найти в книге [1], а также в статьях [2, 3].

Обратим внимание на то, что приведенное ниже исходное определение функций Хаара несколько отличается от оригинального (см. [4]) и от принятого в [1] как нумерацией этих функций, так и их значениями в конечном числе точек отрезка $[0,1]$. Однако последнее обстоятельство никак не отражается на изучаемых в работе свойствах базисных систем H_0^d, $\mathbb{H}_0^d$ и базиса H^d в пространстве $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$ (но существенно при выявлении свойств в пространстве непрерывных на $\mathbb{I}^d$ функций).

Обозначим через D_j, $j = 0, 1, \ldots$, множество двоичных интервалов j-го уровня отрезка $\mathbb{I}$:

$$D_0 = \{I_0^0\} = \{\mathbb{I}\},$$

$$D_j = \left\{I_j^s, s = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1\right\}, \qquad j = 1, 2, \ldots,$$

где $I_j^s = [s2^{-j+1}, (s+1)2^{-j+1})$, $s = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1$.

Определим функции Хаара:

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{I_0^0}(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{I},$$

и для $j = 1, 2, \ldots$, $s = 0, 1, \ldots, 2^{j-1} - 1$

$$\widetilde{\mathrm{H}}_{I_j^s}(t) = \begin{cases} 1, & t \in I_{j+1}^{2s} := \left[s2^{-j+1}, \left(s + \dfrac{1}{2}\right) 2^{-j+1}\right), \\ -1, & t \in I_{j+1}^{2s+1} := \left[\left(s + \dfrac{1}{2}\right) 2^{-j+1}, (s+1)2^{-j+1}\right), \\ 0, & t \in \mathbb{I} \setminus I_j^s. \end{cases}$$

Нормируем ортогональную систему $\{\widetilde{\mathrm{H}}_{I_j^s}\}$ в $L_2(\mathbb{I})$ и положим

$$\mathrm{H}_{I_j^s}(t) := |I_j^s|^{-1/2} \cdot \widetilde{\mathrm{H}}_{I_j^s}(t),$$

где $|I_j^s| = 2^{-j+1}$ — длина интервала I_j^s.

Система функций $\mathbb{H} = \{\mathrm{H}_{I_0^0}\} \cup \{\mathrm{H}_{I_j^s}\}_{\substack{j=1,2,\ldots \\ s=0,1,\ldots,2^{j-1}-1}}$ называется базисной системой Хаара.

Упорядочим систему $\mathbb{H}$ следующим образом. Положим

$$h_0(t) = 1, \qquad t \in I_0^0,$$

и для $0 \le s < 2^{j-1}$, $j = 1, 2, \ldots$,

$$h_{2^{j-1}+s}(t) = h_j^s(t) = \mathrm{H}_{I_j^s}(t).$$

Система $\mathrm{H} = (h_n)_{n=0}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $L_p(\mathbb{I})$, $1 \le p < \infty$ (см. [1]).

Базисная система $\mathbf{H}_0^d$ с индексацией кубами двоичного разбиения $\mathbb{I}^d$. Пусть теперь $d \in \mathbb{N}$ и $Q_j := \bigotimes_{i=1}^d D_j$, $j = 1, 2, \ldots$, — множество кубов I двоичного разбиения (куба $\mathbb{I}^d$) объемом $\mathrm{vol}\, I = 2^{(-j+1)d}$, т. е.

$$Q_j = \left\{ I_j^{\bar{l}} = \prod_{i=1}^d I_j^{l_i} : \bar{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}_+^d,\ 0 \le l_i < 2^{j-1},\ i = \overline{1, d} \right\}.$$

Обозначим через $Q := \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ множество всех кубов двоичного разбиения куба $\mathbb{I}^d$. Пусть далее $\chi_A(t)$ — характеристическая функция множества $A \subset \mathbb{R}^d$. Тогда полагаем

$$\mathrm{H}_0^d := \{\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}\} \cup \{\mathrm{H}_I\}_{I \in Q},$$

где функция

$$\mathrm{H}_{\mathbb{I}^d}(x) = \chi_{\mathbb{I}^d}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^d,$$

и если $j \in \mathbb{N}$ фиксировано и $I \in Q_j$ (т. е. $I = \prod_{i=1}^d I_j^{s_i}$), то

$$\mathrm{H}_I(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i \in E} \mathrm{H}_{I_j^{s_i}}(x_i) \times \prod_{i \in \mathbb{T} \setminus E} |I_j^{s_i}|^{-1/2} \chi_{I_j^{s_i}}(x_i). \tag{1}$$

Здесь E — произвольное непустое подмножество множества $\mathbb{T} := \{1, 2, \ldots, d\}$, в том числе $E = \mathbb{T}$.

Заметим, что совокупностью всех подмножеств E с заданным числом $\mathrm{card}\, E$ формулой (1) определяется $2^d - 1$ функция с носителями на фиксированном кубе $I \in Q_j$, а значит, на каждом кубе $I_j^{\bar{l}} := \prod_{i=1}^d I_j^{l_i}$, $\bar{l} = (l_1, \ldots, l_d)$, $0 \le l_i < 2^{j-1}$, $i = \overline{1, d}$.

Векторная индексация функций базисной системы $\mathbf{H}_0^d$. Положим

$$Y_{0,d} = \{\bar{0}\} = \{(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{d \text{ компонент}})\}$$

и

$$Y_{j,d} = \{\bar{k} = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}_+^d : 0 \le k_i < 2^j, i = \overline{1, d}\}, \qquad j = 1, 2, \ldots .$$

Обозначим $Z_{0,d} := Y_{0,d}$, $Z_{j,d} := Y_{j,d} \setminus Y_{j-1,d}$, $j = 1, 2, \ldots$. Понятно, что $\mathbb{Z}_+^d = \bigcup_{j=0}^{\infty} Z_{j,d}$. Отметим, что $\sharp Y_{j,d} = 2^{jd}$ и $\sharp Z_{j,d} = (2^d - 1) \cdot 2^{(j-1)d}$, т. е. $\sharp Z_{j,d} \asymp 2^{jd}$.

Исходя из одномерного базиса Хаара H, определим для $d \geq 2$ систему функций с d переменными

$$\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d} := \bigcup_{j=0}^{\infty} \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_{j,d}},$$

положив

$$h_{\overline{0}} = \bigotimes_{i=1}^{d} h_0,$$

и для $\overline{k} \in Z_{j,d}$, $j = 2, 3, \ldots$,

$$h_{\overline{k}} = \bigotimes_{i \in E} h_{k_i} \otimes \bigotimes_{i \in \mathbb{T} \setminus E} |h_{2^{j-1}+k_i}|,$$

где $E = \{i \in \mathbb{T} : 2^{j-1} \leq k_i < 2^j\}$.

Понятно, что $\mathbb{H}_0^d \equiv \mathrm{H}_0^d$, т. е. множества $\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_+^d}$ и H_0^d совпадают.

Как было отмечено, для каждого $j = 1, 2, \ldots$ и $\overline{l} = (l_1, \ldots, l_d) \in \mathbb{Z}_+^d$, $0 \leq l_i < 2^{j-1}$, $i = \overline{1, d}$, на двоичном кубе $I_j^{\overline{l}} = \prod_{i=1}^{d} I_j^{l_i} \in Q_j$ сосредоточены носители ровно $2^d - 1$ функции из множества $\{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_+^d}$ и между индексацией двоичными кубами из Q_j функций множества H_0^d и индексацией векторами из $Z_{j,d}$ функций множества $\mathbb{H}_0^d$ устанавливается взаимно однозначное соответствие, при этом $\{h_I\}_{I \in Q_j} = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_{j,d}}$.

Базис Хаара – Шаудера H^d в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p < \infty$. Упорядочим векторы $\overline{k} = (k_1, \ldots, k_d)$ множества $\mathbb{Z}_+^d$, расположив их в виде последовательности $\overline{k}^{(1)}, \overline{k}^{(2)}, \ldots, \overline{k}^{(m)}, \ldots$ так, что $\overline{k}^{(1)} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{Z}_+^d$ и для любого $i = 2, 3, \ldots$

$$\max\{\overline{k}_j^{(i)} : 1 \leq j \leq d\} \leq \max\left\{\overline{k}_j^{(i+1)} : 1 \leq j \leq d\right\}.$$

В [5] показано, что ортонормированная система $\mathrm{H}^d = (h_{\overline{k}^{(i)}})_{i=1}^{\infty}$ или система $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$ (если положить $h_i = h_{\overline{k}^{(i)}}$) является базисом Хаара – Шаудера в $L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \leq p < \infty$, и для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ при $1 \leq p \leq \infty$ справедливо следующее разложение Фурье – Хаара, сходящееся в пространстве $L_p(\mathbb{I}^d)$:

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} R_j f(x), \tag{2}$$

где R_j, $j = 0, 1, \ldots,$ — операторы, определенные на L_1 соотношением

$$R_j f(x) = \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} (f, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(x),$$

$(f, h_{\overline{k}}) := \int_{\mathbb{I}^d} f(x) h_{\overline{k}}(x) dx$ — коэффициенты Фурье функции f по системе $\mathbb{H}_0^d$. Таким образом, R_j — ортопроектор пространства L_1 на

$$W_j := \operatorname{span}\left\{h_{\overline{k}}, \overline{k} \in Z_{j,d}\right\} = \left\{u\colon\ u = \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}}, c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}\right\}.$$

Разложение (2) и свойства системы $\mathbb{H}_0^d$ (или H_0^d) являются ключевыми при получении оценок приближения функций $f \in L_p$ конечномерными подпространствами, порожденными элементами базиса H^d, а также при оценке гладкостных характеристик этих функций. Так, в [5] (лемма 3.2) доказано, что для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d),\ 1 \le p \le \infty$, и $n \in \mathbb{N}$ выполняются неравенства

$$\|P_n f\|_p \le C_1(d,p)\|f\|_p \tag{3}$$

и

$$\|f - P_n f\|_p \le C_2(d,p)\omega(f; 2^{-n})_p, \tag{4}$$

где $P_n : L_p \to V_n$ — оператор ортогонального проектирования пространства $L_p(\mathbb{I}^d)$ на подпространство

$$V_n := \operatorname{span}\left\{h_{\overline{k}},\ \overline{k} \in Y_{n,d}\right\} = \left\{u\colon u = \sum_{\overline{k} \in Y_{n,d}} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}}, c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}\right\},$$

т. е.

$$P_n f(x) = \sum_{\overline{k} \in Y_{n,d}} (f, h_{\overline{k}}) h_{\overline{k}}(x),\ f \in L_p(\mathbb{I}^d). \tag{5}$$

Кроме того, установлено, что если $f \in V_n$, то для любого $\delta,\ 0 < \delta \le 1$,

$$\omega(f,\delta)_p \le C(d,p)(\min\{\delta\, 2^n; 1\})^{1/p}\|f\|_p. \tag{6}$$

Важно отметить, что разложение (2), а также соотношения (3), (4) и (6) справедливы и в пространстве $C(\mathbb{I}^d)$ непрерывных на $\mathbb{I}^d$ функций с нормой $\|\cdot\|_\infty$, если положить $\omega(f,\delta)_\infty = \omega(f,\delta) := \sup_{x,y\in\mathbb{I}^d, |x-y|\le\delta} |f(x) - f(y)|,\ 0 < \delta \le 1$, и подкорректировать определение базисных функций Хаара соответственно их определению в [4].

1. Конструктивная характеристика классов Гельдера. В дополнение к (6) докажем сначала утверждение об оценке сверху модуля непрерывности $\omega(f;\cdot)_p$ произвольной функции $f \in L_p$ через ее наилучшие приближения линейной оболочкой конечного числа фиксированных функций базиса H^d. С этой целью введем дополнительные обозначения и определения, а также сформулируем и докажем одно простое, но важное, вспомогательное утверждение.

Обозначим через $E_{V_n}(f, \mathbb{H}_0^d, L_p)$ наилучшее приближение функции f элементами подпространства V_n:

$$E_{V_n}(f, \mathbb{H}_0^d, L_p) := \inf_{c_{\overline{k}} \in \mathbb{R}} \left\| f - \sum_{\overline{k} \in Y_{n,d}} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \right\|_p.$$

Отметим, что $\dim V_n = \sharp Y_{n,d} = 2^{nd}$, и в дальнейшем будем использовать сокращенное обозначение $E_{V_n}(f)_p$ для $E_{V_n}(f, \mathbb{H}_0^d, L_p)$.

Следующее утверждение в случае $d = 1$ доказано в [2].

Лемма 1. *Для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ при $1 \le p \le \infty$ справедливо соотношение*

$$E_{V_n}(f)_p \asymp \|f - P_n\, f\|_p. \tag{7}$$

Доказательство. Неравенство $\ll$ в соотношении (7) тривиально, а для доказательства неравенства $\gg$ достаточно воспользоваться соотношением (3). В самом деле, обозначив через $P_n^*\, f \in V_n$ полином наилучшего приближения функции f (подпространством V_n) в пространстве $L_p(\mathbb{I}^d)$, получим

$$\|f - P_n\, f\|_p \le \|f - P_n(P_n^*\, f) + P_n(P_n^*\, f) - P_n\, f\|_p \le$$

$$\le \|f - P_n^*\|_p + \|P_n(P_n^*\, f) - P_n\, f\|_p \le (1 + C_1(d,p))E_{V_n}(f)_p.$$

Отметим, что существование полинома $P_n^*\, f$ гарантируется конечномерностью подпространства V_n (см., например, [6, с. 12]).

Теорема 1. *Пусть $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$\omega(f, 2^{-n})_p \le C_p^{(1)}\, 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n} 2^{k/p}\, E_{V_k}(f)_p, \tag{8}$$

где $C_p^{(1)} > 0$ — величина, зависящая только от p.

***Замечание* 1.** В случае $d = 1$ неравенство (8), а также следствие из него (неравенство (11)) доказаны Б. И. Голубовым [3] с указанием наименьших, в определенном смысле, величин $C_p^{(1)}$ и $C_p^{(2)}$. Кроме того, в [3] отслежена история установления неравенств типа (8) и (11) для системы Хаара.

***Доказательство теоремы* 1.** Неравенство (8) фактически установлено в [5] в процессе доказательства теоремы 4.1. Воспроизведем его доказательство здесь.

Итак, для $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ и $n \in \mathbb{N}$, исходя из равенства $f = f - P_n\, f + \sum_{k=0}^{n} R_k\, f$, согласно (6) и с учетом неравенства $\omega(f,\delta)_p \le 2\|f\|_p$, $0 < \delta \le 1$, получаем

$$\omega(f, 2^{-n})_p \le \omega(f - P_n\, f, 2^{-n})_p + \sum_{k=0}^{n} \omega(R_k\, f, 2^{-n})_p \le$$

$$\le 2\left(\|f - P_n\, f\|_p + 2^{-n/p} \sum_{k=1}^{n} 2^{k/p} \|R_k\, f\|_p\right). \tag{9}$$

При этом учтено, что $\omega(R_0\, f, 2^{-n}) = 0$.

Обозначим $d_n(f)_p := \|f - P_n\, f\|_p$. Тогда, поскольку $R_k\, f = (f - P_{k-1}\, f) - (f - P_k\, f)$, $k \in \mathbb{N}$, и $\|R_k\, f\|_p \le d_{k-1}(f)_p + d_k(f)_p$, следствием неравенства (9) является неравенство

$$\omega(f, 2^{-n}) \le C_p^{(0)}\, 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n} 2^{k/p} d_k(f), \tag{10}$$

где $C_p^{(0)} > 0$ — величина, зависящая от p, которую, впрочем, можно ограничить сверху абсолютной постоянной.

Наконец, применяя к (10) лемму 1, получаем неравенство (8).

Приведем простое следствие теоремы 1. Обозначим через $E_n^*(f)_p$ величину наилучшего приближения функции $f \in L_p$ линейной оболочкой n первых функций базиса $\mathrm{H}^d = (h_i)_{i=1}^{\infty}$:

$$E_n^*(f)_p := \inf_{c_k \in \mathbb{R}} \|f - \sum_{k=1}^{n} c_k\, h_k\|_p.$$

***Следствие* 1.** *Пусть $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p < \infty$. Тогда для любого $N \in \mathbb{N}$*

$$\omega\left(f, \frac{1}{N}\right)_p \le C_p^{(2)}\, N^{-1/p} \sum_{k=1}^{N} k^{1/p-1} E_{k^d}^*(f)_p, \tag{11}$$

где $C_p^{(2)} > 0$ — величина, зависящая только от p.

Доказательство. Пусть натуральные n и N такие, что $2^n < N \le 2^{n+1}$. Тогда из неравенства (8), в силу монотонности $E_{V_m}(f)_p$ и $E_l^*(f)_p$ соответственно по параметрам m и l, получаем

$$\omega\left(f, \frac{1}{N}\right)_p \le \omega(f, 2^{-n})_p \le C_p^{(1)}\, 2^{-n/p} \sum_{m=0}^{n} 2^{m/p} E_{V_m}(f)_p \le$$

$$\le 2^{1/p} C_p^{(1)}\, 2^{-n/p} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m/p} E_{V_m}(f)_p \le 2^{\frac{2}{p}} C_p^{(1)}\, N^{-1/p} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m/p} E_{V_m}(f)_p. \tag{12}$$

С другой стороны,

$$\sum_{k=1}^{N} k^{1/p-1} E_{k^d}^*(f)_p \ge \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{j=2^m+1}^{2^{m+1}} 2^{m/p}\, 2^{-(m+1)} E_{V_m}(f)_p \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} 2^{m/p}\, E_{V_m}(f)_p. \tag{13}$$

Сопоставляя (12) и (13), приходим к неравенству (11) с $C_p^{(2)} = 2^{2/p+1}\, C_p^{(1)}$.

***Замечание* 2.** 1. В случае $d = 1$ при $p = 1$ соотношение (11) является аналогом неравенства А. Ф. Тимана и М. Ф. Тимана [7, с. 344], в котором используются наилучшие приближения периодических функций по системе $\mathfrak{T} = \{e^{i\,l\,x}\}_{l=1}^{\infty}$.

2. Неравенство

$$\omega\left(f, \frac{1}{N}\right)_p \le C\, N^{-(1/p+\varepsilon)} \sum_{k=1}^{N} k^{1/p+\varepsilon-1}\, E_{k^d}^*(f)_p$$

при $\varepsilon > 0$ не может выполняться ни при какой постоянной $C > 0$, не зависящей от n, а при $\varepsilon < 0$ оно является более грубым, чем при $\varepsilon = 0$ (обоснование см. в [3, с. 265] для случая $d = 1$).

Использование изложенных выше результатов позволяет дать конструктивную характеристику классов Гельдера H_p^α для параметров α, $0 < \alpha \le 1$, и p, $1 \le p \le \infty$. Определим множества

$$H_p^\alpha(M) = \mathrm{Lip}(\alpha, p, M) := \{f \in L_p \colon \omega(f,t)_p \le M t^\alpha\}, \qquad M > 0,$$

и

$$H_p^\alpha = \mathrm{Lip}(\alpha, p) := \bigcup_{M>0} H_p^\alpha(M).$$

Линейное пространство H_p^α снабдим нормой $\|\cdot\|_{H_p^\alpha}$:

$$\|f\|_{H_p^\alpha} = \|f\|_p + \sup_{t>0} t^{-\alpha}\omega(f,t)_p.$$

Заметим, что $|f|_{H_p^\alpha} := \sup_{t>0} t^{-\alpha}\omega(f,t)_p$ — полунорма на H_p^α. Пространство H_p^α с конечной нормой $\|\cdot\|_{H_p^\alpha}$ банахово при всех $1 \le p \le \infty$ и называется пространством Гельдера – Липшица (при $0 < \alpha < 1$ — пространством Гельдера).

Теорема 2. *Пусть $1 \le p < \infty$ и $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$. Для того чтобы функция f принадлежала H_p^α, необходимо и достаточно, чтобы $E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}$.*

Доказательство. *Необходимость* является непосредственным следствием соотношений (4) и (8).

Достаточность следует из теоремы 1. В самом деле, для $n \in \mathbb{N}$ при $2^{-(n+1)} < \delta \le 2^{-n}$ и $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$ имеем

$$\omega(f,\delta)_p \le \omega(f,\, 2^{-n})_p \le C_p^{(1)}\, 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n} 2^{k/p} E_{V_k}(f)_p \le$$

$$\le C_1\, 2^{-n/p} \sum_{k=0}^{n} 2^{k/p}\, 2^{-k\alpha} \le C_2\, 2^{-n\alpha} \le C_3\, \delta^\alpha,$$

т. е. f принадлежит H_p^α.

2. Наилучшие m-членные приближения классов SH_p^α по базису Хаара. Обозначим через SH_p^α единичный шар в пространстве H_p^α, т. е. $SH_p^\alpha := \{f \in H_p^\alpha \colon \|f\|_{H_p^\alpha} \le 1\}$. Из теоремы 2 следует, что при $0 < \alpha < \dfrac{1}{p} \le 1$

$$\sup_{f \in SH_p^\alpha} E_{V_n}(f)_p \ll 2^{-n\alpha}. \tag{14}$$

В этом пункте будет показано (как следствие из общего результата), что оценка в правой части (14) неулучшаема по порядку, даже если в качестве приближающих агрегатов вместо линейного пространства V_n использовать множество всевозможных линейных комбинаций любых m элементов системы H_0^d (или, что то же самое, базиса H^d) с $m = \dim V_n = 2^{nd}$, адаптируя выбор этих m элементов наилучшим образом к каждой функции $f \in SH_p^\alpha$.

Сначала сформулируем и докажем утверждение (см. далее теорему 3) о характеризации классов $H_p^\alpha(M)$ в терминах коэффициентов в разложениях их элементов по базису Хаара (или системе H_0^d). Оно базируется на следующей лемме, доказанной в [5].

Лемма 2. *Для любой системы действительных чисел* $\{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in Z_{j,d}}$, $j=1,2,\ldots$, *имеют место соотношения*

$$\Bigg\|\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}}\Bigg\|_p \asymp 2^{-j(d/p-d/2)}\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|a_{\overline{k}}|^p\right)^{1/p}, \qquad 1\le p<\infty,$$

и

$$\Bigg\|\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}}\Bigg\|_\infty = 2^{j\,d}\max_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|a_k|.$$

Теорема 3. *Если* $f\in H_p^\alpha(M)$, $0<\alpha\le 1$, $1\le p<\infty$, $M>0$, *то существует постоянная* $C>0$, *не зависящая от* f, *такая, что для любого* $j=1,2,\ldots$

$$\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|(f,h_{\overline{k}})|^p\right)^{1/p}\le C\,2^{-j(\alpha+d/2-d/p)}. \tag{15}$$

Обратно, если при $1\le p<\infty$ *и* $0<\alpha<\dfrac{1}{p}$ *для всех* $j=1,2,\ldots$ *выполняется неравенство* (15) *с некоторой постоянной* C, *то* $f\in H_p^\alpha(M)$.

Доказательство. Заметим вначале, что условие $f\in H_p^\alpha(M)$ равносильно тому, что существует постоянная $M_1>0$, не зависящая от f, такая, что

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}2^{k\,\alpha}\omega(f,2^{-k})_p\le M_1. \tag{16}$$

В самом деле, положим $a(t):=t^{-\alpha}\,\omega(f,t)_p$. Поскольку для $\omega(f,t)_p$ выполняется неравенство $\omega(f,\lambda\,t)_p\le(\lambda+1)\omega(f,t)_p$, $\lambda>0$, и $\omega(f,t)_p$ не убывает на $[0,\infty)$, то для любого p, $1\le p<\infty$, и $t\in[2^{-k-1},2^{-k}]$, $k\in\mathbb{Z}_+$,

$$\frac{1}{2}a(2^{-k})\le a(t)\le 2^\alpha\,a(2^{-k}).$$

Поэтому

$$M\ge\sup_{t>0}t^{-\alpha}\omega(f,t)_p\asymp\sup_{k\in\mathbb{Z}_+}2^{k\,\alpha}\omega(f,2^{-k})_p. \tag{17}$$

Докажем первую часть теоремы 3.

Пусть $f\in H_p^\alpha(M)$. Тогда, согласно (16), $\omega(f,2^{-k})_p\ll 2^{-k\,\alpha}$, а значит, используя лемму 2, неравенство (4) и временно полагая $b_{\overline{k}}(f):=(f,h_{\overline{k}})$, получаем

$$\left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}|b_{\overline{k}}(f)|^p\right)^{1/p}\ll 2^{j(d/p-d/2)}\Bigg\|\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}}b_{\overline{k}}(f)h_{\overline{k}}\Bigg\|_p\ll$$

$$\ll 2^{-j(d/2-d/p)}(\|f-P_jf\|_p+\|f-P_{j-1}f\|_p)\ll$$

$$\ll 2^{-j(d/2-d/p)}\omega(f,2^{-j})_p\ll 2^{-j(\alpha+d/2-d/p)},\qquad j=1,2,\ldots. \tag{18}$$

Обратно, в силу теоремы 1 для любой функции $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$ и $l \in \mathbb{Z}_+$ имеем

$$\omega(f, 2^{-l})_p \ll 2^{-l/p} \sum_{k=0}^{l} 2^{k/p} \|f - P_k\, f\|_p. \tag{19}$$

Но если выполняется (15) при $1 \le p < \infty$, то, используя лемму 2, можем записать

$$\|f - P_k\, f\|_p \le \sum_{j=k+1}^{\infty} \left\| \sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} b_{\overline{k}}(f)\, h_{\overline{k}} \right\|_p \ll$$

$$\ll \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j(d/p-d/2)} \left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |b_{\overline{k}}(f)|^p \right)^{1/p} \ll \sum_{j=k+1}^{\infty} 2^{-j\,\alpha} \ll 2^{-k\,\alpha}, \tag{20}$$

а значит, при $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$ из (19) получаем $\omega(f, 2^{-l})_p \le C_0 2^{-l\,\alpha} \quad \forall l \in \mathbb{Z}_+$, т. е. согласно отмеченному выше (см. соотношение (16)) заключаем, что $f \in H_p^\alpha$.

Теорема 3 доказана.

Приведем еще утверждение об эквивалентном (в смысле отношения $\asymp$) представлении полунормы $|\cdot|_{H_p^\alpha}$ для функций из H_p^α. Фактически оно содержится в теореме 3.

Теорема 4. *Пусть* $1 \le p < \infty$ *и* $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$. *Тогда для любой функции* $f \in H_p^\alpha,\ f \ne \mathrm{const}$,

$$|f|_{H_p^\alpha} \overset{f}{\asymp} \sup_j 2^{j(\alpha+d/2-d/p)} \left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |(f, h_{\overline{k}}|^p \right)^{1/p}.$$

Доказательство. Если $f \in H_p^\alpha$, то (см. соотношение (18))

$$2^{j(d/2-d/p)} \left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |(f, h_{\overline{k}}|^p \right)^{1/p} \ll \omega(f, 2^{-j})_p,$$

а это неравенство, в совокупности с соотношением (17) и определением $|f|_{H_p^\alpha}$, равносильно неравенству

$$\sup_j 2^{j(\alpha+d/2-d/p)} \left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |(f, h_{\overline{k}}|^p \right)^{1/p} \ll |f|_{H_p^\alpha}.$$

С другой стороны, в доказательстве второй части теоремы 3 установлено (см. (19), (20)), что если

$$\sup_j 2^{j(\alpha+d/2-d/p)} \left(\sum_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |(f, h_{\overline{k}}|^p \right)^{1/p} := C_f \le C,$$

где C — некоторая абсолютная постоянная, то $f \in H_p^\alpha(M)$ с $M = \gamma\, C,\ \gamma > 0$. Из этого следует неравенство

$$|f|_{H_p^\alpha} \ll \sup_j 2^{j(\alpha+d/2-d/p)} \left(\sum_{\overline{k}\in Z_{j,d}} |(f,h_{\overline{k}}|^p \right)^{1/p}.$$

Теорема 4 доказана.

Перейдем к рассмотрению m-членных приближений.

Для $f \in L_p(\mathbb{I}^d)$, $1 \le p \le \infty$, определим величину $\sigma_m(f,\mathbb{H}_0^d,L_p)$ (сокращенно $\sigma_m(f)_p$) наилучшего m-членного, $m\in\mathbb{N}$, приближения функции f по системе Хаара $\mathbb{H}_0^d = \{h_{\overline{k}}\}_{\overline{k}\in\mathbb{Z}_+^d}$:

$$\sigma_m(f)_p = \sigma_m(f,\,\mathbb{H}_0^d,\,L_p) = \inf_{\substack{\Lambda\in\mathbb{Z}_+^d\\ \sharp\Lambda=m}} \inf_{c_{\overline{k}}\in\mathbb{R}} \left\| f - \sum_{\overline{k}\in\Lambda} c_{\overline{k}} h_{\overline{k}} \right\|_p$$

и положим

$$\sigma_m(F)_p := \sup_{f\in F} \sigma_m(f)_p, \;\; F\subset L_p.$$

Наряду с $\sigma_m(f)_p$ будем рассматривать величину

$$g_m(f)_p = g_m(f,\mathbb{H}_0^d,\,L_p) := \inf_{\substack{\Lambda_f^{\max}\subset\mathbb{Z}_+^d\\ \sharp\Lambda_f^{\max}=m}} \left\| f - \sum_{\overline{k}\in\Lambda_f^{\max}} (f,\,h_{\overline{k}})h_{\overline{k}} \right\|_p,$$

где множество $\Lambda_f^{\max}\subset\mathbb{Z}_+^d$ зависит от функции f и определяется так, что $\sharp\Lambda_f^{\max} = m$ и

$$\min\left\{ \left\|(f,\,h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}\right\|_p,\, \overline{k}\in\Lambda_f^{\max} \right\} \ge \max\left\{ \left\|(f,\,h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}\right\|_p,\, \overline{k}\in\mathbb{Z}_+^d\setminus\Lambda_f^{\max} \right\}.$$

Положим также

$$g_m(F)_p := \sup_{f\in F} g_m(f)_p, \;\; F\subset L_p.$$

Агрегаты

$$G_m^p(f;\,\mathbb{H}_0^d)(x) := \sum_{\overline{k}\in\Lambda_f^{\max}} (f,\,h_{\overline{k}})h_{\overline{k}}(x), \;\; x\in\mathbb{I}^d,$$

участвующие в определении $g_m(f)_p$, называются p-жадными аппроксимантами для f.

В [5] показано, что при $1<p<\infty$ для любой функции $f\in L_p$ справедливо соотношение

$$\sigma_m(f)_p \asymp g_m(f)_p. \tag{21}$$

Теперь изложим основной результат этого пункта — об оценке величин $\sigma_m(SH_p^\alpha)_q$. Предварительно обозначим через $\mathcal{D}$ область допустимых значений параметров $d,\,p,q$ и α:

$$\mathcal{D} = \left\{ (d,p,q,\alpha)\colon\; d\in\mathbb{N},\; 1\le p<\infty,\; 1<q\le\infty,\; \left(\frac{d}{p}-\frac{d}{q}\right)_+ < \alpha < \frac{1}{p} \right\}.$$

Здесь $a_+ = \max(a,0)$ для $a\in\mathbb{R}$.

Теорема 5. *Пусть* (d, p, q, α) *принадлежит* $\mathcal{D}$. *Тогда*

$$\sigma_m(SH_p^\alpha)_q \asymp g_m(SH_p^\alpha)_q \asymp m^{-\alpha/d}.$$

Доказательство фактически повторяет доказательство теоремы 6.2 из [5] об оценке величин $\sigma_m(SB_{p,\theta}^\alpha)_q$ и $g_m(SB_{p,\theta}^\alpha)_q$, где $SB_{p,\theta}^\alpha$ — единичный шар в пространстве Бесова $B_{p,\theta}^\alpha$ (определение см. в [5]).

Очевидной коррекции подлежат лишь те части, в которых используется соотношение (I) из доказательства теоремы 6.2. Этим соотношением утверждается, что если φ принадлежит W_j, $j = 0, 1, \ldots$, т. е. $\varphi(t) = \sum_{\overline{k} \in \mathbb{Z}_{j,d}} a_{\overline{k}} h_{\overline{k}}(t)$, $a_{\overline{k}} \in \mathbb{R}$, и, к тому же, $\varphi \in B_{p,\theta}^\alpha$, $1 \le p,\ \theta < \infty$, $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$, то

$$\|\varphi\|_{p,\theta}^{(\alpha)} \asymp 2^{j(\alpha - d/p + d/2)} \|a\|_{l_p^{m_j}},$$

$a = \{a_{\overline{k}}\}_{\overline{k} \in Z_{j,d}}$, $\|a\|_{l_p^{m_j}} := \left(\sum\limits_{\overline{k} \in Z_{j,d}} |a_{\overline{k}}|^p \right)^{1/p}$, $m_j := \sharp Z_{j,d}$ и $\|\cdot\|_{p,\theta}^{(\alpha)}$ — норма в пространстве $B_{p,\theta}^\alpha$.

В случае, когда φ принадлежит $H_p^\alpha(M)$, $1 \le p < \infty$, $0 < \alpha < \dfrac{1}{p}$ (и $\varphi \in W_j$), в силу теоремы 4

$$\|\varphi\|_{H_p^\alpha} \asymp 2^{j(\alpha - d/p + d/2)} \|a\|_{l_p^{m_j}}. \tag{22}$$

Соотношение (22) играет существенную роль при оценке сверху величин $\sigma_m(SH_p^\alpha)_q$.

Оценка снизу для $g_m(SH_p^\alpha)_q$, а в силу соотношения (21) и для $\sigma_m(SH_p^\alpha)_q$, является непосредственным следствием такой оценки для $g_m(SB_{p,\theta}^\alpha)_q$, установленной в [5], если учесть, что $SB_{p,\theta}^\alpha \subset SH_p^\alpha$ при любом $1 \le \theta < \infty$. Последнее вложение — результат сопоставления выражений через коэффициенты Фурье – Хаара в соотношениях для полунорм $|f|_{p,\theta}^{(\alpha)}$ и $|f|_{H_p^\alpha}$, $f \in SB_{p,\theta}^\alpha$ (см. теорему 4.1 в [5] и теорему 4).

1. *Кашин Б. С., Саакян А. А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука, 1984. – 495 с.
2. *Ульянов П. Л.* О рядах по системе Хаара // Мат. сб. – 1964. – **63**, № 3. – С. 357 – 391.
3. *Голубов Б. И.* Наилучшие приближения функций в метрике L_q полиномами Хаара и Уолша // Мат. сб. – 1972. – **87**, № 2. – С.254 – 274.
4. *Haar A.* Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme // Math. Ann. – 1910. – **69**. – S. 331 – 371.
5. *Романюк В. С.* Базисная система Хаара функций многих переменных и ее аппроксимационные свойства на классах Бесова и их аналогах. – Киев, 2012. – 44 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2012.2).
6. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
7. *Тиман А. Ф.* Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.

Получено 14.06.13