УДК 517.947

А. Г. Лавер, Н. Р. Сиденко

Усреднение периодической по времени краевой задачи для сингулярно возмущенного слабо нелинейного параболического уравнения

Исследуем поведение при $\varepsilon \to +0$ решения краевой задачи с разрывными коэффициентами

$$\varepsilon\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i}\left(a_{ij}\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) + a_0\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}\right)u^\varepsilon = f\left(x, t, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon\right), \quad x \in \Omega, \ t \in R,$$
$$u^\varepsilon(x, t+T) = u^\varepsilon(x, t), \quad u^\varepsilon(x, t)\big|_\Gamma = 0, \tag{1}$$

где Ω — ограниченная область в R^n с границей Γ, по повторяющимся индексам производится суммирование от 1 до n; $\overline{\partial}/\partial x_i$ — вариационные производные, $T = \mathrm{const} > 0$, имея в виду, что выполняются неравенства

$$a_{ij}(x, t, y)\xi_i\xi_j \geqslant \alpha_0|\xi|^2, \quad a_0(x, t, y) \geqslant 0 \quad \forall \xi, y \in R^n, \quad x \in \Omega, \quad t \in R;$$
$$\alpha_0 = \mathrm{const} > 0. \tag{2}$$

Коэффициенты $a_{ij}(x, t, y)$, $a_0(x, t, y)$ и функция $f(x, t, y, u)$, $u \in R$, периодические по $y \in R^n$ с параллелепипедом периодичности $Y = \prod_{j=1}^{n}(0, y_j^0)$ и по t — с периодом T (обозначение: $a_{ij}(x, t, \cdot) \in \mathscr{T}(Y)$, $a_{ij}(x, \cdot, y) \in \mathscr{T}(0, T)$ и т. д.).

1. Будем предполагать, что данные задачи удовлетворяют следующим условиям: 1) Ω — липшицева область; 2) коэффициенты $a_{ij}(x, t, y)$, $a_0(x, t, y)$ определены, измеримы и ограничены на $\Omega \times R \times R^n$, причем равномерно периодичны по t с периодом T и по y с параллелепипедом периодичности Y, и удовлетворяют условиям (2); 3) функция $f(x, t, y, u)$ $\forall u \in R$ измерима по $(x, t, y) \in \Omega \times R \times R^n$; 4) $\forall (x, u) \in \Omega \times R$ равномерно периодична по t с периодом T и по y с параллелепипедом Y; 5) равномерно непрерывна по (x, u) на каждом ограниченном множестве $\{x \in \Omega, |u| < M\}$, причем равномерно относительно почти всех (п. в.) $(t, y) \in (0, T) \times Y$; 6) всюду в $\Omega \times (0, T) \times Y \times R$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, t, y, u)| \leqslant f_0(x, t) + c|u|, \quad f_0 \in L_2(Q_T), \quad c = \mathrm{const}, \quad Q_T = \Omega \times (0, T); \tag{3}$$

7) не возрастает по u $\forall (x, t, y) \in \Omega \times (0, T) \times Y$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1) — 7). *Тогда при* $\varepsilon > 0$ *задача* (1) *будет иметь единственное решение*

$$u^\varepsilon \in L_2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap H^{1/2}(0, T; L_2(\Omega)).$$

Доказательство. Положив $f^\varepsilon(u)(x, t) = f(x, t, x/\varepsilon, u(x, t))$, определим оператор суперпозиции, действующий в силу условий 3), 5), 6) [1] в пространстве $L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$. Определим линейный оператор A_ε с областью $D(A_\varepsilon) = \{u \in L_2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)) \cap \mathscr{T}(0, T) \mid \partial u/\partial t \in L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$, совпадающий с левой частью уравнения (1) и действующий в пространство $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap \mathscr{T}(0, T)$. Ввиду (2) $\forall u \in L_2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)) \cap \mathscr{T}(0, T)$ имеем неравенство

$$(A_\varepsilon u, u) = \int_{Q_T}\left(a_{ij}^\varepsilon(x, t)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_i} + a_0^\varepsilon(x, t)u^2\right)dxdt \geqslant \alpha_0\|u\|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))}, \tag{4}$$

где $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(Q_T)$, $a_{ij}^\varepsilon(x, t) = a_{ij}(x, t, x/\varepsilon)$, $a_0^\varepsilon(x, t) = a_0(x, t, x/\varepsilon)$. Следовательно, справедлива оценка

$$\| u \|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \leqslant \frac{1}{\alpha_0} \| A_\varepsilon u \|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}, \tag{5}$$

а значит, в силу уравнения (1)

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \leqslant C_\varepsilon (\| u \|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} + \| A_\varepsilon u \|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}) \leqslant$$
$$\leqslant C_\varepsilon \left(1 + \frac{1}{\alpha_0}\right) \| A_\varepsilon u \|_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))}. \tag{6}$$

Из оценок (5), (6) вытекает существование ограниченного обратного оператора $A_\varepsilon^{-1} : L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \cap \mathscr{T}(0, T) \to D(A_\varepsilon)$, где $D(A_\varepsilon)$ рассматривается как гильбертово пространство с нормой

$$\| u \|_{A_\varepsilon} = \left[\| u \|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} + \left\| \frac{\partial u}{\partial t} \right\|^2_{L_2(0,T;H^{-1}(\Omega))} \right]^{1/2}.$$

Так что, задаче (1) эквивалентно функциональное уравнение в $L_2(Q_T) \cap \cap \mathscr{T}(0, T)$:

$$u^\varepsilon = A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u^\varepsilon). \tag{7}$$

Разрешимость последнего докажем с помощью принципа Лере—Шаудера [2]. С этой целью рассмотрим уравнение с параметром $\alpha \in [0, 1]$

$$u_\alpha^\varepsilon = \alpha A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u_\alpha^\varepsilon). \tag{8}$$

1. Непрерывность оператора в правой части по параметру α, равномерная на каждом ограниченном множестве в $[0, 1] \times (L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T))$, имеет место в силу непрерывности A_ε^{-1} и ограниченности оператора суперпозиции в $L_2(Q_T)$.

2. При каждом фиксированном $\alpha \in [0, 1]$ правая часть (8) вполне непрерывна как преобразование $L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T) \to L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$.

Действительно, непрерывность оператора — следствие непрерывности оператора суперпозиции [1] как преобразования $L_2(Q_T) \to L_2(Q_T)$, ограниченности A_ε^{-1} и вложений $L_2(Q_T) \subset L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$, $D(A_\varepsilon) \subset L_2(Q_T)$. Далее, на основании вложения [3] $D(A_\varepsilon) \subset C(0, T; L_2(\Omega))$ имеем непрерывное отображение

$$A_\varepsilon^{-1} : L_2(0, T; H^{-1}(\Omega)) \to \mathring{V}_2^{1,0}(Q_T) = L_2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)) \cap C(0, T; L_2(\Omega)). \tag{9}$$

Отсюда следует, что $A_\varepsilon^{-1} f \in \mathring{W}_2^{1,1/2}(Q_T)$ $\forall f \in L_2(Q_T)$ (см. [4], гл. III, теор. 4.3). При этом справедлива оценка

$$\| A_\varepsilon^{-1} f \|_{\mathring{W}_2^{1,1/2}(Q_T)} \leqslant C_\varepsilon \| A_\varepsilon^{-1} f \|_{\mathring{V}_2^{1,0}(Q_T)} \tag{10}$$

с постоянной C_ε, не зависящей от f (см. там же, лемма 4.2). Из (9), (10) $\forall f \in L_2(Q_T)$ получаем оценку

$$\| A_\varepsilon^{-1} f \|_{\mathring{W}_2^{1,1/2}(Q_T)} \leqslant C_\varepsilon \| f \|_{L_2(Q_T)}, \tag{11}$$

и не зависящей от f константой C_ε. Ввиду вложений

$$\mathring{W}_2^{1,1/2}(Q_T) \subset H^{1/2}(Q_T) \subset L_2(Q_T), \tag{12}$$

где последнее вложение компактно, заключаем, что A_ε^{-1} — компактное преобразование $L_2(Q_T) \to L_2(Q_T)$. Это доказывает компактность оператора $A_\varepsilon^{-1} f^\varepsilon(u)$ в $L_2(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T)$, поскольку преобразование $f^\varepsilon(u)$ ограничено.

3. Получим равномерную относительно α априорную оценку в $L_2(Q_T)\cap$ $\cap\mathscr{T}(0,T)$ решений уравнения (8). Поскольку $u^\varepsilon_\alpha\in D(A_\varepsilon)$, то, домножив в $L_2(Q_T)$ скалярно уравнение $A_\varepsilon u^\varepsilon_\alpha=\alpha f^\varepsilon(u^\varepsilon_\alpha)$ на u^ε_α, в силу (4) и условия 7) теоремы получаем

$$\alpha_0\|u^\varepsilon_\alpha\|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))}\leqslant\alpha(f^\varepsilon(u^\varepsilon_\alpha),u^\varepsilon_\alpha)=\alpha(f^\varepsilon(u^\varepsilon_\alpha)-f^\varepsilon(0),u^\varepsilon_\alpha)+\alpha(f^\varepsilon(0),u^\varepsilon_\alpha)\leqslant$$
$$\leqslant C\|f^\varepsilon(0)\|_{L_2(Q_T)}\|u^\varepsilon_\alpha\|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))},$$

т. е. $\|u^\varepsilon_\alpha\|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))}\leqslant C_1\|f^\varepsilon(0)\|_{L_2(Q_T)}\quad\forall\alpha\in[0,1]$.

Таким образом, для уравнения (8) выполнены все условия принципа Лере — Шаудера, из которого следует разрешимость уравнения (7). При этом в действительности его решение $u^\varepsilon\in D(A_\varepsilon)\cap\mathring{W}_2^{1,1/2}(Q_T)$, что и утверждалось в теореме.

Вследствие неравенства (4) и условия 7) решение задачи (1) единственно в $D(A_\varepsilon)$. Действительно,

$$\alpha_0\|u^\varepsilon-u^\varepsilon_1\|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))}\leqslant(A_\varepsilon(u^\varepsilon-u^\varepsilon_1),u^\varepsilon-u^\varepsilon_1)=(f^\varepsilon(u^\varepsilon)-f^\varepsilon(u^\varepsilon_1),u^\varepsilon-u^\varepsilon_1)\leqslant 0.$$

Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Утверждение теоремы 1 справедливо и при меньших ограничениях на коэффициенты и правую часть уравнения (1). Однако указанные условия 1)—7) существенны для исследования асимптотического поведения решения.

2. Исследуем поведение решения при $\varepsilon\to+0$. С этой целью определим функцию $\hat{u}(x,t)$ как решение гомогенизированной задачи [5]

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(q_{ij}(x,t)\frac{\partial\hat{u}}{\partial x_j}\right)+\bar{a}_0(x,t)\hat{u}=\bar{f}(x,t,\hat{u}),\quad \hat{u}|_\Gamma=0,\tag{13}$$

где

$$\bar{a}_0(x,t)=[a_0(x,t,\cdot)],\ \ \bar{f}(x,t,u)=[f(x,t,\cdot,u)]\equiv\bar{f}(u)(x,t),$$
$$q_{ij}=\left[a_{ij}(x,t,\cdot)-a_{kj}(x,t,\cdot)\frac{\partial\chi^i}{\partial y_k}(x,t,\cdot)\right],\quad [u(x,t,\cdot)]=\frac{1}{|Y|}\int\limits_Y u(x,t,y)dy.\tag{14}$$

Функция $\chi^k(x,t,y)$, $k=\overline{1,n}$, $(x,t)\in\Omega\times R$, определяется как решение задачи

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ji}(x,t,y)\frac{\partial}{\partial y_j}(\chi^k-y_k)\right)=0,\quad \chi^k(x,t,\cdot)\in V^\perp(Y),$$
$$V(Y)=H^1(Y)\cap\mathscr{T}(Y),\quad V^\perp(Y)=\{v\in V(Y)\,|\,[v]=0\}.\tag{15}$$

Нетрудно видеть, что задача (15) имеет единственное решение, которое является ограниченной периодической по t с периодом T абстрактной функцией от (x,t) со значениями в $V^\perp(Y)$. Задача (13) имеет единственное решение в $L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))$. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 1.

Рассмотрим случай кусочно-гладких коэффициентов a_{ij}. Пусть $\bar{Y}=\bigcup\limits_{i=1}^s\bar{Y}_i$, где $s\in N$, $\partial Y_i\diagdown\partial Y\in C^2$ (границы областей, в которых $a_{ij}(x,t,\cdot)$ гладкие, — дифференцируемые многообразия класса C^2). Обозначим $\vec{W}^l_p(Y)=\dot{+}_{i=\overline{1,s}}W^l_p(Y_i)$, $\vec{C}^1(Y)=\dot{+}_{i=\overline{1,s}}C^1(Y_i)$, $C^1_I(Y)=\vec{C}^1(Y)\cap C(Y)$. Справедлива теорема.

Т е о р е м а 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и следующие:* 1) *коэффициенты* a_{ij}, a_0 *равномерно непрерывны по* x *и для п. в.* $(t,y)\in$ $\in(0,T)\times Y$, $\forall x\in\Omega$ *имеют измеримую ограниченную производную по* t;

2) $a_{ij}(x,t,\cdot)\in C(Q_T;\vec{W}^1_\infty(Y))$, $\partial a_{ij}/\partial x_l\in C(Q_T;\vec{W}^1_{p_0}(Y))$, $p_0>n$; 3) *для п. в.* (t,y), $\forall (x,u)\in\Omega\times R$ *существует измеримая производная* f_t, *удовлетворяющая оценке* (3); 4) *для п. в.* (t,y) *и* $\forall x\in\Omega$ *функция* f *абсолютно непрерывна по* u. *Тогда при* $\varepsilon\to+0$ *решение* $u^\varepsilon\to\hat{u}$ *слабо в* $\mathring{H}^1_T=\{u\in H^1(Q_T)\cap\mathscr{I}(0,T)\,|\,u|_\Gamma=0\}$.

Доказательству теоремы предпошлем лемму.

Лемма. *Пусть заданная на* $\Omega\times(0,T)\times R^n$ *измеримая функция* $f(x,t,y)$ *равномерно периодична по* y *с параллелепипедом периодичности* Y, *равномерно непрерывна по* x, *причем равномерно относительно п. в.* $(t,y)\in(0,T)\times Y$, *и имеет мажоранту* $f_0(x,t)\in L_p(Q_T)$, $p\geqslant 1$. *Тогда при* $\varepsilon\to+0$ $f(x,t,x/\varepsilon)\to\bar{f}(x,t)=[f(x,t,\cdot)]$ *слабо в* $L_p(Q_T)$.

Доказательство леммы. Нужно показать, что

$$F^\varepsilon\varphi\equiv\int\limits_{Q_T}\left[f\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\bar{f}(x,t)\right]\varphi(x,t)\,dxdt\to 0\quad\forall\varphi\in L_q(Q_T),\quad q=p/(p-1).\tag{16}$$

Выбрав $\delta>0$, аппроксимируем фиксированную $\varphi\in L_q(Q_T)$ функцией $\tilde{\varphi}\in C(Q_T)$ так, чтобы $\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L_q(Q_T)}<\delta$. Тогда

$$|F^\varepsilon(\varphi-\tilde{\varphi})|\leqslant\left\|f\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\bar{f}(x,t)\right\|_{L_p(Q_T)}\|\varphi-\tilde{\varphi}\|_{L_q(Q_T)}\leqslant 2\|f_0\|_{L_p(Q_T)}\delta.\tag{17}$$

Рассмотрим в R^n периодическую структуру с образующим параллелепипедом Y. Гомотетией $\{x=\varepsilon y,\ y\in R^n\}$ в R^n задана соответствующая мелкая периодическая структура с узлами x^ε_k, $k\in N$. Обозначим Π_ε объединение параллелепипедов мелкой структуры, целиком содержащихся в Ω. Пусть Ω_δ — множество точек в Ω, расстояние от которых до Γ меньше δ. Очевидно, что $\Omega\setminus\Pi_\varepsilon\subset\Omega_{\varepsilon d}$, где d — диаметр Y. Представив $F^\varepsilon\tilde{\varphi}$ в виде

$$F^\varepsilon\tilde{\varphi}=\Bigg(\int\limits_{\Pi_\varepsilon\times(0,T)}+\int\limits_{(\Omega\setminus\Pi_\varepsilon)\times(0,T)}\Bigg)\left[f\left(x,t,\frac{x}{\varepsilon}\right)-\bar{f}(x,t)\right]\tilde{\varphi}(x,t)\,dxdt\equiv I^\varepsilon_1+I^\varepsilon_2,\tag{18}$$

имеем

$$|I^\varepsilon_2|\leqslant 2\sup_{Q_T}|\tilde{\varphi}|\int\limits_{(0,T)\times\Omega_{\varepsilon d}}f_0(x,t)\,dxdt\to 0\quad(\varepsilon\to+0),\tag{19}$$

$$I^\varepsilon_1=\varepsilon^n\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{Y\times(0,T)}[f(x^\varepsilon_k+\varepsilon y,t,y)-\bar{f}(x^\varepsilon_k+\varepsilon y,t)]\,[\tilde{\varphi}(x^\varepsilon_k+\varepsilon y,t)-\tilde{\varphi}(x^\varepsilon_k,t)]\times$$
$$\times\,dydt+\varepsilon^n\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{Y\times(0,T)}[\ldots]\,\tilde{\varphi}(x^\varepsilon_k,t)\,dydt\equiv I^\varepsilon_3+I^\varepsilon_4,\tag{20}$$

где $N(\varepsilon)\leqslant|\Omega|/(\varepsilon^n|Y|)$. Интеграл I^ε_3 оценивается через модуль непрерывности $\omega_{\tilde{\varphi}}(h)$ функции $\tilde{\varphi}$ в Q_T:

$$|I^\varepsilon_3|\leqslant 2\|f_0\|_{L(Q_T)}\omega_{\tilde{\varphi}}(\varepsilon d)\to 0\quad(\varepsilon\to+0).\tag{21}$$

В силу предположенной равномерной непрерывности $f(x,t,y)$ по x при всех достаточно малых ε справедливо неравенство

$$\varepsilon^n\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{Y\times(0,T)}|f(x^\varepsilon_k+\varepsilon y,t,y)-f(x^\varepsilon_k,t,y)|\,|\tilde{\varphi}(x^\varepsilon_k,t)|\,dydt\leqslant\sup_{Q_T}|\tilde{\varphi}|\,|Q_T|\,\delta,\tag{22}$$

и аналогичное — для $\bar{f}(x,t)$. Так что, для оценки I^ε_4 осталось рассмотреть сумму

$$\varepsilon^n\sum_{k=1}^{N(\varepsilon)}\int\limits_{Y\times(0,T)}[f(x^\varepsilon_k,t,y)-\bar{f}(x^\varepsilon_k,t)]\,\tilde{\varphi}(x^\varepsilon_k,t).$$

Но каждый интеграл в ней, по определению $\bar{f}(x, t)$, равен нулю. Ввиду (17)—(22) имеет место (16).

Доказательство теоремы. Следуем методу Л. Тартара, изложенному в [5]. Так же, как при доказательстве теоремы 1, получаем равномерную оценку

$$\| u^\varepsilon \|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \leqslant C \| f_0 \|_{L_2(Q_T)} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{23}$$

Обозначая $p_i^\varepsilon = a_{ij}^\varepsilon \partial u^\varepsilon / \partial x_j$, ввиду (23) имеем

$$\| p_i^\varepsilon \|_{L_2(Q_T)} \leqslant M_1 = \mathrm{const} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{24}$$

Рассмотрим разностное отношение $v_h^\varepsilon(x, t) = h^{-1}\Delta_h u^\varepsilon(x, t) \doteq h^{-1}[u^\varepsilon(x, t+h) - u^\varepsilon(x, t)]$, удовлетворяющее уравнению

$$\varepsilon \frac{\partial v_h^\varepsilon}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left[h^{-1}\Delta_h \left(a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) \right] + h^{-1}\Delta_h (a_0^\varepsilon u^\varepsilon) = h^{-1}\Delta_h f^\varepsilon (u^\varepsilon)(x, t). \tag{25}$$

Учитывая условия 2), 3) теоремы 2, представим $h^{-1}\Delta_h f^\varepsilon$ для п. в. $(x, t) \in Q_T$ в форме

$$h^{-1}\Delta_h f^\varepsilon (u^\varepsilon)(x, t) = v_h^\varepsilon \int_0^1 f_u \left(x, t+h, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(x, t) + \tau \Delta_h u^\varepsilon(x, t) \right) d\tau + \\ + \int_0^1 f_t \left(x, t + \tau h, \frac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(x, t) \right) d\tau.$$

Аналогично, ввиду условия 1), имеем

$$h^{-1}\Delta_h \left(a_{ij}^\varepsilon \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j} \right) = h^{-1}\Delta_h a_{ij}^\varepsilon(x, t) \frac{\partial u^\varepsilon(x, t+h)}{\partial x_j} + a_{ij}^\varepsilon(x, t) \frac{\partial v_h^\varepsilon}{\partial x_j} = \\ = \int_0^1 \frac{\partial a_{ij}^\varepsilon(x, t+\tau h)}{\partial t} d\tau \frac{\partial u^\varepsilon(x, t+h)}{\partial x_j} + a_{ij}^\varepsilon(x, t) \frac{\partial v_h^\varepsilon}{\partial x_j},$$

$$h^{-1}\Delta_h (a_0^\varepsilon u^\varepsilon) = \int_0^1 \frac{\partial a_0^\varepsilon(x, t+\tau h)}{\partial t} d\tau u^\varepsilon(x, t+h) + a_0^\varepsilon(x, t) v_h^\varepsilon.$$

Умножая в $L_2(Q_T)$ равенство (25) на v_h^ε и принимая во внимание условие 1) теоремы и что $f_u \leqslant 0$, при помощи неравенства Коши с малым $\nu > 0$ получаем оценку

$$(\alpha_0 - \nu) \| v_h^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \leqslant C_\nu \int_0^1 (\| f_t \|^2_{L_2(Q_T)} + \| u^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))})\, d\tau.$$

Используя условие 3) теоремы и периодичность f и u^ε по t, из предыдущего неравенства выводим

$$\| v_h^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \leqslant C \left(\| f_0 \|^2_{L_2(Q_T)} + c^2 \| u^\varepsilon \|^2_{L_2(Q_T)} + \frac{1}{2} \| u^\varepsilon \|^2_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \right).$$

Таким образом, с учетом (23) имеем

$$\| v_h^\varepsilon \|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \leqslant M_2 = \mathrm{const} \quad \forall \varepsilon, h. \tag{26}$$

В силу слабой компактности пространства $L_2(0, T; \mathring{H}^1(\Omega))$ и полунепрерывности снизу его нормы, функции v_h^ε при $h \to 0$ слабо сходятся в этом пространстве к $\partial u^\varepsilon / \partial t$. При этом вследствие (26) справедлива равномерная относительно ε оценка

$$\left\| \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t} \right\|_{L_2(0,T;\mathring{H}^1(\Omega))} \leqslant M_2. \tag{27}$$

На основании (3), (23), (24), (27) можно выделить такие подпоследовательности, по-прежнему обозначенные u^ε, p_i^ε, $f^\varepsilon(u^\varepsilon)$, что а) $u^\varepsilon \to u$ в $\overset{\circ}{H}{}_T^1$ слабо, $p_i^\varepsilon \to p_i$, $f^\varepsilon(u^\varepsilon) \to F$ в $L_2(Q_T)$ слабо. Поскольку вложение $\overset{\circ}{H}{}_T^1 \subset L_2(Q_T)$ компактно, имеем также б) $u^\varepsilon \to u$ в $L_2(Q_T)$ сильно.

Переходя в (1) к слабому пределу в $L_2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ при $\varepsilon \to +0$, с учетом (27), условий а), б) и леммы имеем

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} p_i + \bar{a}_0 u = F. \tag{28}$$

Покажем, что $F = \bar{f}(u)$. В силу условия 7) теоремы 1

$$0 \geqslant (f^\varepsilon(u^\varepsilon) - f^\varepsilon(w), u^\varepsilon - w) \quad \forall w \in C(Q_T). \tag{29}$$

Используя б) и условия 5), 6) теоремы 1, на основании леммы переходим в (29) к пределу по ε: $0 \geqslant (F - \bar{f}(w), u - w)$. Последнее неравенство справедливо $\forall w \in L_2(Q_T)$ в силу непрерывности оператора $\bar{f}(u)$ в $L_2(Q_T)$. Положив $w = u - \lambda v$, $\lambda > 0$, $v \in L_2(Q_T)$, получаем $(F - \bar{f}(u - \lambda v), v) \leqslant 0$. Следовательно, устремив $\lambda \to +0$, имеем $(F - \bar{f}(u), v) \leqslant 0$ $\forall v \in L_2(Q_T)$. Отсюда $F = \bar{f}(u)$.

Согласно [6] $\forall p < \infty$ и заданного $p_0 > n$ имеем

$$\chi^k(x, t, y) \in C(Q_T; \vec{W}{}_p^2(Y)) \cap C(Q_T \times Y) \subset C(Q_T; C_l^1(Y)),$$
$$\frac{\partial \chi^k(x, t, y)}{\partial x_l} \in C(Q_T; \vec{W}{}_{p_0}^2(Y)) \cap C(Q_T \times Y) \subset C(Q_T; C_l^1(Y)), \quad l = \overline{1, n}. \tag{30}$$

Положим $W_k(x, t, y) = y_k - \chi^k(x, t, y)$, $W_k^\varepsilon(x, t) = x_k - \varepsilon\chi^k(x, t, x/\varepsilon)$. Выберем произвольную $\varphi \in \overset{\circ}{C}{}_T^1 = \{\varphi \in C^1(Q_T) \cap \mathscr{T}(0, T) \mid \varphi|_\Gamma = 0\}$. Умножая в $L_2(Q_T)$ уравнение (1) скалярно на φW_k^ε, получаем тождество

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi W_k^\varepsilon\right) + \left(p_i^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W_k^\varepsilon\right) + \varepsilon\left(p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}\right) +$$
$$+\left(p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial y_i}\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}\right) + (a_0^\varepsilon u^\varepsilon, \varphi W_k^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi W_k^\varepsilon). \tag{31}$$

Функция W_k удовлетворяет уравнению (15), а значит,

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j}\right)\right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}} = 0. \tag{32}$$

Ввиду (30) справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}\right) = \left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\right)\right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \tag{33}$$

вытекающее из (32). Умножив в $L_2(Q_T)$ равенство (33) на φu^ε, получаем

$$\left(a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon\right) + \left(a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \varphi \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right) =$$
$$= -\left(\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\right)\right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \varphi u^\varepsilon\right). \tag{34}$$

Из (31) и (34) следует

$$\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial t}, \varphi W_k^\varepsilon\right) + \left(p_i^\varepsilon, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} W_k^\varepsilon\right) + \varepsilon\left(p_i^\varepsilon, \varphi \frac{\partial W_k}{\partial x_i}\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}\right) - \left(a_{ji}^\varepsilon \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u^\varepsilon\right) - \left(\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\right)\right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}}, \varphi u^\varepsilon\right) + (a_0^\varepsilon u^\varepsilon, \varphi W_k^\varepsilon) = (f^\varepsilon(u^\varepsilon), \varphi W_k^\varepsilon). \quad (35)$$

Используя условие 2) теоремы и (30), ввиду леммы, получаем в $L_2(Q_T)$ слабые сходимости

$$\left\{a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j}\right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \to \left[a_{ji}(x, t, \cdot) \frac{\partial W_k(x, t, \cdot)}{\partial y_j}\right],$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ji}(x, t, y) \frac{\partial W_k(x, t, y)}{\partial y_j}\right)\right\}_{y=\frac{x}{\varepsilon}} \to \frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ji}(x, t, \cdot) \frac{\partial W_k(x, t, \cdot)}{\partial y_j}\right]. \quad (36)$$

Переходя в (35) к пределу по $\varepsilon \to +0$, с учетом а), б) и (36) имеем

$$\left(p_i, x_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) - \left(\left[a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\right], \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\right], \varphi u\right) + (\bar{a}_0 u, \varphi x_k) = (\bar{f}(u), \varphi x_k). \quad (37)$$

С другой стороны, умножим в $L_2(Q_T)$ равенство (28) на φx_k:

$$(p_k, \varphi) + \left(p_i, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} x_k\right) + (\bar{a}_0 u, \varphi x_k) = (\bar{f}(u), \varphi x_k). \quad (38)$$

Из (37) и (38) следует

$$(p_k, \varphi) = -\left(\left[a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\right], \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} u\right) - \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\left[a_{ji} \frac{\partial W_k}{\partial y_j}\right], \varphi u\right) = \left(q_{ki} \frac{\partial u}{\partial x_i}, \varphi\right)$$

$$\forall \varphi \in \mathring{C}_T^1,$$

т. е. $p_k = q_{ki}(x, t)\, \partial u / \partial x_i$. Таким образом, предельная функция $u(x, t)$ $\forall t$ является решением гомогенизированной задачи (13), т. е. $u = \hat{u}$. Теорема доказана.

Замечание. Фактически установлено, что при условиях теоремы 2 $u^\varepsilon \to \hat{u}$ слабо в $H^1(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0, T)$. При дополнительном условии $\Gamma \in C^2$ из (13) следует, что на самом деле $\hat{u} \in L_2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; \mathring{H}^1(\Omega)) \cap \mathcal{T}(0, T)$.

1. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций.— М. : Наука, 1966.— 496 с.
2. *Функциональный анализ.* СМБ.— М. : Наука, 1972.— 544 с.
3. *Лионс Ж.— Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения.— М. : Мир, 1971.— 371 с.
4. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.— М. : Наука, 1967.— 736 с.
5. *Bensoussan A., Lions J.-L.* Homogeneisation et perturbations singulieres.— В кн.: Теория кубатурных формул и приложения функционального анализа к задачам математической физики.— Новосибирск, 1976, № 1, с. 16—31.
6. *Шефтель З. Г.* Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами. — Сибирск. мат. журн., 1965, 6, № 3, с. 636—669.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
19.11.82