УДК 517.544 : 517.948.32

И. М. Спитковский

О факторизации матриц-функций из классов $\tilde{A}_n(p)$ и TL

Пусть Γ — конечная совокупность гладких замкнутых непересекающихся кривых $\Gamma^{(j)}$, ограничивающая область D^+ $(\ni 0)$, D^- $(\ni \infty)$ — дополнение к $D^+ \cup \Gamma$ до полной плоскости. Контур Γ считаем ориентированным так, что при обходе в положительном направлении D^+ остается слева. Через $E_r^\pm$, $0 < r \leqslant \infty$, будем обозначать классы Смирнова функций, аналитических в $D^\pm$, через P_+ — проектор на линеал E_1^+ параллельно $\mathring{E}_1^- = \{\varphi \in E_1^- : \varphi(\infty) = 0\}$.

В силу результатов из [1], при $p \in (1, \infty)$ операторы P_+ и $P_- = I - P_+$ определены, а потому и ограничены, всюду в $L_p(\Gamma)$ $(= L_p)$. В пространстве L_p^n будем считать операторы $P_\pm$ определенными покоординатно. Принадлежность матриц-функций (сокращенно: м-ф) каким-либо функциональным классам понимается поэлементно.

Пусть G — заданная на Γ $(n \times n)$ — м-ф класса L_∞. Известно [2], что для нетеровости в L_p^n сингулярного интегрального оператора $P_+ + GP_-$ необходимы и достаточны следующие условия: 1) м-ф G допускает *факторизацию в* L_p, т. е. представление

$$G(t) = G_+(t)\Lambda(t)G_-^{-1}(t) \text{ п. в. на } \Gamma, \tag{1}$$

в котором $G_\pm \in E_p^\pm$, $G_\pm^{-1} \in E_q^\pm$ $(q = p/(p-1))$, $\Lambda(t) = (t^{\varkappa_j}\delta_{ij})_{i,j=1}^n$, а числа $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_n$ — целые; 2) факторизация (1) является *Φ-факторизацией*, т. е. оператор $G_-\Lambda^{-1}P_-G_+^{-1}$ ограничен в L_p^n. Если условия 1), 2) выполнены, то индекс оператора $P_+ + GP_-$ совпадает с суммарным индексом $\varkappa(G)$ $(= \varkappa_1 + \ldots + \varkappa_n)$ м-ф G.

Для класса PC кусочно непрерывных м-ф известен эффективный критерий Φ-факторизуемости (см., например, [3]).

Теорема 1. *М-ф $G \in PC$ Φ-факторизуема в L_p тогда и только тогда, когда при всех $t \in \Gamma$* $\det G(t \pm 0) \neq 0$, *а аргументы $\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)$ собственных чисел матриц $G^{-1}(t-0)G(t+0)$ отличны от $2\pi/p$.*

Естественным обобщением класса PC является класс TL м-ф, имеющих в каждой точке $t \in \Gamma$ не более двух существенных предельных значений (т. е. предельных значений, инвариантных относительно изменений м-ф на множествах нулевой меры). Этот класс изучался в [4], где показано, что критерий Φ-факторизуемости в L_2 переносится с PC на TL без изменений.

Основным результатом настоящей работы является критерий Φ-факторизуемости м-ф класса TL при $p \neq 2$. Этот результат анонсирован в заметке [5] (теорема 5). В связи с изучением TL оказалось целесообразным ввести в рассмотрение класс $\tilde{A}_n(p)$, являющийся матричным аналогом определенного в [6] класса $\tilde{A}(p)$. Класс $\tilde{A}_n(p)$ содержит, в частности, локально α-секториальные м-ф, факторизация которых изучалась в [7]. В § 2 приводятся используемые при доказательстве теоремы из § 3 свойства класса $\tilde{A}_n(p)$ (предложения 3—5). Возможно, эти результаты представляют и самостоятельный интерес. § 1 содержит два вспомогательных результата, связанных с принципом аналитического продолжения и его обобщениями.

1. Предложение 1. *Пусть $\varphi_\pm$ — функции, принадлежащие при некотором $r > 0$ классу $E_r^\pm$ вместе с обратными и такие, что почти*

всюду (п. в.) на некоторой открытой дуге $\gamma \subset \Gamma$ *частное* $f = \varphi_+/\varphi_-$ *принимает лишь два значения:* f_1 *и* f_2. *Если* f_1 и f_2 *— существенные предельные значения для* f *при стремлении вдоль* γ *к одному из его концов —* t_0, *а* $\theta = \arg f_1/f_2$ *несоизмеримо с* π, *то для каждой точки* $t_1 \in \gamma$ *можно указать* $t_2 \in \gamma$ *такое, что над поддуге* $\gamma' = (t_1, t_2)$ *дуги* γ *ни одна из функций* $\varphi_{\mp}^{\pm 1}$ *не будет суммируемой с показателем, бо́льшим* $\rho = 2\pi/\min\{\theta, 2\pi - \theta\}$.

Доказательство. В силу известных теорем о факторизуемости положительнозначных функций (см., например, [8]) можно подобрать $\chi_{\pm}$, принадлежащие вместе с обратными классам $E_r^{\pm}$ при всех конечных r и такие, что $\chi_+/\chi_- = |f|$ п. в. на Γ. Заменив функцию φ_+ на φ_+/χ_+, φ_- на φ_-/χ_-, сведем доказываемое утверждение к случаю $|f_1| = |f_2|$. В этом случае, как мы сейчас покажем, дугу γ' можно подобрать так, чтобы $\varphi_{\mp}^{\pm 1}$ не были суммируемы с показателем, равным ρ.

Зафиксировав $t_1 \in \gamma$, будем искать t_2 между t_1 и t_0. Если доказываемое утверждение неверно, то при любом таком выборе t_2 какая-то (не зависящая от t_2) из функций $|\varphi_+|^{\pm\rho}$ будет суммируемой на γ'. Пусть для определенности, $\int\limits_{\gamma'} |\varphi_+(t)|^{\rho}\, |dt| < \infty$. Предположим временно, что контур Γ связен. Тогда с точностью до постоянного множителя будут определены аналитические в $D^{\pm}$ функции $\psi_{\pm} = \varphi_{\pm}^{0}$, причем $\psi_+(t)/\psi_-(t) = c = \mathrm{const}$ п. в. на γ. В силу леммы 3 из [9] функции ψ_+ и $c\psi_-$ аналитические продолжения друг друга через γ'. Пусть $\{\gamma_j\}$ — набор дуг, на которые γ' разбивается нулями функции ψ_+ (или, что равносильно, ψ_-). Будем считать дуги γ_j занумерованными в порядке следования вдоль γ от t_1 к t_0. На каждой из дуг γ_j вместе с $\psi_{\pm}$ будут аналитическими и необращающимися в нуль функции $\varphi_{\pm}$, а потому и их частное. Следовательно, на каждой из дуг γ_j функция f принимает (с точностью до множества меры нуль) постоянное значение — f_1 либо f_2.

При переходе через нуль функции ψ_+ кратности k аргумент частного φ_+/φ_- претерпевает скачок $k\theta$. В силу несоизмеримости θ с π это означает, что при движении от t_1 к t_2 значение f_2 не может смениться на f_1. Иными словами, дуга γ' разбивается некоторой точкой τ (возможно, совпадающей с одним из концов), так, что $f(t) = f_j$ почти для всех точек $t \in \gamma'$, лежащих между τ и t_j, $j = 1, 2$. Получаем, таким образом, противоречие с тем, что каждое из чисел f_1 и f_2 является существенным предельным значением для f при стремлении к t_0 вдоль γ.

Случай несвязного контура Γ сводится к рассмотренному путем подходящего сужения областей $D^{\pm}$.

Обозначим через $M_r^{\pm}$ линейную сумму $E_r^{\pm}$ с классом рациональных не имеющих полюсов на Γ функций.

Предложение 2. *Пусть заданные на* Γ *м-ф* G_1 *и* G_2, *факторизуемые в* L_{p_1} *и* L_{p_2} *соответственно, совпадают п. в. на дуге* $\gamma \subset \Gamma$. *Тогда факторизационные множители* $G_{\pm}^{(1)}$ *м-ф* G_1 *получаются из соответствующих факторизационных множителей* $G_{\pm}^{(2)}$ *м-ф* G_2 *умножением справа на м-ф, аналитическую и невырожденную на* $\gamma \setminus \Delta$. *Здесь* Δ *— некоторое множество точек дуги* γ, *сгущающееся разве лишь к ее концам.*

Доказательство. Утверждение леммы симметрично относительно перемены G_1 и G_2 местами, и потому без ограничения общности можно считать, что $p_1 \geqslant p_2$. Подставляя в равенство $G_1(t) = G_2(t)$ п. в. на γ факторизации $G_j = G_{+}^{(j)} \Lambda^{(j)} G_{-}^{(j)-1}$, $j = 1, 2$, получаем соотношение $G_{+}^{(2)-1}(t)\, G_{+}^{(1)}(t)\, \Lambda^{(1)}(t) = \Lambda^{(2)}(t)\, G_{-}^{(2)-1}(t)\, G_{-}^{(1)}(t)$ п. в. на γ, левая часть которого принадлежит классу M_1^{+}, а правая — M_1^{-}. Отсюда следует, что $G_{+}^{(1)} = G_{+}^{(2)} Z \Lambda^{(1)-1}$, $G_{-}^{(1)} = G_{-}^{(2)} \Lambda^{(2)-1} Z$, где Z — м-ф, аналитическая во внутренних точках γ. При этом в силу невырожденности м-ф $G_{+}^{(j)}$ в D^{+} м-ф Z не может вырождаться всюду на γ. Но тогда утверждение леммы будет выполнено, если в качестве Δ взять объединение множества нулей $\det Z$ на γ с концами дуги γ.

Замечание 1) в случае ляпуновского контура Γ отсутствие суммируемости функций $|\varphi_+|^{\pm p}$ в условиях предложения 1 можно обосновать и без предположения $|f_1| = |f_2|$; 2) при доказательстве предложения 2 вместо гладкости контура Γ можно требовать лишь его спрямляемость.

2. Напомним, что *хаусдорфовым множеством* (числовым образом) матрицы $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ называется множество $\mathcal{H}(A)$ значений квадратичной формы $\Sigma a_{ij}\xi_i\bar{\xi}_j$ на единичной сфере $\Sigma|\xi_j|^2 = 1$. Будем называть матрицу A *α-секториальной*, если $\mathcal{H}(A)$ лежит в секторе $S_\alpha = \{z : |\operatorname{Im} z| \leqslant \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{Re} z\}$. Условимся писать сокращенно $\bar{p}$ вместо $\max\{p, q\}$, $\bar{q}$ вместо $\min\{p, q\}$.

Обозначим через $\tilde{A}_n(p)$ класс таких заданных на Γ $(n \times n)$-м-ф $G \in L_\infty$, для которых $G^{-1} \in L_\infty$ и в каждой точке $t \in \Gamma$ выполняется одно из условий: 1) существенные предельные значения $G(t \pm 0)$ единственны, причем аргументы всех собственных чисел матрицы $G^{-1}(t-0)\,G(t+0)$ отличны от $2\pi/p$; 2) существуют окрестность $\gamma_{t,G}$ точки t на Γ, постоянные матрицы $A_{t,G}$, $B_{t,G}$ и число $\alpha_{t,G} < \pi/\bar{p}$ такие, что почти для всех $\tau \in \gamma_{t,G}$ матрицы $A_{t,G}G(\tau)B_{t,G}$ $\alpha_{t,G}$-секториальны.

Для заданной м-ф $G \in L_\infty$ через $\Gamma_j(G)$ будем обозначать множество тех точек $t \in \Gamma$, для которых выполнено условие j, $j = 1, 2$; $\tilde{A}_n(p)$ можно охарактеризовать как класс таких обратимых в L_∞ м-ф G, для которых $\Gamma = \Gamma_1(G) \cup \Gamma_2(G)$. Условие 2) из определения класса $\tilde{A}_n(p)$ можно переформулировать следующим образом: 2′) существуют невырожденные матрицы A, B и число $\alpha < \pi/\bar{p}$ такие, что для любого существенного предельного значения F м-ф G в точке t $\mathcal{H}(AFB) \subset S_\alpha$.

Предложение 3. *Пусть в точке $t \in \Gamma$ м-ф G имеет два существенных предельных значения — G_1 и G_2, причем $\det G_1G_2 \neq 0$. Тогда условие $t \in \Gamma_2(G)$ эквивалентно тому, что спектр матрицы $G_1^{-1}G_2$ сосредоточен в секторе $S_{2\alpha}$ при некотором $\alpha < \pi/\bar{p}$.*

Доказательство. Если $\mathcal{H}(AG_jB) \subset S_\alpha$, то $\mathcal{H}(G_jBA^{*-1}) \subset S_\alpha$, и потому спектр $\sigma(C)$ матрицы $C = A^*B^{-1}G_1^{-1}G_2BA^{*-1}$ лежит в $S_{2\alpha}$. В том же секторе лежит поэтому и спектр матрицы $G_1^{-1}G_2$, подобной C. Пусть, обратно, $\sigma(G_1^{-1}G_2) \subset S_{2\alpha}$ при некотором $\alpha < \pi/\bar{p}$. Введем в рассмотрение матрицы: X, приводящую $G_1^{-1}G_2$ к жордановой нормальной форме T, $Y_\varepsilon = (\varepsilon^j\delta_{ij})$, $Z = (z_j\delta_{ij})$, где $|z_j| = 1$, $\varepsilon > 0$; о выборе величины ε и аргументов z_j будет сказано ниже. Положим $A = Y_\varepsilon^{-1}X^{-1}G_1^{-1}$, $B = XY_\varepsilon Z$. Тогда $AG_1B = Z$, $AG_2B = Y_\varepsilon^{-1}TY_\varepsilon Z = MZ + \varepsilon V$, где $M = (\mu_j\delta_{ij})$ — диагональная матрица, составленная из собственных чисел $G_1^{-1}G_2$, V — некоторая матрица, все ненулевые элементы которой сосредоточены над главной диагональю и по модулю равны единице. Пользуясь условием $\mu_j \in S_{2\alpha}$, можно подобрать z_j так, чтобы $z_j \in S_\alpha$ и $\mu_jz_j \in S_\alpha$. Тогда $\mathcal{H}(MZ) \subset S_\alpha$, и потому при достаточно малом ε и некотором $\alpha' \in (\alpha, \pi/\bar{p})$: $\mathcal{H}(MZ + \varepsilon V) \subset S_{\alpha'}$. Поскольку, кроме того, $\mathcal{H}(Z) \subset S_\alpha$, то $t \in \Gamma_2(G)$.

Из предложения 3 следует, что множество $\Gamma_0(G) = \Gamma_1(G) \setminus \Gamma_2(G)$ состоит в точности из тех точек $t \in \Gamma$, для которых выполнено условие: 1′) существенные предельные значения $G(t \pm 0)$ единственны, аргументы собственных чисел матрицы $G^{-1}(t-0)\,G(t+0)$ отличны от $2\pi/\bar{p}$ и по крайней мере один лежит между $2\pi/p$ и $2\pi/q$.

Предложение 4. *Для м-ф $G \in \tilde{A}_n(p)$ множество $\Gamma_0(G)$ конечно.*

Доказательство. Все существенные предельные значения м-ф G в точках из достаточно малой левой (правой) полуокрестности точки t настолько близки к $G(t-0)$ $(G(t+0))$, а потому и друг к другу, что собственные числа их отношений отличаются от 1 меньше чем $\arcsin 2\pi/\bar{p}$, и потому аргументы их не могут лежать между $2\pi/p$ и $2\pi/q$. Следовательно,

$\Gamma_0(G)$ состоит из изолированных точек. Но будучи дополнением к открытому множеству $\Gamma_2(G)$, $\Gamma_0(G)$ замкнуто. Отсюда следует конечность $\Gamma_0(G)$.

Таким образом, $\widetilde{A}\ (p)$ можно определять и как класс таких м-ф G, принадлежащих L_∞ вместе с обратными, для которых при всех $t\in\Gamma$, кроме, быть может, конечного числа точек t_j, $j=1, \ldots, N$, выполнено условие 2), а в точках t_j — условие 1'). Класс $\widetilde{A}_1(p)$ совпадает поэтому с введенным в [6] классом $\widetilde{A}\ (p)$.

Предложение 5. *М-ф $G\in\widetilde{A}_n(p)$ допускает представление*

$$G=G_{PC}G_S, \tag{2}$$

в котором множитель G_{PC} — кусочно-непрерывная Ф-факторизуемая в L_p м-ф, а м-ф G_S непрерывна в точках разрыва G_{PC} и при некотором $\alpha<\pi/\overline{p}$ α-секториальна: $\mathcal{H}(G_S(\tau))\subset S_\alpha$ почти для всех $\tau\in\Gamma$. При этом G также Ф-факторизуема в L_p, а ее суммарный индекс совпадает с суммарным индексом м-ф G_{PC}.

Доказательство. Согласно предложению 4 $\Gamma_0(G)$ — некоторое конечное множество $\{\tau_j\}_1^k$. Введем непрерывную и невырожденную на $\Gamma\setminus\Gamma_0(G)$ м-ф F_1 таким образом, чтобы $F_1(\tau_j\pm 0)=G(\tau_j\pm 0)$, $j=1,\ldots,k$, и положим $H=F_1^{-1}G$, $A_{\tau_j,H}=B_{\tau_j,H}=I$, $A_{t,H}=A_{t,G}F(t)$, $B_{t,H}=B_{t,G}$ при $t\neq\tau_j$. Тогда $\Gamma_2(H)=\Gamma$. Из соответствующего покрытия $\{\gamma_{t,H}\}$ контура Γ выберем конечное подпокрытие $\{\gamma_{t_j}\}_{j=1}^N$. Сужая при необходимости некоторые из дуг γ_{t_j}, можно добиться того, чтобы каждая точка $t\in\Gamma$ принадлежала не более чем двум, а точки t_j — ровно одному элементу покрытия. Определим теперь м-ф F_2 следующим образом: если t принадлежит единственному элементу покрытия γ_{t_j}, то $F_2(t)=B_{t_j,H}^{*-1}A_{t_j,H}$; если же $t\in\gamma_{jk}=\gamma_{t_j}\cap\gamma_{t_k}$, $j\neq k$, $s(t)$ — длина пересечения γ_{jk} с той из дуг (t_j,t), которая лежит в γ_{t_j}, s — длина γ_{jk}, то

$$F_2(t)=s^{-1}s(t)\,F_2(t_j)+(1-s^{-1}s(t))\,F_2(t_k). \tag{3}$$

М-ф F_2, очевидно, непрерывна. Кроме того, почти для всех $t\in\gamma_{t_j}\setminus\bigcup\{\gamma_{t_k}: k\neq j\}$: $\mathcal{H}(A_{t_j,H}H(t)\,B_{t_j,H})\subset S_\alpha$, где $\alpha=\max\{\alpha_{t_j}\}_{j=1}^N<\pi/\overline{p}$, а потому и $\mathcal{H}(F_2(t)\,H(t))\subset S_\alpha$. Почти для всех $t\in\gamma_{jk}$ отсюда получаем, что $\mathcal{H}(F_2(t_j)\,H(t))\subset S_\alpha$ и $\mathcal{H}(F_2(t_k)\,H(t))\subset S_\alpha$. В силу выпуклости S_α находим из (2), что $\mathcal{H}(F_2(t)\,H(t))\subset S_\alpha$. Итак, м-ф $G_s=F_2H\,(=F_2F_1^{-1}G)$ α-секториальна. В точках τ_j, $j=1,\ldots,k$, она непрерывна вместе с м-ф H. Положив $G_{PC}=F_1F_2^{-1}$, мы обеспечим выполнение равенства (2) и кусочную непрерывность м-ф G_{PC}. При этом матрицы $G_{PC}^{-1}(\tau_j-0)\,G_{PC}(\tau_j+0)$ и $G^{-1}(\tau_j-0)\ G(\tau_j+0)$ подобны, так что м-ф G_{PC} Ф-факторизуема в L_p согласно теореме 1. α-секториальная м-ф G_S Ф-факторизуема в L_p в силу теоремы 3 из [7] (см. также теорему 14 в [10]), ее суммарный индекс при этом равен нулю.

При доказательстве Ф-факторизуемости м-ф G будет использоваться тот факт, что нетеровость оператора $P_+ + GP_-$ эквивалентна нетеровости $T(G)=P_-G\,|\,\mathrm{Im}P_-$, а индексы этих операторов совпадают (см. [2]). Из равенства (2) следует, что

$$T(G)=T(G_{PC})\,T(G_S)+X, \tag{4}$$

где

$$X=P_-G_{PC}P_+G_S\,|\,\mathrm{Im}\,P_-. \tag{5}$$

В каждой точке $t\in\Gamma$ непрерывна хотя бы одна из м-ф G_{PC}, G_S, и потому определяемый формулой (5) оператор X локально эквивалентен нулю. Поэтому [11] оператор X вполне непрерывен. Отсюда и из (4) следует, что оператор $T(G)$ нетеров, а индекс его равен сумме индексов операторов $T(G_{PC})$ и $T(G_S)$. Иными словами, м-ф G Ф-факторизуема в L_p, причем $\varkappa(G)=\varkappa(G_{PC})+\varkappa(G_S)=\varkappa(G_{PC})$.

3. Для м-ф $G \in TL$ обозначим через Γ' множество тех точек $t \in \Gamma$, в которых существенные предельные значения слева и справа единственны; положим $\Gamma'' = \Gamma \diagdown \Gamma'$. Очевидно, $\Gamma_1(G) \subset \Gamma'$. Существенные предельные значения м-ф G в точке $t \in \Gamma$ будем обозначать через $G_1(t)$ и $G_2(t)$, условившись при этом, что если $t \in \Gamma'$, то $G_1(t)$ — предельное значение справа, $G_2(t)$ — слева.

Теорема 2. *Для Ф-факторизуемости м-ф $G \in TL$ хотя бы в одном L_p необходимо, чтобы*

$$\det G_1(t) G_2(t) \neq 0 \text{ при всех } t \in \Gamma. \tag{6}$$

Если это условие выполнено, и $\omega_1(t), \ldots, \omega_n(t)$ ($\in[0, 2\pi)$)— набор аргументов собственных чисел матрицы $G_2^{-1}(t)\, G_1(t)$, то м-ф G Ф-факторизуема в L_p тогда и только тогда, когда 1) $\omega_j(t) \neq 2\pi/p$, $j = 1, \ldots, n$, $t \in \Gamma'$; 2) *точки* $\omega_j(t)$ *не лежат на отрезке с концами $2\pi/p$ и $2\pi/q$*, $j = 1, \ldots, n$, $t \in \Gamma''$.

Доказательство. Предположим, что условие (6) выполнено. Если 1) также выполнено, то $\Gamma_1(G) = \Gamma'$. Если же выполнено и 2), то в силу предложения 3 $\Gamma_2(G) \supset \Gamma''$. Следовательно, $\Gamma_1(G) \cup \Gamma_2(G) = \Gamma$, т. е. $G \in A_n(p)$. Ф-факторизуемость м-ф G следует теперь из предложения 5.

Пусть теперь, обратно, м-ф $G \in TL$ Ф-факторизуема в L_p. Тогда $G^{-1} \in \in L_\infty$ [2], и потому выполняется условие (6). Выбрав $t \in \Gamma'$ произвольно, введем непрерывную и невырожденную на $\Gamma \diagdown \{t\}$ м-ф G_t, имеющую в точке t односторонние пределы $G_t(t \pm 0) = G(t \pm 0)$. В точках $\tau \neq t$ м-ф G_t локально эквивалентна невырожденным постоянным матрицам, а в точке t — м-ф G. В силу локального принципа [2, 11] м-ф G_t Ф-факторизуема в L_p. Отсюда и из теоремы 1 следует, что условие 1) выполнено.

Остается доказать необходимость условия 2) для Ф-факторизуемости м-ф G в L_p. При $p = 2$ условие 2) (как и 1)) эквивалентно тому, что $\omega_j(t) \neq \neq \pi$, $j = 1, \ldots, n$, и требуемое утверждение имеется в [4]. Будем считать поэтому, что $p \neq 2$. Допустим, что условие 2) нарушается, т. е. при некотором $t_0 \in \Gamma''$ и $j \in \{1, \ldots, n\}$ $\omega_j(t_0)$ лежит на отрезке Ω с концами $2\pi/p$, $2\pi/q$.

Выбрав открытую дугу γ ($\ni t$), введем м-ф G_γ, совпадающую вне γ с G, а на γ принимающую лишь два значения — G_1 и G_2. В силу устойчивости свойства Ф-факторизуемости при малых возмущениях, м-ф G_γ будет Ф-факторизуема в L_p, если дугу γ взять достаточно малой, а матрицы G_1 и G_2 — достаточно близкими к $G_1(t_0)$ и $G_2(t_0)$ соответственно. При этом можно добиться того, чтобы все собственные числа $\nu_1, \ldots, \nu_n$ матрицы $G_2^{-1} G_1$ были различны, аргумент одного из них (ν_1) лежал внутри отрезка Ω и был несоизмерим с π. Наряду с G_γ рассмотрим м-ф F, совпадающую на γ с G_j, а вне γ — с G_2. Эта м-ф невырождена, удовлетворяет условиям 1), 2) теоремы при $p = 2$ и по доказанному выше (см. также [4]) Ф-факторизуема в L_2. Таким образом, для м-ф G и F выполнены условия предложения 2. Пусть t_1 и t_2 — соседние с t_0 (слева и справа соответственно) точки множества Δ, о котором идет речь в этом предложении. Тогда, в силу предложения 2, факторизационный множитель F_+ м-ф F должен быть суммируемым с показателем p, а F_+^{-1}— с показателем q на любом подмножестве дуги (t_1, t_2), отделенном от ее концов и точки t_0. В то же время $F = G_2 W^{-1} H W$, где W — матрица, осуществляющая приведение $G_2^{-1} G_1$ к диагональному виду N, $H(t) = I$ (N) в тех точках $t \in \Gamma$, для которых $F(t) = G_1(G_2)$. Поскольку $t_0 \in \Gamma''$, числа 1 и ν_j будут существенными предельными значениями для j-го диагонального элемента h_j м-ф H в точке t_0. Следовательно, к факторизационным множителям $h_j^{\pm}$ функции h_j применимо предложение 1, причем $\theta = \arg \nu_j$. Из условия $2\pi/\bar{p} < \arg \nu_j < 2\pi/\bar{q}$ следует, что $2\pi/\min\{\theta, 2\pi - -\theta\} < \bar{p}$. Но тогда в силу предложения 1 найдется дуга, лежащая внутри (t_1, t_0) либо (t_0, t_2), на которой ни одна из функций $(h_j^+)^{\pm 1}$ не будет суммируема с показателем $\bar{p}$. Отсюда следует, что на γ' не будут суммируемы с показателем $\bar{p}$ и м-ф $F_+^{\pm 1}$. Полученное противоречие завершает доказательство.

1. *Calderon A. P.* Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators.— Proc. Nat Acad. Sci. USA, 1977, **74**, N 4, p. 1324—1327.
2. *Симоненко И. Б.* Некоторые общие вопросы теории краевой задачи Римана.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1968, **32**, № 5, с. 1138—1146.
3. *Пресдорф З.* Некоторые классы сингулярных уравнений.— М. : Мир, 1979.— 493 с.
4. *Clancey K. F.* A local result for systems of Riemann—Hilbert barrier problems.— Trans. Amer. Math. Soc., 1974, **200**, N 1, p. 315—325.
5. *Спитковский И. М.* О блочных операторах и связанных с ними вопросах теории факторизации матриц-функций.— ДАН СССР, 1980, **254**, № 4, с. 816—820.
6. *Кокилашвили В. М.*, *Пааташвили В. А.* Краевая задача линейного сопряжения с измеримыми коэффициентами. Тр. Тбилис. мат. ин-та АН ГССР, 1977, **55**, с. 59—92.
7. *Спитковский И. М.* О факторизации матриц-функций, хаусдорфово множество которых расположено внутри угла.— Сообщ. АН ГССР, 1977, **36**, № 3, с. 561—564.
8. *Симоненко И. Б.* Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее применение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1964, **28**, № 2, с. 277—306.
9. *Хайкин М. И.* Исключительный случай однородной задачи Римана с конечным индексом коэффициента.— Изв. вузов. Математика, 1972, № 5, с. 92—103.
10. *Спитковский И. М.* Некоторые оценки для частных индексов измеримых матриц-функций.— Мат. сб., 1980, **111**, № 2, с. 227—248.
11. *Симоненко И. Б.* Новый общий метод исследования операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений. I.— Изв. АН СССР. Сер. матем., 1965, **29**, № 3, с. 567—586.

Отделение экономики и экологии
Мирового океана
Морского гидрофизического института АН УССР

Поступила в редакцию
27.12.81