

О. В. Моторная (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко),

В. П. Моторный (Днепропетр. нац. ун-т)

ОБОБЩЕННЫЕ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА И СХОДИМОСТЬ РЯДОВ ФУРЬЕ – ЯКОБИ В ПРОСТРАНСТВАХ $L_{1,A,B}$

Generalized Lebesgue constants for the Fourier – Jacobi sums and the convergence of Fourier – Jacobi series in the $L_{1,A,B}$ spaces are investigated.

Досліджуються узагальнені константи Лебега для сум Фур'є – Якобі і збіжність рядів Фур'є – Якобі у просторах $L_{1,A,B}$.

Приведем определения и результаты, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ — многочлены Якоби, ортогональные на сегменте $[-1; 1]$ с весом $p(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, и нормированные условием $P_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \binom{n+\alpha}{n}$; $L_{p,A,B}$ — пространство измеримых на сегменте $[-1; 1]$ функций, интегрируемых с весом $w(x) = (1-x)^A(1+x)^B$, $A, B > -1$; $\|f\|_{p,A,B} = \|fw^{1/p}\|_p = \left\{ \int_{-1}^1 |f(x)|^p w(x) dx \right\}^{1/p}$ — норма функции $f(x)$ в пространстве $L_{p,A,B}$.

Частную сумму порядка n ряда Фурье – Якоби функции $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ будем обозначать через $S_n^{(\alpha,\beta)}(f)$. Частные суммы $S_n^{(\alpha,\beta)}(f)$ можно рассматривать как оператор, действующий в некотором подпространстве X пространства $L_{p,A,B}$. Норма этого оператора $\|S_n^{(\alpha,\beta)}\|_X = \sup_{\|f\|_X \leq 1} \|S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\|_X$ называется константой Лебега. В работе [1] найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы нормы $\|S_n^{(\alpha,\beta)}\|_{p,A,B}$ были ограничены, если $p > 1$.

Для многочленов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ имеют место [2] равенство

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = (-1)^n P_n^{(\beta,\alpha)}(-x) \quad (1)$$

и оценка

$$\left| P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \right| \leq Cn^{-1/2} (1-x+n^{-2})^{-\alpha/2-1/4}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (2)$$

Частную сумму $S_n^{(\alpha,\beta)}(f)$ ряда Фурье – Якоби запишем в виде

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(f; x) = \int_{-1}^1 K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y) f(y) (1-y)^\alpha (1+y)^\beta dy,$$

где ядро $K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)$ можно представить в виде

$$K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y) = \sum_{k=0}^n h_k P_k^{(\alpha,\beta)}(x) P_k^{(\alpha,\beta)}(y) = \quad (3)$$

$$= \lambda_n \frac{P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha,\beta)}(y) - P_n^{(\alpha,\beta)}(x) P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y)}{x - y} = \quad (4)$$

$$= \frac{\eta_n^{(\alpha,\beta)} (P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) P_n^{(\alpha+1,\beta)}(y) (1-y) - P_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(y) P_n^{(\alpha+1,\beta)}(x) (1-x))}{x - y}. \quad (5)$$

Здесь $h_k = 2^{-\alpha-\beta} k + O(1)$, $\lambda_n = 2^{-\alpha-\beta-1} n + O(1)$, $\eta_n^{(\alpha,\beta)} = O(n)$.

Функцией Лебега называется функция $L_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sup_{\|f\|_\infty \leq 1} S_n^{(\alpha,\beta)}(f; x)$:

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \int_{-1}^1 |K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)| (1-y)^\alpha (1+y)^\beta dy.$$

Асимптотически точные оценки функций Лебега получены в [3, 4].

Пусть $\sigma(n, \theta, \delta, x) = (\sqrt{1-x} + 1/n)^\theta (\sqrt{1+x} + 1/n)^\delta$, $\theta \geq 0$, $\delta \geq 0$. Величины

$$D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{\|f/\sigma(n,\theta,\delta)\|_{p,A,B} \leq 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{p,A,B}$$

называются обобщенными константами Лебега сумм Фурье – Якоби. Они совпадают с классическими константами Лебега, если $\theta = \delta = 0$. Впервые, в случае $p > 1$, обобщенные константы Лебега для сумм Фурье – Лежандра рассматривались в работах [5, 6], а для сумм Фурье – Якоби константы $D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B}$ исследовались в [7 – 11]. Уклонения частных сумм Фурье – Якоби на некоторых классах функций можно оценивать по следующей схеме. Поскольку $S_n^{(\alpha,\beta)}(P_n; x) = P_n(x)$ для любого многочлена $P_n(x)$ степени не выше n , то

$$\begin{aligned} \|f - S_n^{(\alpha,\beta)}(f)\|_{p,A,B} &\leq \|f - P_n(x)\|_{p,A,B} + \|S_n^{(\alpha,\beta)}(f - P_n)\|_{p,A,B} \leq \\ &\leq \|f(x) - P_n(x)\|_{p,A,B} + D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} \left\| \frac{f - P_n}{\sigma(n, \theta, \delta)} \right\|_{p,A,B}. \end{aligned} \quad (6)$$

Таким образом, задача сводится к тому, что необходимо выбрать многочлен $P_n(x)$,

минимизирующий правую часть. В настоящей работе получена оценка обобщенных констант $D_{n,p,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B}$ для $p = 1$.

Теорема 1. *Имеет место равенство*

$$D_{n,1,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} = \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} \int_{-1}^1 |K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)| w(y) dy,$$

где $\alpha \geq A$, $\beta \geq B$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} D_{n,1,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} &= \sup_{\|f/\sigma(n,\theta,\delta)\|_{1,A,B} \leq 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)\|_{1,A,B} = \\ &= \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1 \leq 1} \|S_n^{\alpha,\beta}(f)w\|_1 = \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1 \leq 1} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_{-1}^1 S_n^{\alpha,\beta}(f, y)w(y)g(y)dy = \\ &= \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1 \leq 1} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x)K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y) p(x) dx w(y) g(y) dy = \\ &= \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1 \leq 1} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{g(y)w(y)}{p(y)} K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y) p(y) dy p(x)f(x) dx. \end{aligned}$$

Обозначая частное $\frac{g(y)w(y)}{p(y)}$ через $G(y)$, получаем

$$\begin{aligned} D_{n,1,\theta,\delta}^{\alpha,\beta,A,B} &= \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1 \leq 1} \sup_{\|g\|_\infty \leq 1} \int_{-1}^1 S_n^{\alpha,\beta}(G, x)f(x)p(x)dx = \\ &= \sup_{\|Gp/w\|_\infty \leq 1} \sup_{\|fw/\sigma(n,\theta,\delta)\|_1 \leq 1} \int_{-1}^1 S_n^{\alpha,\beta}(G, x) \frac{f(x)w(x)}{\sigma(n, \theta, \delta, x)} \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} dx = \\ &= \sup_{\|Gp/w\|_\infty \leq 1} \sup_{-1 \leq x \leq 1} S_n^{\alpha,\beta}(G, x) \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} = \\ &= \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} \sup_{\|Gp/w\|_\infty \leq 1} S_n^{\alpha,\beta}(G, x) = \\ &= \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} \sup_{\|Gp/w\|_\infty \leq 1} \int_{-1}^1 G(y)K_n^{(\alpha,\beta)}(x, y)p(y)dy = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} \sup_{\|Gp/w\|_{\infty} \leq 1} \int_{-1}^1 \frac{G(y)p(y)}{w(y)} K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)w(y)dy = \\
&= \sup_{-1 \leq x \leq 1} \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} \int_{-1}^1 \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \right| w(y) dy.
\end{aligned}$$

Теорема доказана.

Пусть $\mu = -\alpha + 2A + 1/2 \geq 0$, $\nu = -\beta + 2B + 1/2 \geq 0$.

Теорема 2. Если $\theta \geq \mu$, $\delta \geq \nu$, то

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} \int_{-1}^1 \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \right| w(y) dy \leq C_{\theta, \delta} \ln n.$$

Доказательство. Благодаря равенству (1) достаточно рассмотреть случай $x \in (0, 1)$.

Интеграл $\int_{-1}^1 \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \right| w(y) dy$ представим в виде суммы четырех интегралов:

$$\left(\int_{-1}^{-1/2} + \int_{-1/2}^{x-1/n^2} + \int_{x-1/n^2}^{x+1/n^2} + \int_{x+1/n^2}^1 \right) \left| K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \right| w(y) dy = J_1 + J_2 + J_3 + J_4.$$

Оценим каждый из них. В силу представления (4), неравенства $(x-y)^{-1} < 2$ и оценки (2) для $x \in (0, 1)$ и $y \in (-1, -1/2)$ получаем

$$\left| K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y) \right| \leq C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} (1+y+1/n^2)^{-\beta/2-1/4}.$$

Следовательно,

$$J_1 < C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} \int_{-1}^{-1/2} (1+y+1/n^2)^{-\beta/2-1/4} (1+y)^B dy.$$

Поскольку $-\beta/2 - 1/4 + B = \nu/2 - 1/2 \geq -1/2$, интеграл справа существует и ограничен. В то же время

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} \leq C(1-x+1/n^2)^{\alpha-A} (1-x+1/n^2)^{\theta/2}.$$

Поэтому

* Через $C_{\theta, \delta}$, $C_{r, \gamma}$, C_r обозначены величины, зависящие от указанных параметров, а через C , L — абсолютные константы. Эти величины различны в разных формулах.

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} J_1 \leq C(1-x+1/n^2)^{\alpha-A+\theta/2} (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} .$$

Так как показатель степени положителен

$$\alpha - A + \theta/2 - \alpha/2 - 1/4 \geq \alpha/2 - A - \alpha/2 + 1/4 + A - 1/4 = 0 ,$$

то

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} J_1 \leq C . \tag{7}$$

Представляя $K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ в виде (5) и используя оценку (2), имеем

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y} (1-y)^{-\alpha/2-3/4} (1-y)^{1+A} dy + \\ &+ C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4} (1-x) \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y} (1-y)^{-\alpha/2-1/4} (1-y)^A dy \leq \\ &\leq C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y} (1-y)^{-\alpha/2+1/4+A} dy + \\ &+ (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2+1/4} \int_{-1/2}^{x-1/n^2} \frac{1}{x-y} (1-y)^{-\alpha/2-1/4+A} dy . \end{aligned}$$

В силу условия $-\alpha/2+1/4+A \geq 0$ интеграл в первом слагаемом не превышает $2 \ln n$, а во втором $-2 \ln n$, если $-\alpha/2-1/4+A \geq 0$, и $2(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4+A} \ln n$, если $-\alpha/2-1/4+A < 0$, так как $1-y \geq 1-x+1/n^2$. Поэтому

$$\begin{aligned} J_2 &\leq C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} \ln n + \\ &+ C \begin{cases} (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2+1/4} \ln n, & \text{если } -\alpha/2-1/4+A \geq 0, \\ (1-x+1/n^2)^{-\alpha+A} \ln n, & \text{если } -\alpha/2-1/4+A < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} J_2 &\leq C(1-x+1/n^2)^{\alpha-A+\theta/2} J_2 < \\ &< C(1-x+1/n^2)^{\alpha/2-A-1/4+\theta/2} \ln n + \end{aligned}$$

$$+ \begin{cases} (1-x+1/n^2)^{\alpha/2-A+1/4+\theta/2} \ln n, & \text{если } -\alpha-1/4+A \geq 0, \\ (1-x+1/n^2)^{\theta/2} \ln n, & \text{если } -\alpha-1/4+A < 0. \end{cases}$$

В силу условий, которым удовлетворяет θ , $\alpha/2 - A - 1/4 + \theta/2 \geq 0$. Следовательно,

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} J_2 \leq C \ln n. \quad (8)$$

Прежде чем перейти к оценке оставшихся интегралов, заметим, что если $1 \geq x \geq 1 - 2/n^2$, то

$$J_3 + J_4 \leq \int_{1-3/n^2}^1 |K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)| w(y) dy = J_0.$$

Оценим интеграл J_0 . Для этого воспользуемся представлением (3) для ядра $K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ и неравенством (2):

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)| &\leq Cn^{\alpha+3/2} (1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}, \\ J_0 &\leq Cn^{\alpha+3/2} \int_{1-3/n^2}^1 (1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} (1-y)^A dy \leq \\ &\leq Cn^{\alpha+3/2} \left(\frac{1}{n^2}\right)^{-\alpha/2+3/4+A} = Cn^{2\alpha-2A}. \end{aligned}$$

Поскольку для $1 > x > 1 - 2/n^2$ функция $\frac{p(x)}{w(x)} \leq Cn^{2A-2\alpha}$, то и в этом случае

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} J_0 \leq C\sigma(n, \theta, \delta, x) \leq C. \quad (9)$$

Оценим J_3 при $0 \leq x \leq 1 - 2/n^2$. Воспользуемся представлением (3) для ядра $K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ и неравенством (2):

$$\begin{aligned} |K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)| &\leq Cn(1-x)^{-\alpha/2-1/4} (1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}, \\ J_3 &\leq Cn(1-x)^{-\alpha/2-1/4} \int_{x-1/n^2}^{x+1/n^2} (1-y+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} (1-y)^A dy. \end{aligned} \quad (10)$$

Из условия $0 \leq x \leq 1 - 2/n^2$ и неравенств $x - 1/n^2 \leq y \leq x + 1/n^2$ следуют оценки

$$(1-y)^A \leq \begin{cases} (1-x+1/n^2)^A \leq 2^A(1-x)^A, & \text{если } A \geq 0, \\ (1-x-1/n^2)^A \leq 2^{-A}(1-x)^A, & \text{если } A < 0, \end{cases} \quad (11)$$

$$(1-y+1/n^2)^{-\alpha/2} \leq \begin{cases} 2^{-\alpha/2}(1-x)^{-\alpha/2}, & \text{если } \alpha \leq 0, \\ (1-x)^{-\alpha/2}, & \text{если } \alpha > 0. \end{cases} \quad (12)$$

Аналогично, так как $1-x \geq 1-y-1/n^2$, то

$$(1-x)^{-1/4} \leq (1-y-1/n^2)^{-1/4}. \quad (13)$$

Из неравенств (10) – (13) получаем

$$J_3 \leq Cn(1-x)^{-\alpha+A} \int_{x-1/n^2}^{x+1/n^2} (1-y-1/n^2)^{-1/2} dy \leq C(1-x)^{-\alpha+A}.$$

Следовательно,

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} J_3 \leq C\sigma(n, \theta, \delta, x) \leq C. \quad (14)$$

Оценим J_4 для $0 \leq x \leq 1-2/n^2$. Для этого снова воспользуемся представлением (5) для ядра $K_n^{(\alpha, \beta)}(x, y)$ и неравенством (2):

$$\begin{aligned} J_4 &\leq (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} \int_{x+1/n^2}^1 \frac{1}{y-x} (1-y)^{-\alpha/2-3/4} (1-y)^{1+A} dy + \\ &+ (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4} (1-x) \int_{x+1/n^2}^1 \frac{1}{y-x} (1-y)^{-\alpha/2-1/4} (1-y)^A dy \leq \\ &\leq (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4} \int_{x+1/n^2}^1 \frac{1}{y-x} (1-y)^{-\alpha/2+1/4+A} dy + \\ &+ (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4} (1-x) \int_{x+1/n^2}^1 \frac{1}{y-x} (1-y)^{-\alpha/2-1/4+A} dy. \end{aligned} \quad (15)$$

Поскольку $-\alpha/2 + A + 1/4 \geq 0$, то интеграл в первом слагаемом не превышает $C \ln n$.

Тогда произведение первого слагаемого на $\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)}$ меньше

$$C(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-1/4}(1-x)^{\alpha-A}(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2+1/4+A} \ln n \leq C \ln n. \quad (16)$$

Интеграл во втором слагаемом представим в виде

$$I = \int_{x+1/n^2}^1 \frac{(1-y)^{-\alpha/2-1/4+A}}{y-x} dy = \left(\int_{x+1/n^2}^{(1+x)/2} + \int_{(1+x)/2}^1 \right) \frac{(1-y)^{-\alpha/2-1/4+A}}{y-x} dy = I_1 + I_2.$$

Если $-\alpha/2-1/4+A \geq 0$, то в силу неравенства $1-y < 1-x$ интеграл I_1 не превышает

$$I_1 \leq (1-x)^{-\alpha/2-1/4+A} \int_{x+1/n^2}^{(1+x)/2} \frac{dy}{y-x} \leq C(1-x)^{-\alpha/2-1/4+A} \ln n. \quad (17)$$

В случае $-\alpha/2-1/4+A < 0$, используя неравенство $1-y > (1-x)/2$, получаем аналогичную оценку для I_1 . Интеграл I_2 оценим, воспользовавшись неравенством $y-x > (1-x)/2$:

$$I_2 \leq 2(1-x)^{-1} \int_{(1+x)/2}^1 (1-y)^{-\alpha/2-1/4+A} dy \leq C(1-x)^{-\alpha/2-1/4+A}. \quad (18)$$

Из (17), (18) получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} (1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4}(1-x)I \leq \\ & \leq C(1-x)^{\alpha-A}(1-x+1/n^2)^{-\alpha/2-3/4+\theta/2}(1-x)^{-\alpha/2+3/4+A} \ln n \leq C \ln n. \end{aligned} \quad (19)$$

Соотношения (15), (16), (18) влекут оценку

$$\frac{\sigma(n, \theta, \delta, x)p(x)}{w(x)} J_4 \leq C \ln n. \quad (20)$$

Из неравенств (7), (8), (14), (20) следует утверждение теоремы 2.

Пусть $H_1^{r+\gamma}$ — класс функций, заданных на отрезке $[-1, 1]$, r -я производная которых интегрируема и удовлетворяет условию

$$\int_{-1}^{1-h} |f^{(r)}(x+h) - f^{(r)}(x)| dx \leq Lh^\gamma, \quad 1 \geq h > 0, \quad 0 < \gamma \leq 1, \quad L > 0.$$

Теорема 3 [12]. Для любой функции $f \in H_1^{r+\gamma}$ существует последовательность алгебраических многочленов $P_n(x)$ степени не выше $n \geq 2$ таких, что

$$\left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{\left(\sqrt{1-x^2} + 1/n\right)^{r+\gamma}} \right\|_1 \leq \frac{C_r \ln n}{n^{r+\gamma}}. \tag{21}$$

Если при этом под знаком нормы заменить $r + \gamma$ на меньшее число, то в правой части неравенства (21) $\ln n$ можно опустить.

Теорема 4 [13]. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда многочлены $P_n(x)$ можно выбрать так, что в знаменателе дроби, содержащейся в левой части неравенства (21), слагаемое $1/n$ можно опустить.

Теорема 5. Пусть $\alpha = \beta$, $A = B$, $\theta = \delta \geq -\alpha + 2A + 1/2$ и $f \in H_1^{r+\gamma}$, где $r + \gamma \geq -2A$ при $A < 0$. Тогда имеют место неравенства

$$\|f - S_n^{(\alpha, \alpha)}\|_{1, A, A} \leq \begin{cases} C_{r, \gamma} \frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}, & r + \gamma > \theta - 2A, \\ C_r \frac{\ln^2 n}{n^{r+\gamma}}, & r + \gamma = \theta - 2A, \\ \frac{C_{r, \gamma} \ln^2 n}{n^{2(r+\gamma) - \theta + 2A}}, & \theta/2 - A < r + \gamma < \theta - 2A. \end{cases}$$

Доказательство. Оценим $\|f - S_n^{(\alpha, \alpha)}\|_{1, A, A}$, используя теоремы 3, 4.

Пусть $P_n(x)$ — последовательность алгебраических многочленов, для которых имеет место неравенство (20). Тогда, используя (6), получаем

$$\|f - S_n^{(\alpha, \alpha)}\|_{1, A, A} \leq \|f - P_n\|_{1, A, A} + D_{n, 1, \theta, \theta}^{\alpha, \alpha, A, A} \left\| \frac{f - P_n}{\sigma(n, \theta, \theta)} \right\|_{1, A, A}. \tag{22}$$

Если $A \geq 0$, то в силу (21)

$$\|f - P_n\|_{1, A, A} \leq \|f - P_n\|_1 \leq \frac{C_r}{n^{r+\gamma}}.$$

Благодаря условию $r + \gamma \geq -2A$ при $A < 0$ и теореме 4 имеем

$$\|f - P_n\|_{1, A, A} \leq \left\| \frac{f - P_n}{(1-x^2)^A} \right\|_1 \leq \begin{cases} C_{r, \gamma} / n^{r+\gamma}, & r + \gamma > -2A, \\ C_r \ln n / n^{r+\gamma}, & r + \gamma = -2A. \end{cases} \tag{23}$$

Оценим сначала второе слагаемое в (22) для $A \geq 0$. В силу теорем 1 – 3

$$\begin{aligned}
D_{n,1,\theta,\theta}^{\alpha,\alpha,A,A} \left\| \frac{f - P_n}{\sigma(n,\theta,\theta)} \right\|_{1,A,A} &\leq C_{\theta,\theta} \ln n \left\| \frac{(f(x) - P_n(x))(1-x^2)^A}{(\sqrt{1-x^2} + 1/n)^\theta} \right\|_1 \leq \\
&\leq C_{\theta,\theta} \ln n \left\| \frac{f(x) - P_n(x)}{(\sqrt{1-x^2} + 1/n)^{\theta-2A}} \right\|_1 \leq \begin{cases} C_{r,\gamma} \frac{\ln n}{n^{r+\gamma}}, & r + \gamma > \theta - 2A, \\ C_r \frac{\ln^2 n}{n^{r+\gamma}}, & r + \gamma = \theta - 2A, \\ \frac{C_{r,\gamma} \ln^2 n}{n^{2(r+\gamma)-\theta+2A}}, & \theta/2 - A < r + \gamma < \theta - 2A. \end{cases} \quad (24)
\end{aligned}$$

Случай $A < 0$ аналогичен, только вместо теоремы 3 необходимо применить теорему 4. Из неравенств (22) – (24) следует теорема 5.

1. *Muckehaupt B.* Mean convergence of Jacobi series // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – **23**, № 2. – P. 306–310.
2. *Sege Г.* Ортогональные ряды. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 500 с.
3. *Агаханов С. А., Натансон Г. И.* Функции Лебега сумм Фурье – Якоби // Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. мат. – 1968. – **1**, № 1. – С. 11 – 23.
4. *Бадков В. М.* Оценки функции Лебега и остатка ряда Фурье – Якоби // Сиб. мат. журн. – 1968. – **9**, № 6. – С. 1264 – 1283.
5. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Докл. АН СССР. – 1972. – **204**, № 4. – С. 788 – 790.
6. *Моторный В. П.* О сходимости в среднем рядов Фурье по многочленам Лежандра // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1973. – **37**, № 1. – С. 135 – 147.
7. *Гончаров С. В., Моторный В. П.* Оценки обобщенных констант Лебега частных сумм Фурье – Якоби // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Математика. – 2007. – Вип. 12. – С. 70 – 83.
8. *Гончаров С. В., Моторный В. П.* О сходимости рядов Фурье – Якоби в среднем // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Математика. – 2008. – Вип. 13. – С. 49 – 55.
9. *Моторная О. В., Моторный В. П.* Свойства обобщенных констант Лебега частных сумм Фурье – Якоби // Вісн. Дніпропетр. нац. ун-ту. Математика. – 2009. – Вип. 14. – С. 91 – 98.
10. *Моторный В. П., Гончаров С. В., Нитиема П. К.* О сходимости в среднем рядов Фурье – Якоби // Доп. НАН України. – 2010. – № 3. – С. 35 – 40.
11. *Моторный В. П., Гончаров С. В., Нитиема П. К.* О сходимости в среднем рядов Фурье – Якоби // Укр. мат. журн. – 2010. – **62**, № 6. – С. 814 – 828.
12. *Моторный В. П.* Приближение функций алгебраическими многочленами в метрике L_p // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1971. – **35**, № 4. – С. 874 – 899.
13. *Ходак Л. Б.* Сходимость рядов Фурье по многочленам Якоби в среднем // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1982. – № 8. – С. 28 – 31.

Получено 03.06.13