УДК 517.5

В. А. Кофанов (Днепропетр. нац. ун-т)

НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ НА ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ОСИ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ

We solve the following extremal problems: $1)\|s^{(k)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} \to \sup$ and 2) $\|s^{(k)}\|_{W_q} \to \sup$ over all shifts of splines of order r and minimal defect with knots at the points lh, $l \in \mathbf{Z}$, such that $L(s)_p \le M$ in the cases: (a) $k = 0$, $q \ge p > 0$, (b) $k = 1, \ldots, r-1$, $q \ge 1$, where $[\alpha, \beta]$ is an arbitrary interval in the real line,

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b) \right\}$$

and $\|\cdot\|_{W_q}$ is the Weyl functional, i.e.,

$$\|x\|_{W_q} := \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{a\in\mathbf{R}} \left(\frac{1}{\Delta} \int\limits_a^{a+\Delta} |x(t)|^q \, dt \right)^{1/q}.$$

As a special case, we get some generalizations of the Ligun inequality for splines.

Розв'язано наступні екстремальні задачі: $1)\|s^{(k)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} \to \sup$ і $2)\|s^{(k)}\|_{W_q} \to \sup$ на просторі всіх зсувів сплайнів порядку r мінімального дефекту з вузлами в точках lh, $l \in \mathbf{Z}$, таких, що $L(s)_p \le M$, у випадках: а) $k = 0$, $q \ge p > 0$, б) $k = 1, \ldots, r-1$, $q \ge 1$, де $[\alpha, \beta]$ — довільний відрізок дійсної осі,

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} : a, b \in \mathbf{R},\ |x(t)| > 0,\ t \in (a,b) \right\},$$

а $\|\cdot\|_{W_q}$ — функціонал Вейля, тобто

$$\|x\|_{W_q} := \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{a\in\mathbf{R}} \left(\frac{1}{\Delta} \int\limits_a^{a+\Delta} |x(t)|^q \, dt \right)^{1/q}.$$

Зокрема, отримано деякі узагальнення нерівності Лигуна для сплайнів.

1. Введение. Пусть $G = \mathbf{R}$ или $G = [\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$. Через $L_p(G)$, $0 < p \le \infty$, будем обозначать пространство всех измеримых функций $x\colon G \to \mathbf{R}$ таких, что $\|x\|_{L_p(G)} < \infty$, где

$$\|x\|_{L_p(G)} := \begin{cases} \left(\int\limits_G |x(t)|^p \, dt \right)^{1/p}, & \text{если} \quad 0 < p < \infty, \\ \operatorname{vrai\,sup}\limits_{t\in G} |x(t)|, & \text{если} \quad p = \infty. \end{cases}$$

Вместо $\|x\|_{L_\infty(\mathbf{R})}$ будем писать $\|x\|_\infty$. Символом L^r_∞, $r \in \mathbf{N}$, будем обозначать пространство всех функций $x \in L_\infty(\mathbf{R})$, имеющих локально абсолютно непрерывные производные до $(r-1)$-го порядка, причем $x^{(r)} \in L_\infty(\mathbf{R})$.

Будем говорить, что $f \in L^1_\infty$ является функцией сравнения для $x \in L^1_\infty$, если $\|x\|_\infty \le \|f\|_\infty$ и из равенства $x(\xi) = f(\eta)$, $\xi, \eta \in \mathbf{R}$, вытекает неравенство $|x'(\xi)| \le |f'(\eta)|$, если указанные производные существуют.

Нечетную 2ω-периодическую функцию $\varphi \in L^1_\infty$ назовем S-функцией, если она обладает свойствами: φ является четной относительно $\omega/2$, $|\varphi|$ — выпуклой вверх на $[0, \omega]$ и строго монотонной на $[0, \omega/2]$. Для $k = 0, 1, 2, \ldots$ и S-функции $\varphi \in L^{k+1}_\infty$ через S^k_φ обозначим класс функций $x \in L^{k+1}_\infty$ таких, что $\varphi^{(i)}$ является функцией сравнения для $x^{(i)}$, $i = 0, 1, , , , k$.

Пусть далее W — класс непрерывных, неотрицательных и выпуклых функций Φ на $[0, \infty)$ таких, что $\Phi(0) = 0$. Важнейшими примерами функций класса W являются функции $\Phi(t) = t^s$, $s \geq 1$. Для $p > 0$ положим [1]

$$L(x)_p := \sup \left\{ \|x\|_{L_p[a,b]} \colon \ a, b \in \mathbf{R}, \ |x(t)| > 0, \ t \in (a, b) \right\}. \tag{1}$$

Заметим, что $L(x)_\infty = \|x\|_\infty$.

В работе [2] для произвольного отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ решена экстремальная задача

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p) dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad p > 0, \tag{2}$$

на классе функций S_φ^0, удовлетворяющих условию $L(x)_p \leq L(\varphi)_p$, и как следствие получено решение задачи

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|) dt \to \sup, \quad \Phi \in W, \quad k = 1, 2, ..., \tag{3}$$

на классах S_φ^k. В частности, задачи (2) и (3) были решены на классах

$$\{x \in L_\infty^r \colon \|x^{(r)}\|_\infty \leq A_r, L(x)_p \leq A_0\}$$

и на ограниченных подмножествах пространств T_n (тригонометрических полиномов порядка не выше n) и $S_{n,r}$ (2π-периодических сплайнов порядка r дефекта 1 с узлами в точках $k\pi/n, k \in$ $\in \mathbf{Z}$). Отметим, что решение задачи (3) для непрерывно дифференцируемых положительных функций Φ таких, что $\Phi(t)/t$ не убывает и $\Phi(0) = 0$, было получено в работе Боянова и Найденова [3]. В качестве следствия ими была решена задача Эрдеша [4] о характеризации тригонометрического полинома с фиксированной равномерной нормой, график которого на заданном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ имеет максимальную длину.

Символом $\varphi_r(t)$, $r \in \mathbf{N}$, обозначим сдвиг r-го 2π-периодического интеграла с нулевым средним значением на периоде от функции $\varphi_0(t) = \operatorname{sgn} \sin t$ такой, что $\varphi(0) = 0$. Для $\lambda > 0$ положим $\varphi_{\lambda,r}(t) := \lambda^{-r} \varphi_r(\lambda t)$. Сплайны $\varphi_{\lambda,r}(t)$ являются важнейшими примерами S-функций.

Для $h > 0$, $r \in \mathbf{N}$, через $\sigma_{h,r}$ обозначим множество полиномиальных сплайнов $s \in L_\infty$ порядка r дефекта 1 с узлами в точках kh, $k \in \mathbf{Z}$. Таким образом, $s(x)$ на каждом из отрезков $[kh, (k+1)h]$ является алгебраическим многочленом порядка не выше r. Отметим, что $S_{n,r} \subset$ $\subset \sigma_{h,r}$ при $h = \pi/n$, $n \in \mathbf{N}$. Ясно, что для подходящего сдвига $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau)$ при $\lambda = \pi/h$ имеет место включение $\varphi_{\lambda,r}(\cdot + \tau) \in \sigma_{h,r}$.

В настоящей работе получено обобщение (теорема 1) одного неравенства Магарил-Ильяева [5] для сплайнов класса $\sigma_{h,r}$. С помощью теоремы 1 и результатов работы [2] для произвольного отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, заданных $r \in \mathbf{N}$, A, $h, p > 0$ решена экстремальная задача

$$\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|s^{(k)}(t)|^p) dt \to \sup, \quad \Phi \in W,$$

на классе сдвигов сплайнов $s \in \sigma_{h,r}$, удовлетворяющих условию

$$L(s)_p \le AL(\varphi_{\lambda,r})_p, \qquad \lambda = \pi/h, \tag{4}$$

в следующих случаях: 1) $k = 0,\ p > 0,$ 2) $k = 1, ..., r-1,\ p = 1$ (теорема 2). Как следствие решена задача (аналогичная проблеме Эрдеша) о характеризации сплайна $s \in \sigma_{h,r}$ с фиксированной равномерной нормой, график которого на заданном отрезке $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ имеет максимальную длину (следствие 2).

Известно (см., например, [6]), что для функции x такой, что $x \in L_q[a,b]$ для любых $a, b \in \mathbf{R}$, существует предел

$$\lim_{\Delta\to\infty} \sup_{a\in\mathbf{R}} \left(\frac{1}{\Delta} \int\limits_a^{a+\Delta} |x\,(t)|^q\,dt \right)^{1/q} =: \|x\|_{W_q}. \tag{5}$$

Функционал $\|x\|_{W_q}$ используется при определении почти периодических в смысле Вейля функций [7]. Отметим, что неравенства для производных в пространствах Вейля изучались в работах [8, 9]. С использованием результатов работы [9] и теоремы 1 в настоящей работе доказано точное неравенство (теорема 3)

$$\left\| s^{(k)} \right\|_{W_q} \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p} \left\{ \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} |\varphi_{r-k}(t)|^q dt \right\}^{1/q} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}, \qquad s \in \sigma_{h,r}, \tag{6}$$

и решена экстремальная задача

$$\|s^{(k)}\|_{W_q} \to \sup$$

на классе сплайнов $s \in \sigma_{h,r}$, удовлетворяющих условию (4), в случаях: 1) $k = 0,\ q \ge p > 0,$ 2) $k = 1, ..., r-1,\ q \ge 1$.

Отметим, что при $h = \pi/n,\ n \in \mathbf{N},\ k > 0,\ q < p = \infty$ неравенство (6) (для $s \in S_{n,r}$) трансформируется в известное неравенство Лигуна [10] для 2π-периодических сплайнов, а при $q = p = \infty$ оно было доказано ранее В. М. Тихомировым [11].

2. Вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $r \in \mathbf{N},\ p > 0$. *Тогда для любой функции* $x \in L^r_\infty$

$$\|x\|_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p} \right)^{\alpha} \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = r/(r+1/p)$, *а функционал* $L(x)_p$ *определен равенством* (1).

Доказательство. Зафиксируем функцию $x \in L^r_\infty$ такую, что $L(x)_p < \infty$. Положим $A_r :=$ $:= \|x^{(r)}\|_\infty$ и выберем $\lambda > 0$ так, чтобы

$$L(x)_p = A_r L(\varphi_{\lambda,r})_p. \tag{7}$$

Используя очевидное равенство $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$, из (7) имеем

$$\lambda^{-1} = \left(\frac{L(x)_p}{A_r L(\varphi_r)_p} \right)^{\frac{1}{r+1/p}}.$$

В работе [12] (следствие 1) доказано, что из условия (7) для функции $x \in L^r_\infty$ следует неравенство $\|x\|_\infty \le A_r \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty = A_r \lambda^{-r} \|\varphi_r\|_\infty$. Поэтому

$$\|x\|_\infty \le A_r \,\|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{A_r L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r}{r+1/p}} = \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha} \|x^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}.$$

Лемма 1 доказана.

Докажем теперь необходимую в дальнейшем модификацию следующего неравенства Магарил-Ильяева [5] для непериодических сплайнов:

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}, \qquad s \in \sigma_{h,r}. \tag{8}$$

Лемма 2. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, p, $h > 0$. Тогда для любого сплайна $s \in \sigma_{h,r}$*

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$. Ясно, что $s \in L^r_\infty$. Поэтому, применяя к нему неравенство (8) и оценивая далее норму $\|s\|_\infty$ с помощью леммы 1, получаем

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha} \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}, \qquad \alpha = r/(r+1/p),$$

или

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\alpha} \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha}.$$

Отсюда непосредственно следует утверждение леммы 2, если учесть, что $r/\alpha = r + 1/p$.

Ниже приведены необходимые в дальнейшем результаты работы [2].

Пусть φ — S-функция с периодом 2ω. Зафиксируем произвольный отрезок $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$ и $p > 0$. Следуя Боянову и Найденову [3], представим длину отрезка $[\alpha,\beta]$ в виде

$$\beta - \alpha = n\omega + 2\Theta, \qquad \Theta \in (0,\omega), \tag{9}$$

где $n \in \mathbf{N}$ или $n = 0$, и рассмотрим функцию $\varphi(t+\tau)$, где τ выбрано так, что

$$|\varphi(\alpha + \Theta + \tau)| = |\varphi(\beta - \Theta + \tau)| = \|\varphi\|_\infty. \tag{10}$$

Теорема А [2]. *Пусть φ — S-функция, $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$, $p > 0$, $\Phi \in W$. Тогда*

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p)dt \colon x \in S^0_\varphi,\ L(x)_p \le L(\varphi)_p\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|\varphi(t+\tau)|^p)dt,$$

где τ выбрано из условия (10).

Кроме того, если $k \in \mathbf{N}$, $\varphi \in L^{k+1}_\infty$ — S-функция, то

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \colon x \in S^k_\varphi\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|\varphi^{(k)}(t+\tau+\tau_k)|)dt,$$

где

$$\tau_k := \frac{\omega}{4}\left(1 + (-1)^{k+1}\right).$$

Для функций, имеющих нули, справедлива также следующая теорема.

Теорема В [2]. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $p > 0$, $\Phi \in W$. Если функция $x \in L_\infty^r$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ таковы, что $L(x)_p < \infty$ и $x(\alpha) = x(\beta) = 0$, то*

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x(t)|^p)dt \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Phi\left(\left|\left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}} \varphi_r(t)\right|^p\right)dt. \qquad (11)$$

Кроме того, если $k = 1, \ldots, r-1$, а функция $x \in L_\infty^r$ и отрезок $[a, b] \subset \mathbf{R}$ удовлетворяют условию $x^{(k)}(a) = x^{(k)}(b) = 0$, то

$$\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|x^{(k)}(t)|)dt \le \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Phi\left(\left(\frac{L(x)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r-k}{r+1/p}} \left\|x^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k+1/p}{r+1/p}} |\varphi_{r-k}(t)|\right)dt. \qquad (12)$$

3. Основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $r \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$, $p > 0$. Тогда для любого сплайна $s \in \sigma_{h,r}$*

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \left\|\varphi_{r-k}\right\|_\infty. \qquad (13)$$

Неравенство (13) *является точным на классе $\sigma_{h,r}$ и обращается в равенство для любого сдвига $s(\cdot+\tau)$ сплайна $s(t) = \varphi_{\lambda,r}(t)$, где $\lambda = \pi/h$.*

Доказательство. При $k = r$ теорема уже доказана (лемма 2).

Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$ и докажем (13) для остальных значений k.

Пусть сначала $k = 0$. Оценивая $\|s\|_\infty$ с помощью леммы 1, а затем $\|s^{(r)}\|_\infty$ – с помощью леммы 2, получаем

$$\|s\|_\infty \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha} \le \|\varphi_r\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \left[\left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right]^{1-\alpha},$$

где $\alpha = r/(r+1/p)$. Отсюда следует (13) при $k = 0$, если учесть, что $(1-\alpha)(r+1/p) = 1/p$.

Пусть теперь $k = 1, ..., r-1$. Применим к сплайну s неравенство Колмогорова [13]:

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty}\right)^{\frac{r-k}{r}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k}{r}}.$$

Снова оценивая $\|s\|_\infty$ с помощью леммы 1, находим

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left[\left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha}\right]^{\frac{r-k}{r}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k}{r}} =$$

$$= \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha\frac{r-k}{r}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{k}{r}+(1-\alpha)\frac{r-k}{r}}.$$

Оценивая теперь $\|s^{(r)}\|_\infty$ с помощью леммы 2 и учитывая равенство $\dfrac{k}{r} + (1-\alpha)\dfrac{r-k}{r} = 1 - \alpha\dfrac{r-k}{r}$, имеем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_\infty \le \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\alpha\frac{r-k}{r}} \left[\left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right]^{1-\alpha\frac{r-k}{r}} =$$

$$= \|\varphi_{r-k}\|_\infty \left(\frac{\pi}{h}\right)^{(r+1/p)(1-\alpha\frac{r-k}{r})} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Отсюда следует (13), если учесть, что

$$\left(r+\frac{1}{p}\right)\left(1-\alpha\frac{r-k}{r}\right) = \left(r+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{r}{r+1/p}\cdot\frac{r-k}{r}\right) =$$

$$= \left(r+\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{r-k}{r+1/p}\right) = \left(r+\frac{1}{p}\right)\frac{k+1/p}{r+1/p} = k+\frac{1}{p}.$$

Точность неравенства (13) легко проверяется с помощью равенства $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)} L(\varphi_r)_p$.

Теорема 1 доказана.

***Замечание* 1.** При $h = \pi/n$, $n \in \mathbf{N}$, $k > 0$, $p = \infty$ неравенство (13) (для $s \in S_{n,r}$) было доказано в [11].

Для $A_0, h, p > 0$ положим $\lambda = \pi/h$ и

$$\sigma_{h,r}(A_0,p) := \left\{s(\cdot+\tau)\colon s \in \sigma_{h,r},\ L(s)_p \le A_0 L(\varphi_{\lambda,r})_p,\ \tau \in \mathbf{R}\right\}. \tag{14}$$

Теорема 2. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, A_0, h, $p > 0$, $\lambda = \pi/h$, $\Phi \in W$. *Тогда для любого отрезка* $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|s(t)|^p)dt\colon s \in \sigma_{h,r}(A_0,p)\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi(|A_0\varphi_{\lambda,r}(t+\tau)|^p)dt,$$

где τ *удовлетворяет равенству* (10) *с* $\varphi = \varphi_{\lambda,r}$, *т. е.* $|\varphi_{\lambda,r}(\alpha+\theta+\tau)| = |\varphi_{\lambda,r}(\beta-\theta+\tau)| = \|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$, *а* θ *определено равенством* (9) *с* $\omega = h$, *т. е.* $\beta-\alpha = mh+2\Theta$, *где* $m \in \mathbf{N}$ *или* $m = 0$, $\Theta \in (0, h/2)$.

Кроме того, для любого $k = 1,\ldots,r-1$

$$\sup\left\{\int\limits_\alpha^\beta \Phi(|s^{(k)}(t)|)dt\colon s \in \sigma_{h,r}(A_0,p)\right\} = \int\limits_\alpha^\beta \Phi\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^k A_0|\varphi_{\lambda,r-k}(t+\tau+\tau_k)|\right)dt,$$

где $\tau_k := \dfrac{h}{4}\left(1+(-1)^{k+1}\right)$.

Доказательство. Положим $\varphi(t) := A_0\varphi_{\lambda,r}(t)$. Ясно, что φ является S-функцией с периодом $2\omega = 2\pi/\lambda = 2h$. Покажем, что для любого $k = 0,1,,...,r-1$ имеет место включение

$$\sigma_{h,r}(A_0,p) \subset S_\varphi^k. \tag{15}$$

Зафиксируем $s \in \sigma_{h,r}$. Применяя неравенство (13) при $k = 0$, получаем

$$\|s\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\ \|\varphi_r\|_\infty.$$

Из этого неравенства и условия $L(s)_p \le A_0 L(\varphi_{\lambda,r})_p = A_0\lambda^{-(r+1/p)}L(\varphi_r)_p$, вытекающего из определения (14), следует, что

$$\|s\|_\infty \le \lambda^{1/p}\,\frac{A_0\lambda^{-(r+1/p)}L(\varphi_r)_p}{L(\varphi_r)_p}\;\|\varphi_r\|_\infty = A_0\lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty = A_0\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty.$$

Отсюда в силу неравенства (8) имеем

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^r \frac{\|s\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} \le \lambda^r\,\frac{A_0\lambda^{-r}\|\varphi_r\|_\infty}{\|\varphi_r\|_\infty} = A_0.$$

Таким образом, выполнены оба условия $\|s\|_\infty \le A_0\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$ и $\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le A_0$ теоремы сравнения Колмогорова [13]. Согласно этой теореме $\varphi(t)$ является функцией сравнения для s, а $\varphi^{(k)}$ — функцией сравнения для $s^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots, r-1$. Тем самым включение (15) доказано. Теперь утверждение теоремы 2 следует из теоремы A.

Теорема 2 доказана.

Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$ в первой части теоремы и $\Phi(t) = t^q$ во второй ее части, получаем такое следствие.

***Следствие* 1.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $A_0,\ h,\ p > 0$, $\lambda = \pi/h$. *Если* $k = 0$, $q \ge p > 0$ *или* $k = 1, \ldots, r-1$, $q \ge 1$, *то для любого отрезка* $[\alpha,\beta] \subset \mathbf{R}$

$$\sup\left\{\|s^{(k)}\|_{L_q[\alpha,\beta]} \colon s \in \sigma_{h,r}(A_0,p)\right\} = A_0\left(\frac{\pi}{h}\right)^k \|\varphi_{\lambda,r-k}(\cdot+\tau+\tau_k)\|_{L_q[\alpha,\beta]},$$

где τ *и* τ_k *такие, как в теореме* 2.

Как известно, длина дуги $l[a,b]$ графика функции $x \in L^1[a,b]$ задается формулой $l[a,b] = \int_a^b \sqrt{1+x'(t)^2}\,dt$. Ясно, что для функции $\Phi_0(t) = \sqrt{1+t^2}$ имеет место включение $\Phi_0 \in W$. Поэтому, полагая во второй части теоремы 2 $\Phi = \Phi_0$, $k = 1$, $p = \infty$ и замечая, что $\tau_1 = h/2$, получаем такое следствие.

***Следствие* 2.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $A_0,\ h > 0$, $\lambda = \pi/h$, $[a,b] \subset \mathbf{R}$. *Тогда среди всех сдвигов сплайнов* $s \in \sigma_{h,r}$, *удовлетворяющих условию* $\|s\|_\infty \le A_0\|\varphi_{\lambda,r}\|_\infty$, *наибольшую длину дуги на отрезке* $[a,b]$ *имеет график сплайна* $\varphi(t) = A_0\cdot\varphi_{\lambda,r}(t+\tau+h/2)$, *где* τ *такое же, как в теореме* 2.

Теорема 3. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, $h,\ p > 0$. *Если* $k = 0$, $q \ge p > 0$ *или* $k = 1, \ldots, r-1$, $q \ge 1$, *то для любого сплайна* $s \in \sigma_{h,r}$

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{W_q} \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p}\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right\}^{1/q}\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}, \tag{16}$$

где величина $\|\cdot\|_{W_q}$ *определена равенством* (5).

Неравенство (16) *является точным на классе* $\sigma_{h,r}$ *и обращается в равенство для любого сдвига* $s(\cdot+\tau)$ *сплайна* $s(t) = \varphi_{\lambda,r}(t)$, *где* $\lambda = \pi/h$.

Кроме того, для любого $A_0 > 0$

$$\sup\left\{\|s^{(k)}\|_{W_q} \colon s \in \sigma_{h,r}(A_0,p)\right\} = A_0\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{W_q}.$$

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$. Поскольку $s \in L^r_\infty$, в силу теоремы 4 из работы [9] имеет место неравенство

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{W_q} \le \left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right\}^{1/q} \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^\alpha \|s^{(r)}\|_\infty^{1-\alpha},$$

где $\alpha = (r-k)/(r+1/p)$. Оценивая $\|s^{(r)}\|_\infty$ в этом неравенстве с помощью леммы 2, получаем (16), если учесть, что $(r+1/p)(1-\alpha) = k+1/p$.

Для доказательства точности (16) заметим, что для T-периодической функции x

$$\|x\|_{W_q} = \left(\frac{1}{T}\int\limits_0^T |x\,(t)|^q\,dt\right)^{1/q}. \tag{17}$$

Поэтому

$$\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{W_q} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\int\limits_0^{\pi/\lambda} |\varphi_{\lambda,r-k}\,(t)|^q\,dt\right)^{1/q} =$$

$$= \left(\frac{\lambda}{\pi}\cdot\lambda^{-(r-k)q-1}\int\limits_0^\pi |\varphi_{r-k}\,(t)|^q\,dt\right)^{1/q} = \lambda^{-(r-k)}\left(\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi_{r-k}\,(t)|^q\,dt\right)^{1/q}. \tag{18}$$

С помощью (18) и равенства $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)}L(\varphi_r)_p$ легко проверяется точность неравенства (16).

Для доказательства второго утверждения теоремы заметим, что в силу (16) и определения (14) для любого сплайна $s \in \sigma_{h,r}$ выполнено неравенство

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{W_q} \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right\}^{1/q}\frac{A_0 L(\varphi_{\lambda,r})_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

Учитывая снова (18) и равенство $L(\varphi_{\lambda,r})_p = \lambda^{-(r+1/p)}L(\varphi_r)_p$, имеем

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{W_q} \le \lambda^{k+1/p}\left\{\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |\varphi_{r-k}(t)|^q dt\right\}^{1/q} A_0\lambda^{-(r+1/p)} = A_0\|\varphi_{\lambda,r-k}\|_{W_q}.$$

Отсюда непосредственно следует второе утверждение теоремы 2.

Теорема 3 доказана.

Замечание 2. Пусть $h = \pi/n$, $n \in \mathbf{N}$, $k > 0$, $q < p = \infty$. Если учесть (17), то легко видеть, что неравенство (16) (для 2π-периодических сплайнов $s \in S_{n,r}$) трансформируется в неравенство Лигуна [10]

$$\left\|s^{(k)}\right\|_{L_q[0,2\pi]} \le n^k\frac{\|\varphi_{r-k}\|_{L_q[0,2\pi]}}{\|\varphi_r\|_\infty}\|s\|_\infty. \tag{19}$$

Неравенство (19) при $q = \infty$ было доказано в [11].

Теорема 4. *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, h, $p > 0$, $\Phi \in W$. *Если сплайн* $s \in \sigma_{h,r}$ *и отрезок* $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ *таковы, что* $s(\alpha) = s(\beta) = 0$, *то*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|s(t)|^p) dt \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \Phi\left(\frac{\pi}{h} \left| \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \varphi_r(t) \right|^p\right) dt.$$

Кроме того, если $k = 1, \ldots, r-1$, *а сплайн* $s \in \sigma_{h,r}$ *и отрезок* $[a,b] \subset \mathbf{R}$ *удовлетворяют условию* $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) = 0$, *то*

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|s^{(k)}(t)|) dt \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \Phi\left(\left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p} \, |\varphi_{r-k}(t)|\right) dt.$$

Доказательство. Зафиксируем сплайн $s \in \sigma_{h,r}$ и отрезок $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$, удовлетворяющие условию теоремы. Поскольку $s \in L^r_\infty$, для сплайна s выполнено неравенство (11):

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int\limits_{\alpha}^{\beta} \Phi(|s(t)|^p) dt \le \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} \Phi\left(\left| \left(\frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}\right)^{\frac{r}{r+1/p}} \left\|s^{(r)}\right\|_\infty^{\frac{1/p}{r+1/p}} \varphi_r(t) \right|^p\right) dt.$$

Отсюда, оценивая $\left\|s^{(r)}\right\|_\infty$ с помощью неравенства

$$\left\|s^{(r)}\right\|_\infty \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{r+1/p} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p},$$

получаем первое утверждение теоремы 4.

Применяя неравенство (12) вместо неравенства (11) и оценивая затем $\left\|s^{(r)}\right\|_\infty$ с помощью леммы 2, получаем второе утверждение теоремы 4.

Теорема 4 доказана.

Полагая $\Phi(t) = t^{q/p}$ в первой части теоремы и $\Phi(t) = t^q$ во второй ее части, получаем такое следствие.

***Следствие* 3.** *Пусть* $r \in \mathbf{N}$, h, $p > 0$, $\lambda = \pi/h$. *Если* $k = 0$, $q \ge p > 0$ *или* $k = 1, ..., r-1$, $q \ge 1$, *а сплайн* $s \in \sigma_{h,r}$ *и отрезок* $[a,b] \subset \mathbf{R}$ *удовлетворяют условию* $s^{(k)}(a) = s^{(k)}(b) = 0$, *то*

$$\left(\frac{1}{b-a}\right)^{1/q} \left\|s^{(k)}\right\|_{L_q[a,b]} \le \left(\frac{\pi}{h}\right)^{k+1/p} \left(\frac{1}{\pi}\right)^{1/q} \|\varphi_{r-k}\|_{L_q[0,\pi]} \frac{L(s)_p}{L(\varphi_r)_p}.$$

***Замечание* 3.** Последнее неравенство, как и неравенство (16), является обобщением неравенства (19).

1. *Pinkus A., Shisha O.* Variations on the Chebyshev and L^q theories of best approximation // J. Approxim. Theory. – 1982. – **35**, № 2. – P. 148 – 168.
2. *Кофанов В. А.* Точные верхние грани норм функций и их производных на классах функций с заданной функцией сранения // Укр. мат. журн. – 2011. – **63**, № 7. – С. 969 – 984.
3. *Bojanov B., Naidenov N.* An extension of the Landau – Kolmogorov inequality. Solution of a problem of Erdos // J. d'Anal. Math. – 1999. – **78**. – P. 263 – 280.
4. *Erdös P.* Open problems // Open Problems in Approxim. Theory / Ed. B. Bojanov. – Singapore: SCT Publ., 1994. – P. 238 – 242.

5. *Магарил-Ильяев Г. Г.* О наилучших приближениях сплайнами функциональных классов на оси // Труды Мат. ин-та РАН. – 1992. – **194**. – С. 153 – 154.
6. *Левитан Б. М.* Почти периодические функции. – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.
7. *Weyl H.* Almost periodic invariant vector sets in a metric vector spase // Amer. J. Math. – 1949. – **71**, № 1. – P. 178 – 205.
8. *Бабенко В. Ф., Селиванова С. А.* О неравенствах типа Колмогорова для периодических и непериодических функций // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Дніпропетровськ: Дніпропетр. нац. ун-т, 1998. – С. 91 – 95.
9. *Kofanov V. A.* Some extremal problems various metrics and sharp inequalities of Nagy – Kolmogorov type // East. J. Approxim. – 2010. – **16**, № 4. – P. 313 – 334.
10. *Лигун А. А.* Точные неравенства для сплайн-функций и наилучшие квадратурные формулы для некоторых классов функций // Мат. заметки. – 1976. – **19**, № 6. – С. 913 – 926.
11. *Тихомиров В. М.* Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Успехи мат. наук. – 1960. – **15**, № 3. – С. 81 – 120.
12. *Кофанов В. А.* О некоторых экстремальных задачах разных метрик для дифференцируемых функций на оси // Укр. мат. журн. – 2009. – **61**, № 6. – С. 765 – 776.
13. *Колмогоров А. Н.* О неравенствах между верхними гранями последовательных производных функции на бесконечном интервале // Избр. труды. Математика, механика. – М.: Наука, 1985. – С. 252 – 263.

Получено 06.02.13