УДК 519.21

Г. П. Буцан

О первообразных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп

Настоящая статья является непосредственным продолжением работы [1], и поэтому в ней будут использоваться принятые там обозначения и определения.

Теорема. *Для произвольной $\check{A}$-полугруппы Y_s^t на $[0, T]$ в норме $|\cdot|_4$ существует предел* $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{m_n}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)=\bar{D}(Y_s^t)=X_s^t$, *не зависящий от последовательности разбиений $\{\Delta_n\}$ и являющийся $\check{M}$-полугруппой, где произведение Π берется в порядке возрастания индекса k слева направо.*

Для доказательства первой части этой теоремы, как и в [1], достаточно показать, что для всякого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что как только для некоторого разбиения Δ_n выполняется соотношение $\delta_n<\delta(\varepsilon)$, то для любого другого разбиения $\Delta_m\supset\Delta_n$ справедливо неравенство $|X_s^t(\Delta_m)-X_s^t(\Delta_n)|_4^2<\varepsilon$, где $X_s^t(\Delta_n)=\prod\limits_{k=1}^{m_n}(Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}+E)$.

Итак, пусть задана некоторая $\breve{A}$-полугруппа Y_s^t, а разбиения Δ_n и Δ_m такие же, как в [1]. Тогда

$$|X_s^t(\Delta_m) - X_s^t(\Delta_n)|_4^2 = \left| \prod_{k=1}^{m_n} \prod_{i=1}^{r_k} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E) - \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) \right|_4^2 =$$

$$= \left| \sum_{k=1}^{m_n} \left[\prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{r_j} (Y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j} + E) \right] \left[\prod_{i=1}^{r_k} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E) - E - Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \left[\prod_{j=k+1}^{m_n} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) \right] \right|_4^2 = \sum_{k=1}^{m_n} \left| \left[\prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{r_j} (Y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j} + E) \right] \left[\prod_{i=1}^{r_k} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - E - Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right] \left[\prod_{j=k+1}^{m_n} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) \right] \right|_4^2 + \sum_{k \neq q = 1}^{m_n} \operatorname{sp} M \left[\prod_{j=q+1}^{m_k} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) \right]^* \times$$

$$\times \left[\sum_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q})^* + E \right] \left[\prod_{j=k+1}^{q-1} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) \right]^* \left[\prod_{i=1}^{r_k} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E) - \right.$$

$$\left. - E - Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right]^* \left[\prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{r_j} (Y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j} + E) \right]^* \left[\prod_{j=1}^{q-1} \prod_{i=1}^{r_j} (Y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j} + E) \right] \times$$

$$\times \left[\prod_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} + E) - E - Y_{t_{q-1}^n}^{t_q^n}) \right] \left[\prod_{j=q+1}^{m_n} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) \right]. \tag{1}$$

Легко видеть, что в силу свойств 2.1—2.4 из [1] второе слагаемое в правой части этого равенства можно записать в виде

$$\sum_{k \neq q = 1}^{m_n} \operatorname{sp} M \left\{ M A^* \left[\sum_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q})^* + E \right] B \left[\prod_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} + E) - E - \right. \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{r_q} Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} \right] A \Bigg| \; A = \prod_{j=q+1}^{m_n} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E), \quad B = \left[\prod_{j=k+1}^{q-1} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) \right]^* \times$$

$$\times \left[\prod_{i=1}^{r_k} (Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k} + E) - E - Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right]^* \left[\prod_{j=1}^{k-1} \prod_{i=1}^{r_j} (Y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j} + E) \right]^* \times$$

$$\left. \times \left[\prod_{j=1}^{q-1} \prod_{i=1}^{r_j} (Y_{s_{i-1}^j}^{s_i^j} + E) \right] \right\},$$

но

$$M A^* \left[\sum_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q})^* + E \right] B \left[\prod_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} + E) - E - \sum_{i=1}^{r_q} Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q} \right] A =$$

$$= M A^* \left[\sum_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q})^* + E \right] B \left\{ \sum_{j=1}^{r_q} \left[\prod_{k=1}^{j-1} (Y_{s_{k-1}^q}^{s_k^q} + E) \right] Y_{s_{j-1}^q}^{s_j^q} - \right.$$

$$\left. - \sum_{j=1}^{r_q} Y_{s_{j-1}^q}^{s_j^q} \right\} A = M A^* \left[\sum_{i=1}^{r_q} (Y_{s_{i-1}^q}^{s_i^q})^* + E \right] B \left\{ \sum_{j=1}^{r_q} \left[\prod_{k=1}^{j-1} (Y_{s_{k-1}^q}^{s_k^q} + \right. \right.$$

$$+E)-E\Bigg]Y^{s_j^q}_{s_{j-1}^q}\Bigg\}A = MA^*\Bigg[\sum_{i=1}^{r_q}(Y^{s_i^q}_{s_{i-1}^q})^*\Bigg]B\Bigg\{\sum_{j=1}^{r_q}\Bigg[\prod_{k=1}^{j-1}(Y^{s_k^q}_{s_{k-1}^q}+E)-$$

$$-E\Bigg]Y^{s_j^q}_{s_{j-1}^q}\Bigg\}A=\sum_{i,j=1}^{r_q} MA^*(Y^{s_i^q}_{s_{i-1}^q})^* B\Bigg[\prod_{k=1}^{j-1}(Y^{s_k^q}_{s_k^q}+E)-E\Bigg]Y^{s_j^q}_{s_{j-1}^q}A=0.$$

Поэтому все второе слагаемое в правой части выражения (1) равнс нулю.

Оценивая первое слагаемое в правой части (1), заметим, что для произвольного разбиения Δ_n и $r\leqslant m_n$ справедливы оценки

$$\left|\prod_{k=1}^{r}(Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}+E)\right|_5^2\leqslant e^{\varphi(t)-\varphi(s)}, \tag{2}$$

$$\left|\prod_{k=1}^{r}(Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}+E)-E\right|_4^2\leqslant e^{\varphi(t)-\varphi(s)}-1. \tag{3}$$

В самом деле, первая из них в силу неравенства (1) из [1] вытекает из соотношения

$$\left|\prod_{k=1}^{r}(Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}+E)\right|_5^2\leqslant\prod_{k=1}^{r}|Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}+E|_5^2=\prod_{k=1}^{r}(|Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}|_5^2+1)\leqslant$$

$$\leqslant\prod_{k=1}^{r}\exp\left\{|Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}|_5^2\right\}=\exp\left\{\sum_{k=1}^{r}|Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}|_5^2\right\}\leqslant\exp\left\{\sum_{k=1}^{r}|Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}|_4^2\right\}\leqslant\exp\{\varphi(t)-\varphi(s)\}.$$

Вторая, согласно неравенству (2) из [1] и оценке (2), следует из соотношения

$$\left|\prod_{k=1}^{r}(Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}+E)-E\right|_4^2=\left|\sum_{k=1}^{r}\left[\prod_{i=1}^{k-1}(Y^{t_i^n}_{t_{i-1}^n}+E)\right]Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}\right|_4^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{r}\left|\left[\prod_{i=1}^{k-1}(Y^{t_i^n}_{t_{i-1}^n}+E)\right]Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}\right|_4^2\leqslant\sum_{k=1}^{r}|Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}|_4^2\left|\prod_{i=1}^{k-1}(Y^{t_i^n}_{t_{i-1}^n}+E)\right|_5^2\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=1}^{r}[\varphi(t_k^n)-\varphi(t_{k-1}^n)]\exp\{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)\}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{h=1}(\exp\{\varphi(t_k^n)-\varphi(t_{k-1}^n)\}-1)\exp\{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)\}\leqslant\exp\{\varphi(t)-\varphi(s)\}-1.$$

Приступим к оценке первого слагаемого в правой части равенства (1). В силу неравенства (2) из [1], а также неравенств (2) и (3), имеем

$$\sum_{k=1}^{m_n}\Bigg|\Bigg[\prod_{j=1}^{k-1}\prod_{i=1}^{r_j}(Y^{s_i^j}_{s_{i-1}^j}+E)\Bigg]\Bigg[\prod_{i=1}^{r_k}(Y^{s_i^k}_{s_{i-1}^k}+E)-E-Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}\Bigg]\times$$

$$\times\prod_{j=k+1}^{m_n}(Y^{t_j^n}_{t_{j-1}^n}+E)\Bigg]\Bigg|_4^2\leqslant\sum_{k=1}^{m_n}e^{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)}\Bigg|\prod_{i=1}^{r_k}(Y^{s_i^k}_{s_{i-1}^k}+E)-$$

$$-E-Y^{t_k^n}_{t_{k-1}^n}\Bigg|_4^2 e^{\varphi(t)-\varphi(t_k^n)}=\sum_{k=1}^{m_n}e^{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)}\Bigg|\sum_{i=1}^{r_k}\Bigg[\prod_{j=1}^{i-1}(Y^{s_j^k}_{s_{j-1}^k}+E)-E\Bigg]\times$$

$$\times Y^{s_i^k}_{s_{i-1}^k}\Bigg|_4^2 e^{\varphi(t)-\varphi(t_k^n)}=\sum_{k=1}^{m_n}e^{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)}\sum_{i=1}^{r_k}\Bigg|\Bigg[\prod_{j=1}^{i-1}(Y^{s_j^k}_{s_{j-1}^k}+E)-E\Bigg]\times$$

$$\times Y_{s_{i-1}^k}^{s_i^k}\Big|_4^2 e^{\varphi(t)-\varphi(t_k^n)} \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} e^{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)} \sum_{i=1}^{r_k} [e^{\varphi(s_{i-1}^k)-\varphi(t_{k-1}^n)} - 1] \times$$

$$\times [\varphi(s_i^k) - \varphi(s_{i-1}^k)] e^{\varphi(t)-\varphi(t_k^n)} \leqslant \sum_{k=1}^{m_n} e^{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)} \Big\{ \sum_{i=1}^{r_k} [\varphi(s_{i-1}^k) - \varphi(t_{k-1}^n)] \times$$

$$\times [\varphi(s_i^k) - \varphi(s_{i-1}^k)] e^{\varphi(s_{i-1}^k)-\varphi(t_{k-1}^n)} \Big\} e^{\varphi(t)-\varphi(t_k^n)} \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} [\varphi(s_{i-1}^k) - \varphi(t_{k-1}^n)] [\varphi(s_i^k) - \varphi(s_{i-1}^k)].$$

Поэтому

$$|X_s^t(\Delta_m) - X_s^t(\Delta_n)|_4^2 \leqslant e^{\varphi(T)} \sum_{k=1}^{m_n} \sum_{i=1}^{r_k} [\varphi(s_{i-1}^k) - \varphi(t_k^n)] [\varphi(s_i^k) - \varphi(s_{i-1}^k)],$$

и доказательство первой части можно завершить точно так же, как и доказательство соответствующей теоремы в [1] (см. неравенство (5)).

Для полного окончания доказательства теоремы осталось показать, что $\overline{D}(Y_s^t)$ удовлетворяет условиям 1.1—1.4 из [1].

Условия 1.3 и 1.4 выполняются очевидным образом; условие 1.1 следует из нашей теоремы в силу того, что точку τ всегда можно присоединить к соответствующим разбиениям Δ_n; а условие 1.2 вытекает из оценки

$$|\overline{D}(Y_s^t) - E|_4^2 \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} - 1, \tag{4}$$

получающейся из неравенства (3) предельным переходом.

Определение. *$\check{M}$-полугруппа $X_s^t = \overline{D}(Y_s^t)$ называется первообразной для $\check{A}$-полугруппы Y_s^t.*

Замечание 1. Для $\check{A}$-полугруппы Y_s^t справедлива оценка

$$|\overline{D}(Y_s^t) - E - Y_s^t|_4^2 \leqslant e^{\varphi(T)} [\varphi(t-) - \varphi(s)] [\varphi(t) - \varphi(s+)]. \tag{5}$$

Опираясь на теорему и оценку (2) из [1], это неравенство получим предельным переходом в соотношении

$$\left|\prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) - E - Y_s^t\right|_4^2 = \left|\sum_{k=2}^{m_n} \left[\prod_{j=1}^{k-1} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E)\right] Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} -\right.$$

$$\left. - \sum_{k=2}^{m_n} Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} \right|_4^2 = \left|\sum_{k=2}^{m_n} \left[\prod_{j=1}^{k-1} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) - E\right] Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right|_4^2 = \sum_{k=2}^{m_n} \left|\left[\prod_{j=1}^{k-1} (Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n} + E) -\right.\right.$$

$$\left.\left. - E\right] Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right|_4^2 \leqslant \sum_{k=2}^{m_n} (e^{\varphi(t_{k-1}^n)-\varphi(s)} - 1) [\varphi(t_k^n) - \varphi(t_{k-1}^n)] \leqslant (e^{\varphi(t_{m_n-1}^n)-\varphi(s)} - 1) \times$$

$$\times [\varphi(t) - \varphi(t_1^n)] \leqslant e^{\varphi(T)} [\varphi(t_{m_n-1}^n) - \varphi(s)] [\varphi(t) - \varphi(t_1^n)].$$

Замечание 2. Поскольку $M\,(Y_s^t)^* \left[\prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) - E - Y_s^t\right] =$

$$= M \left[\sum_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n})^*\right] \left[\sum_{i=1}^{m_n} \left(\prod_{i=1}^{k-1} (Y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + E) - E\right) Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n}\right] = \sum_{i;k=}^{m_n} M \left\{(Y_{t_{j-1}^n}^{t_j^n})^* \times\right.$$

$\times \left[\prod_{i=1}^{k-1} (Y_{t_{i-1}^n}^{t_i^n} + E) - E\right] Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} = 0$ и точно так же $M \left[\prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) -\right.$

$- E - Y_s^t \Big]^* Y_s^t = 0$, то в силу неравенства (3) справедливо соотношение $\left| \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) - E - Y_s^t \right|_4^2 = \left| \prod_{k=1}^{m_n} (Y_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} + E) - E \right|_4^2 - |Y_s^t|_4^2 \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} - 1 - [\varphi(t) - \varphi(s)]$. Переходя в нем к пределу при $n \to \infty$, получаем оценку

$$|\bar{D}(Y_s^t) - E - Y_s^t|_4^2 \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\} - 1 - [\varphi(t) - \varphi(s)]. \qquad (6)$$

Замечание 3. Переходя к пределу при $n \to \infty$ в неравенстве (2), получаем оценку

$$|\bar{D}(Y_s^t)|_5^2 \leqslant \exp\{\varphi(t) - \varphi(s)\}. \qquad (7)$$

Оценки (4), (6) и (7) дают представление о росте $\bar{D}(Y_s^t)$.

Следствие. $\sigma_s^t \subset \hat{\sigma}_s^t$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$.

1. *Буцан Г. П.* Об инфинитезимальных полугруппах для одного класса стохастических полугрупп.— Укр. мат. журн., 1983, **35**, № 2, с. 221—224.
2. *Буцан Г. П., Буцан С. П.* Неоднородные стохастические полугруппы.— Укр. мат. журн. 1981, **33**, № 4, с. 437—443.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
27.01.82