УДК 519.4

В. С. Трохименко

Отношение связности на упорядоченных алгебрах Менгера

1. Пусть Φ — некоторый класс функций, определенных и принимающих значения на одном и том же множестве. Будем говорить, что две функции φ и ψ из Φ находятся в отношении *связности*, если $\varphi \cap \psi \neq \varnothing$, при этом пишем $(\varphi, \psi) \in \varkappa_\Phi$. Отношение $\varkappa_\Phi$ было характеризовано ранее лишь на множествах одноместных функций, замкнутых относительно операции суперпозиции (т. е. на полугруппах преобразований) [1], однако не меньший интерес представляет его изучение совместно с другими естественными отношениями как на множествах одноместных, так и на множествах многоместных функций. В предлагаемой работе отношение связности описывается на множествах многоместных функций, замкнутых относительно суперпозиции, упорядоченных отношением продолжаемости функций и квазиупорядоченных отношением включения областей определения функций. Отсюда, в частности, можно получить характеристику отношения связности на фундаментально упорядоченных полугруппах преобразований [2]. В статье используется обычная символика математической логики и алгебры бинарных отношений.

2. *Алгеброй Менгера ранга n* будем называть упорядоченную пару $(G; o)$, где G — множество, а o — $(n+1)$-арная операция на нем, удовлетворяющая тождеству

$$x[y_1 \ldots y_n][z_1 \ldots z_n] = x[y_1[z_1 \ldots z_n] \ldots y_n[z_1 \ldots z_n]], \tag{1}$$

где $x[y_1 \ldots y_n]$ — результат применения операции o к элементам $x, y_1, \ldots, y_n$ из G. Совокупность всех произведений конечного числа преобразований множества G вида $x \mapsto a[b_1 \ldots b_{i-1} x b_{i+1} \ldots b_n]$, где $a, b_1, \ldots, b_n \in G$, обозначим через T. Далее, пусть $T_0 = T \cup \{\Delta_G\}$, где Δ_G — диагональ множества G.

Пусть $(G; o)$ — алгебра Менгера. *Фундаментально упорядоченной проекционной* (фуп) алгеброй Менгера назовем систему вида $(G; o; \zeta, \chi)$, где ζ — отношение порядка, а χ — отношение квазипорядка, на G, содержащее ζ, которая удовлетворяет условиям:

$$x \leqslant y \wedge x_1 \leqslant y_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leqslant y_n \to x[x_1 \ldots x_n] \leqslant y[y_1 \ldots y_n], \tag{2}$$

$$x \sqsubset y \to x[z_1 \ldots z_n] \sqsubset y[z_1 \ldots z_n], \tag{3}$$

$$x \sqsubset u[\bar{w}|_i y] \to x \sqsubset y, \tag{4}$$

$$x \leqslant z \wedge y \leqslant z \wedge x \sqsubset y \to x \leqslant y, \tag{5}$$

$$x \leqslant y \wedge z \sqsubset x \wedge z \sqsubset u[\bar{w}\backslash_i y] \to z \sqsubset u\,[\bar{\omega}|_i x] \tag{6}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$; $x, y, z, x_i, y_i, u \in G$; $\bar{w} \in G^n$, где $u[\bar{w}|_i x] = u[w_1 \ldots w_{i-1} x w_{i+1} \ldots w_n]$, $x \leqslant y \leftrightarrow (x, y) \in \zeta$, $x \sqsubset y \leftrightarrow (x, y) \in \chi$.

В дальнейшем условие (2) будем называть *стабильностью* ζ, а (3), (4), соответственно, *l-регулярностью* и *v-отрицательностью* отношения χ. Далее, система $(G; o; \chi)$, где $(G; \zeta)$ — упорядоченное множество, называется *фундаментально упорядоченной* (фу) алгеброй Менгера, если отношение ζ стабильно и удовлетворяет так называемому условию *слабой устойчивости*:

$$x \leqslant y \wedge u \leqslant t_1(x) \wedge u \leqslant t_2(y) \to u \leqslant t_2(x) \tag{7}$$

для всех $t_1, t_2 \in T_0$, $x, y, u \in G$. И наконец, система вида $(G; o; \chi)$, где χ — l-регулярное и v-отрицательное отношение квазипорядка на G, называется *проекционно квазиупорядоченной* (пк) алгеброй Менгера. Известно [3], [4], что всякая фуп (аналогично фу, пк) алгебра Менгера ранга n так изоморфно представима при помощи n-местных функций, что $(n+1)$-операция o переходит точно в $(n+1)$-арную операцию суперпозиции, ζ — в отношение продолжаемости функций, а χ — в отношение включения областей определения функций.

3. Пусть $F(A^n, A)$ обозначает множество всех n-местных функций, заданных на множестве A. Рассмотрим на $F(A^n, A)$ $(n+1)$-арную операцию *суперпозиции* $O:(\varphi, \psi_1, \ldots, \psi_n) \mapsto \varphi[\psi_1 \ldots \psi_n]$ $(\varphi, \psi_i \in F(A^n, A), \ i=1, \ldots, n)$, полагая, что $\varphi[\psi_1 \ldots \psi_n](\bar{a}) = \varphi(\psi_1(\bar{a}), \ldots, \psi_n(\bar{a}))$ для любого $\bar{a} \in A^n$ (A^n — декартова n-я степень A), где обе части равенства считаются определенными одновременно. Очевидно, $(F(A^n, A); O)$ — алгебра Менгера ранга n. Всякий (инъективный) гомоморфизм алгебры Менгера $(G; o)$ ранга n в алгебру Менгера вида $(F(A^n, A); O)$ называется (*изоморфным*) *представлением* $(G; o)$ при помощи n-местных функций. Далее, отображение $P: G \to F(A^n, A)$ называется представлением фуп алгебры Менгера $(G; o; \zeta, \chi)$ ранга n, если P — такое представление $(G; o)$, что $\zeta = \zeta_P$ и $\chi = \chi_P$, где $\zeta_P = \{(g_1, g_2) \mid P(g_1) \subset P(g_2)\}$, $\chi_P = \{(g_1, g_2) \mid \mathrm{pr}_1 P(g_1) \subset \mathrm{pr}_1 P(g_2)\}$, $g_1, g_2 \in G$. Аналогично определяются представления для фу и пк алгебр Менгера.

Пусть $(G; o)$ — алгебра Менгера ранга n и P — ее представление при помощи n-местных функций. Тогда отношением связности $\varkappa_P$ этой алгебры, соответствующим представлению P, будем называть отношение $\{(x, y) \mid P(x) \cap P(y) \neq \varnothing\}$ между элементами множества G. Бинарное отношение $\varkappa \subset G \times G$ называется *отношением связности алгебры Менгера* $(G; o)$, если $\varkappa = \varkappa_P$ для некоторого ее представления P. Аналогично отношение связности определяется на фуп, фу и пк алгебрах Менгера.

Рассмотрим на алгебре Менгера $(G; o)$ ранга n упорядоченную пару (ε, W), где ε — такое отношение эквивалентности на G, что $x[y_1 \ldots y_n] \equiv x[z_1 \ldots z_n]$ (ε) для всех $x, y_i, z_i \in G$, $i = 1, \ldots, n$, как только $y_i \equiv z_i$ (ε) для каждого $i = 1, \ldots, n$, а W — либо пустое множество, либо такой ε-класс, что $x[y_1 \ldots y_n] \in W$ для всех $x \in G$, $(y_1, \ldots, y_n) \in G^n \setminus (G \setminus W)^n$. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — некоторые попарно различные элементы, не принадлежащие G, $\varepsilon^* = \varepsilon \cup \{(e_1, e_1), \ldots, (e_n, e_n)\}$, при этом полагаем, что $g[e_1 \ldots e_n] = g$, $e_i[g_1 \ldots g_n] = g_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$, $g, g_1, \ldots, g_n \in G$. В дальнейшем пару (ε^*, W) будем называть *определяющей*. С каждой определяющей парой (ε^*, W) ассоциируем так называемое *простейшее представление* $P_{(\varepsilon^*, W)}$ алгебры $(G; o)$ при помощи n-местных функций на множестве ε^*-классов, отличных от W, где для каждого $g \in G$ функция $P_{(\varepsilon^*, W)}(g)$ определяется так: $(\varepsilon^*\langle \bar{x} \rangle, \varepsilon^*\langle y \rangle) \in P_{(\varepsilon, W)}(g) \leftrightarrow \varepsilon^*\langle g[\bar{x}] \rangle = \varepsilon^*\langle y \rangle$ для всех $\bar{x} \in (G \setminus W)^n \cup \{(e_1, \ldots, e_n)\}$, $y \in G \setminus W$ (здесь $\varepsilon^*\langle x \rangle$ обозначает ε^*-класс элемента x, $\varepsilon^*\langle \bar{x} \rangle = (\varepsilon^*\langle x_1 \rangle, \ldots, \varepsilon^*\langle x_n \rangle))$.

Легко проверить, что

$$(g_1, g_2) \in \zeta_{(\varepsilon^*, W)} \leftrightarrow (\forall \bar{x} \in B)(g_1[\bar{x}] \notin W \to g_1[\bar{x}] \equiv g_2[\bar{x}] \ (\varepsilon)),$$

$$(g_1, g_2) \in \chi_{(\varepsilon^*, W)} \leftrightarrow (\forall \bar{x} \in B)(g_1[\bar{x}] \notin W \to g_2[\bar{x}] \notin W),$$

$$(g_1, g_2) \in \varkappa_{(\varepsilon^*, W)} \leftrightarrow (\exists \bar{x} \in B)(g_1[\bar{x}] \notin W \wedge g_1[\bar{x}] \equiv g_2[\bar{x}] \ (\varepsilon)), \tag{8}$$

где $B = G^n \cup \{(e_1, \ldots, e_n)\}$ и $\sigma_{(\varepsilon^*, W)} = \sigma_{P_{(\varepsilon^*, W)}}$ при $\sigma \in \{\zeta, \chi, \varkappa\}$.

Пусть P — *сумма семейства представлений* $(P_i)_{i \in I}$ алгебры Менгера $(G; o)$, т. е. для любого $g \in G$ выполняется равенство $P(g) = \bigcup_{i \in I} P_i(g)$, где $P_i(g)$ и $P_j(g)$ при $i \neq j$ — n-местные функции на непересекающихся множествах. Можно показать, что P также является представлением $(G; o)$ и $\zeta_P = \bigcap_{i \in I} \zeta_{P_i}$, $\chi_P = \bigcap_{i \in I} \chi_{P_i}$, $\varkappa_P = \bigcup_{i \in I} \varkappa_{P_i}$.

4. Пусть $(G;\ o;\ \zeta, \chi)$ — фуп алгебра Менгера ранга n, $\{h_1, h_2\} \subset G$. Через $\theta(h_1, h_2)$ обозначим множество таких пар (g_1, g_2) из $G \times G$, что $g_1 = t(x)$, $g_2 = t(y)$, $\{x, y\} \subset \{h_1, h_2\}$ для некоторых $x,\ y \in G$, $t \in T_0$. Будем говорить, что подмножество H множества G (ζ, χ, h_1, h_2)-*замкнуто*, если оно удовлетворяет условию

$$(a, b) \in \zeta \cup \theta(h_1, h_2) \wedge u[\bar{w}|_i a] \sqsubset g \wedge \{a, u[\bar{w}|_i b]\} \subset H \to g \in H \tag{9}$$

для всех $i = 1, \ldots, n$, $a,\ b,\ g \in G$, $u \in G \cup \{e_i\}$, $\bar{w} \in G^n$, где $e_i[\bar{x}] = x_i$. Всякому подмножеству X множества G поставим в соответствие подмножество $F(X)$ таких элементов g из G, что $(a, b) \in \zeta \cup \theta(h_1, h_2)$, $u[\bar{w}|_i a] \sqsubset g$ и $\{a, u[\bar{w}|_i b]\} \subset X$ для некоторых $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a, b \in G$, $u \in G \cup \{e_i\}$, $\bar{w} \in G^n$. Очевидно, что $[X]_{(\zeta, \chi, h_1, h_2)} = \bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \overset{n}{F}(X)$, где $\overset{0}{F}(X) = X$, $\overset{n}{F}(X) = F(\overset{n-1}{F}(X))$ — наименьшее (ζ, χ, h_1, h_2)-замкнутое подмножество, содержащее X. С помощью метода математической индукции можно показать, что $g \in \overset{m}{F}(X)$ означает, что справедлива формула

$$(a_1 \leqslant b_1 \vee a_1,\ b_1 \in \{t_1(h_1), t_1(h_2)\}) \wedge u_1[\bar{w}_1|_{k_1} a_1] \sqsubset g \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{i=1}^{2^{m-1}-1} \begin{pmatrix} (a_{2i} \leqslant b_{2i} \vee a_{2i},\ b_{2i} \in \{t_{2i}(h_1),\ t_{2i}(h_2)\}) \wedge u_{2i}[\bar{w}_{2i}|_{k_{2i}} a_{2i}] \sqsubset a_i \wedge \\ (a_{2i+1} \leqslant b_{2i+1} \vee a_{2i+1},\ b_{2i+1} \in \{t_{2i+1}(h_1),\ t_{2i+1}(h_2)\}) \wedge \\ u_{2i+1}[\bar{w}_{2i+1}|_{k_{2i+1}} a_{2i+1}] \sqsubset u_i[\bar{w}_i|_{k_i} b_i] \end{pmatrix} \wedge$$

$$\wedge \bigwedge_{i=2^{m-1}}^{2^m-1} (a_i,\ u_i[\bar{w}_i|_{k_i} b_i] \in X) \tag{10}$$

для некоторых $k_i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i, b_i \in G$, $u_i \in G \cup \{e_{k_i}\}$, $\bar{w}_i \in G^n$, $t_i \in T_0$.

5. Для любой пары элементов h_1, h_2 фуп алгебры Менгера $(G; o; \zeta, \chi)$ через $\varepsilon(\zeta, h_1, h_2)$ обозначим транзитивное замыкание отношения $((\zeta \circ \overset{-1}{\zeta} \cup \theta(h_1, h_2)) \cap [h_1, h_2]^2 \cup ([h_1, h_2]')^2$, где $[h_1, h_2] = [\{h_1, h_2\}]_{(\zeta, \chi, h_1, h_2)}$, $[h_1, h_2]' = G \setminus [h_1, h_2]$ и $A^2 = A \times A$. Если $h_1 = h_2 = h$, то будем просто писать $\varepsilon(\zeta, h)$ и $[h]$; в этом случае, как следует из [4], $[h] = \chi\langle h\rangle$. Можно показать, что упорядоченная пара $(\varepsilon^*(\zeta, h_1, h_2), [h_1, h_2]')$ определяющая.

6. Характеристику отношения связности в классе фуп алгебр Менгера дает следующая теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы бинарное отношение $\varkappa \subset G \times G$ являлось отношением связности на фуп алгебре Менгера $(G;\ o;\ \zeta,\ \chi)$, необходимо и достаточно, чтобы он удовлетворяло условиям*

$$g \neq 0 \to (g, g) \in \varkappa, \tag{11}$$

$$(0, 0) \notin \varkappa \to 0 \leqslant g, \tag{12}$$

$$(g_1[\bar{x}],\ g_2[\bar{x}]) \in \varkappa \to (g_1, g_2) \in \varkappa, \tag{13}$$

$$(h_1, h_2) \in \varkappa \wedge (g_1, g_2) \in \varepsilon(\zeta, h_1, h_2) \wedge g_1 \in [h_1, h_2] \to (g_1, g_2) \in \varkappa \tag{14}$$

для всех g, g_1, g_2, h_1, $h_2 \in G$, $\bar{x} \in G^n$, где 0 — нуль алгебры $(G; o)$.

Доказательство. Необходимость. Ограничимся проверкой условия (14), так как (11)—(13) очевидны. Итак, рассмотрим некоторую фуп алгебру Менгера $(\Phi;\ O;\ \zeta_\Phi, \chi_\Phi)$ n-местных функций, где O — $(n+1)$-арная операция суперпозиции на Φ, $\zeta_\Phi = \{(\varphi, \psi) \mid \varphi \subset \psi\}$, $\chi_\Phi = \{(\varphi, \psi) \mid \mathrm{pr}_1\, \varphi \subset \mathrm{pr}_1\, \psi\}$, $\varphi, \psi \in \Phi$. Пусть $(f_1, f_2) \in \varkappa_\Phi$, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \varepsilon(\zeta_\Phi, f_1, f_2)$ и $\varphi_1 \in [f_1, f_2]$. Из последних двух условий получаем также $\varphi_2 \in [f_1, f_2]$. Так как $f_1 \cap f_2 \neq \varnothing$, то существуют a, b такие, что $(\bar{a}, b) \in f_1$ и $(\bar{a}, b) \in f_2$. Отсюда $f_1(\bar{a}) = b = f_2(\bar{a})$. Затем с помощью метода математической индукции можно показать, что для любого $m \in N$ из $\varphi \in \overset{m}{F}(\{f_1, f_2\})$ следует $\bar{a} \in \mathrm{pr}_1 \varphi$. Отсюда вытекает справедливость условия

$$\varphi \in [f_1, f_2] \to \bar{a} \in \mathrm{pr}_1 \varphi. \tag{15}$$

Так как $\varphi_1, \varphi_2 \in [f_1, f_2]$, то согласно (15) $\bar{a} \in \mathrm{pr}_1 \varphi_1$ и $\bar{a} \in \mathrm{pr}_1 \varphi_2$. Далее, $(\varphi_1, \varphi_2) \in \varepsilon(\zeta_\Phi, f_1, f_2)$ означает, что для некоторых $n \in N$, $\chi_i \in \Phi$, $i = 1, \ldots, n$, выполняются соотношения $\{(\varphi_1, \chi_1), (\chi_1, \chi_2), \ldots, (\chi_n, \varphi_2)\} \subset \overset{-1}{\zeta_\Phi} \circ \zeta_\Phi \cup \theta(f_1, f_2)$, $\{\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n\} \subset [f_1, f_2]$. Следуя (15), из последнего соотношения получаем что $\bar{a} \in \mathrm{pr}_1 \chi_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Для пары (φ_1, χ_1), очевидно, справедливо $(\varphi_1, \chi_1) \in \overset{-1}{\zeta_\Phi} \circ \zeta_\Phi$ либо $(\varphi_1, \chi_1) \in \theta(f_1, f_2)$. В первом случае $\varphi_1 \subset \gamma$ и $\chi_1 \subset \gamma$ для некоторого $\gamma \in \Phi$, поэтому $\varphi_1(\bar{a}) = \gamma(\bar{a}) = \chi_1(\bar{a})$; во втором — $\{\varphi_1, \chi_1\} \subset \{t(f_1), t(f_2)\}$ для некоторого $t \in T_0$. Отсюда из $f_1(\bar{a}) = f_2(\bar{a})$ следует $t(f_1)(a) = t(f_2)(\bar{a})$, а поэтому опять же $\varphi_1(\bar{a}) = \chi_1(\bar{a})$. Аналогично показываем, что $\chi_1(\bar{a}) = \chi_2(\bar{a})$, и т. д. Таким образом, $\varphi_1(\bar{a}) = \chi_1(\bar{a}) = \chi_2(a) = \ldots$ $\ldots = \chi_n(a) = \varphi_2(a)$. Итак, $\varphi_1 \cap \varphi_2 \neq \varnothing$, т. е. $(\varphi_1, \varphi_2) \in \varkappa_\Phi$. Тем самым выполнимость условия (14) показана.

Достаточность. Пусть выполняются все условия теоремы и P — сумма семейства простейших представлений вида $P_{(\varepsilon^*(\zeta, h_1, h_2), [h_1, h_2]')}$, где $(h_1, h_2) \in \varkappa$, алгебры Менгера $(G; o)$ при помощи n-местных функций. Покажем, что P — изоморфное представление фуп алгебры Менгера $(G; o; \zeta, \chi)$ такое, что $\varkappa = \varkappa_P$.

Пусть $(g_1, g_2) \in \zeta$, тогда в силу стабильности ζ получим, что $g_1[\bar{x}] \leqslant g_2[x]$ для всякого $\bar{x} \in G^n \cup \{(e_1, \ldots, e_n)\}$. Поэтому, если $g_1[\bar{x}] \in [h_1, h_2]$, где $(h_1, h_2) \in \varkappa$, то $g_2[x] \in [h_1, h_2]$. Таким образом, $(g_1[x], g_2[x]) \in \zeta \cap [h_1, h_2]^2 \subset \varepsilon(\zeta, h_1, h_2)$. Мы показали, что $\zeta \subset \zeta_P$. Обратно, если $(g_1, g_2) \in \zeta_P$, то очевидно, для всех $(h_1, h_2) \in \varkappa$ и $\bar{x} \in G^n \cup \{(e_1, \ldots, e_n)\}$ из $g_1[\bar{x}] \in [h_1, h_2]$ вытекает $(g_1[\bar{x}], g_2[x]) \in \varepsilon(\zeta, h_1, h_2)$. Поэтому при $\bar{x} = (e_1, \ldots, e_n)$ получаем, что для всех $(h_1, h_2) \in \varkappa$ из $g_1 \in [h_1, h_2]$ следует $(g_1, g_2) \in \varepsilon(\zeta, h_1, h_2)$. Если $g_1 \neq 0$, то согласно (11) справедливо $(g_1, g_1) \in \varkappa$. Следовательно, полагая $h_1 = h_2 = g_1$, получаем, что пара (g_1, g_2) находится в транзитивном замыкании отношения $(\overset{-1}{\zeta} \circ \zeta \cap \chi\langle g_1\rangle \times \chi\langle g_1\rangle) \cup \chi'\langle g_1\rangle \times \chi'\langle g_1\rangle$. Отсюда, как показано в [4], вытекает, что $g_1 \leqslant g_2$. Аналогичные рассуждения имеют место при $g_1 = 0$, если только $(0, 0) \in \varkappa$. Если же $g_1 = 0$ и $(0, 0) \notin \varkappa$, то, согласно (12) имеем $g_1 = 0 \leqslant g_2$. Итак, мы показали, что $\zeta_P \subset \zeta$, поэтому $\zeta = \zeta_P$. Таким же образом доказываем, что $\chi = \chi_P$. Так как ζ — отношение порядка, то, очевидно, P взаимно однозначно. Тем самым мы показали, что P — изоморфное представление для $(G; o; \zeta, \chi)$.

Пусть $(g_1, g_2) \in \varkappa$. Так как $\{g_1, g_2\} \subset [g_1, g_2]$ и $(g_1, g_2) \in \theta(g_1, g_2)$, то $(g_1, g_2) \in \varepsilon(\zeta, g_1, g_2)$, т. е. $(g_1[\bar{e}], g_2[\bar{e}]) \in \varepsilon(\zeta, g_1, g_2)$. Итак, существуют такие $(h_1, h_2) \in \varkappa$, $\bar{x} \in G^n \cup \{(e_1, \ldots, e_n)\}$, что $g_1[x] \in [h_1, h_2]$ и $(g_1[\bar{x}], g_2[\bar{x}]) \in \varepsilon(\zeta, h_1, h_2)$, а это равносильно $P(g_1) \cap P(g_2) \neq \varnothing$, т. е. $(g_1, g_2) \in \varkappa_P$. Обратно, если $(g_1, g_2) \in \varkappa_P$, то, очевидно, $g_1[\bar{x}] \in [h_1, h_2] \wedge g_1[x] \equiv g_2[\bar{x}] \times (\varepsilon(\zeta, h_1, h_2))$ для некоторых $(h_1, h_2) \in \varkappa$ и $\bar{x} \in G^n \cup \{(e_1, \ldots, e_n)\}$. Отсюда согласно (14) имеем $(g_1[\bar{x}], g_2[\bar{x}]) \in \varkappa$. Затем, по (13) из последнего получаем, что $(g_1, g_2) \in \varkappa$. Итак, мы показали, что $\varkappa = \varkappa_P$. Теорема доказана.

Исходя из определения отношения $\varepsilon(\zeta, h_1, h_2)$ нетрудно видеть, что условие (14) равносильно системе условий $(A_n)_{n \in N}$ (N—множество натуральных чисел), где

$$A_n\colon (h_1, h_2) \in \varkappa \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} ((x_i \leqslant z_i \wedge x_{i+1} \leqslant z_i) \vee (x_i = t_i(h_1) \wedge x_{i+1} = t_i(h_2)) \vee$$

$$\vee (x_i = t_i(h_2) \wedge x_{i+1} = t_i(h_1))) \wedge x_0, \ldots, x_n \in [h_1, h_2] \to (x_0, x_n) \in \varkappa.$$

Таким образом, доказана теорема.

Теорема 2. *Для того чтобы бинарное отношение $\varkappa \subset G\times G$ являлось отношением связности на фуп алгебре Менгера $(G;\ o;\ \zeta,\ \chi)$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям* (11)—(13), *а также системе условий* $(A_n)_{n\in N}$.

7. Пусть $(G;\ o;\ \zeta)$ — фу алгебра Менгера. Рассмотрим на ней отношение $\delta = \{(x,\ y) | (\exists t\in T_0) x = t\ (y)\}$, которое, как известно, является наименьшим l-регулярным и v-отрицательным отношением квазипорядка. Можно показать, что система $(G;\ o;\ \zeta,\ \delta\circ\zeta)$ — фуп алгебра Менгера. Поэтому из предыдущего пункта вытекает следующая теорема.

Теорема 3. *Для того чтобы отношение $\varkappa \subset G\times G$ являлось отношением связности на фу алгебре Менгера $(G;\ o;\ \zeta)$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям* (11)—(13) *и для каждого натурального n — условию*

$$B_n : (h_1,\ h_2)\in\varkappa \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} ((x_i \leqslant z_i \wedge x_{i+1} \leqslant z_i) \vee (x_i = t_i\,(h_1) \wedge x_{i+1} = t_i\,(h_2)) \vee$$

$$\vee (x_i = t_i\,(h_2) \wedge x_{i+1} = t_i\,(h_1))) \wedge x_0,\ \ldots,\ x_n \in \langle h_1,\ h_2\rangle \rightarrow (x_0,\ x_n)\in\varkappa,$$

где $\langle h_1,\ h_2\rangle = [\{h_1,\ h_2\}]_{(\zeta,\delta_o\zeta,h_1,h_2)}$.

8. *Пусть* $(G;\ o;\ \chi)$ — пк алгебра Менгера и $\varkappa \subset G\times G$. Зададим на G бинарное отношение

$$\zeta_0 = \begin{cases} \Delta_G, & \text{если } (0,\ 0)\in\varkappa; \\ \Delta_G \cup (\{0\}\times G), & \text{если } (0,\ 0)\notin\varkappa. \end{cases}$$

Легко видеть, что ζ_0 — стабильное отношение порядка на $(G;\ o)$, а система $(G;\ o;\ \zeta_0,\ \chi)$ — фуп алгебра Менгера.

Теорема 4. *Для того чтобы $\varkappa \subset G \times G$ было отношением связности на пк алгебре Менгера $(G;\ o;\ \chi)$, необходимо и достаточно, чтобы наряду с* (11) *и* (13) *выполнялось условие*

$$(h_1,\ h_2)\in\varkappa \wedge (g_1,\ g_2)\in\varepsilon(\zeta_0,\ h_1,\ h_2) \wedge g_1\in[h_1,\ h_2]_0 \rightarrow (g_1,\ g_2)\in\varkappa, \tag{16}$$

где $[h_1,\ h_2]_0 = [\{h_1,\ h_2\}]_{(\zeta_0,\chi,h_1,h_2)}$.

Доказательство. Пусть выполняется посылка условия (16) и P — изоморфное представление пк алгебры Менгера $(G;\ o;\ \chi)$ при помощи n-местных функций такое, что $\varkappa = \varkappa_P$. Из $\chi = \chi_P$ и $\zeta_0 \subset \zeta_P$ получаем $[h_1,\ h_2]_0 \subset [h_1,\ h_2]_{(\zeta_P,\chi_P,h_1,h_2)}$, поэтому $\varepsilon(\zeta_0,\ h_1,\ h_2) \subset \varepsilon(\zeta_P,\ h_1,\ h_2)$. Следовательно, выполнение посылки условия (16) влечет справедливость посылки условия (14) в фуп алгебре Менгера $(G;\ o;\ \zeta_P,\ \chi_P)$, так как $\varkappa_P$ — ее отношение связности. Таким образом, $(g_1,\ g_2)\in\varkappa_P$, т. е. $(g_1,\ g_2)\in\varkappa$. Необходимость доказана.

Совершенно очевидно, что отношение $\varkappa$ на фуп алгебре Менгера $(G;\ o;\ \zeta_0,\ \chi)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1, поэтому $\varkappa$ — отношение связности на $(G;\ o;\ \zeta_0,\ \chi)$, а значит, на $(G;\ o;\ \chi)$. Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что если $(G;\ o;\ \chi)$ — пк алгебра Менгера, $h_1,\ h_2\in G$, то подмножество $X\subset G$ $(\zeta_0,\ \chi,\ h_1,\ h_2)$-замкнуто тогда и только тогда, когда

$$t(a) \sqsubset g \wedge t(b)\in X \rightarrow g\in X \tag{17}$$

для всех $t\in T_0$, $a,\ b\in\{h_1,\ h_2\}$ при $a\neq b$ или $a\in G$ при $a = b$.

Каждому подмножеству X поставим в соответствие подмножество $E\ (X)$ всех таких элементов g из G, что $t\ (a) \sqsubset g$ и $t\ (b)\in X$ для некоторых $t\in T_0$, $a,\ b\in\{h_1,\ h_2\}$ при $a\neq b$ или $a\in G$ при $a = b$. Обозначим через $\overset{n}{E}(X)$ подмножество $E\,(\overset{n-1}{E}(X))$. Очевидно, наименьшее $(\zeta_0,\ \chi,\ h_1,\ h_2)$-замкнутое подмножество, содержащее X, которое мы обозначим через $[X]_0$, совпадает с $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} \overset{n}{E}(X)$, где $\overset{0}{E}(X) = X$. С помощью метода математической индукции можно доказать, что для каждого $n \in N$ условие $g \in \overset{n}{E}(X)$ означает, что найдутся такие $t_i \in T_0$, $a_i, b_i \in \{h_1, h_2\}$ при $a_i \neq b_i$ или $a_i \in G$ при $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, что будет справедлива формула

$$t_0(a_0) \sqsubset g \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} (t_{i+1}(a_{i+1}) \sqsubset t_i(b_i)) \wedge t_n(b_n) \in X. \tag{18}$$

Пусть $(h_1, h_2) \in \varkappa$. Тогда если $(0, 0) \in \varkappa$, то, как следует из (16), мы получаем $0 \notin [h_1, h_2]_0$. Учитывая этот факт, нетрудно видеть, что $(g_1, g_2) \in \in \varepsilon(\zeta_0, h_1, h_2)$ означает, что найдутся такие элементы $g_1 = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = g_2$, принадлежащие $[h_1, h_2]_0$, что $(x_i, x_{i+1}) \in \Delta_G \cup \theta(h_1, h_2)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Последнее означает: $x_i = t_i(a_i) \in [h_1, h_2]_0 \wedge x_{i+1} = t_i(b_i) \in \in [h_1, h_2]_0$, где $a_i, b_i \in \{h_1, h_2\}$ при $a_i \neq b_i$, $a_i \in G \setminus \{0\}$ при $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Таким образом, (16) равносильно системе условий $(C_n)_{n \in N}$, где

$$C_n : (h_1, h_2) \in \varkappa \wedge t_0(a_0) \in [h_1, h_2]_0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} (t_i(b_i) = t_{i+1}(a_{i+1}) \in [h_1, h_2]_0) \wedge$$

$$\wedge\, t_n(b_n) \in [h_1, h_2]_0 \to (t_0(a_0), t_n(b_n)) \in \varkappa$$

для всех $t_i \in T_0$, $a_i, b_i \in \{h_1, h_2\}$ при $a_i \neq b_i$ или $a_i \in G \setminus \{0\}$ при $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

Итак, доказана теорема.

Теорема 5. *Для того чтобы $\varkappa \subset G \times G$ являлось отношением связности на пк алгебре Менгера $(G; o; \chi)$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло условиям* (11), (13) *и системе условий* $(C_n)_{n \in N}$.

9. Пусть $(G; o)$ — алгебра Менгера, $h_1, h_2 \in G$, тогда для каждого подмножества $X \subset G$ через $\langle X \rangle_0$ будем обозначать его $(\zeta_0, \delta, h_1, h_2)$-замыкание, где δ определяется как в п. 7. Очевидно, что $g \in \langle X \rangle_0$, если и только если найдутся $n \in N$, $t, t_i \in T_0$, $a_i, b_i \in \{h_1, h_2\}$ при $a_i \neq b_i$ или $a_i \in G$ при $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такие, что

$$t(g) = t_0(a_0) \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} (t_i(b_i) = t_{i+1}(a_{i+1})) \wedge t_n(b_n) \in X. \tag{19}$$

Из теоремы 5 можно вывести следующую теорему.

Теорема 6. *Для того чтобы $\varkappa \subset G \times G$ было отношением связности на алгебре Менгера $(G; o)$, необходимо и достаточно, чтобы оно удовлетворяло* (11), (13) *и для каждого натурального n — условию D_n, где*

$$D_n : (h_1, h_2) \in \varkappa \wedge t_0(a_0) \in \langle h_1, h_2 \rangle_0 \wedge \bigwedge_{i=0}^{n-1} (t_i(b_i) = t_{i+1}(a_{i+1}) \in \langle h_1, h_2 \rangle_0) \wedge$$

$$\wedge\, t_n(b_n) \in \langle h_1, h_2 \rangle_0 \to (t_0(a_0), t_n(b_n)) \in \varkappa$$

для всех $t_i \in T_0$, $a_i, b_i \in \{h_1, h_2\}$ при $a_i \neq b_i$ или $a_i \in G \setminus \{0\}$ при $a_i = b_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$.

В случае полугрупп, т. е. при $n = 1$, теорема 6 была ранее иным способом доказана в работе [1].

1. *Гарвацкий В. С.* Пучки и отношения связности на полугруппах.— Изв. вузов. Матем. 1971, № 11, с. 45—56.
2. *Вагнер В. В.* Представление упорядоченных полугрупп.— Матем. сб., 1956, 38, № 2, с. 203—240.
3. *Schein B. M., Trohimenko V. S.* Algebras of multiplace functions.— Semigroup Forum, 1979, 17, N 1, p. 1—64.
4. *Трохименко В. С.* Упорядоченные алгебры многоместных функций.— Изв. вузов. Матем., 1971, № 1, с. 90—98.

Винницкий
педагогический институт

Поступила в редакцию
31.03.82