УДК 517.956.35

С. Я. Алиев, Ю. Л. Майстренко

Глобальная гладкая разрешимость нелинейной краевой задачи для квазилинейной гиперболической системы

1. Введение. В [1] установлены условия локальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейной гиперболической системы общего вида. В [2] показано, что при соответствующих предположениях о монотонности граничных и начальных данных из локальной разрешимости следует нелокальная.

В настоящей статье исследуется глобальная гладкая разрешимость системы двух уравнений

$$u_t + uu_x = 0, \quad v_t - vv_x = 0 \tag{1}$$

($(x, t) \in \Pi \overset{\text{def}}{=} [0, 1] \times \mathbb{R}^+$; $u, v\colon \Pi \to \mathbb{R}^1$) с нелинейными граничными условиями

$$u(0, t) = v(0, t), \quad v(1, t) = \varphi(u(1, t)), \qquad t \in \mathbb{R}^+, \tag{2}$$

и начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x), \qquad x \in [0, 1]. \tag{3}$$

Исследование проводится методом сведения исходной задачи к функциональному уравнению

$$z(t + z(t)) = \psi(z(t)), \qquad (\psi(z) = 2/\varphi(2/z)) \tag{4}$$

с отклонением аргумента $t \to t + z(t)$, зависящим от неизвестной функции [3, 4].

2. Глобальная разрешимость задачи. Рассмотрим задачу (1)—(3) в предположении, что функции φ, u_0, v_0 непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют условиям согласования

$$u_0(0) = v_0(0), \qquad v_0(1) = \varphi(u_0(1)), \tag{5}$$

$$\dot u_0(0) = -\dot v_0(0), \quad \dot v_0(1) = -u_0(1)\,\dot\varphi(u_0(1))\,\dot u_0(1)/\varphi(u_0(1)). \tag{6}$$

Допустим, что $u_0(x)$, $v_0(x) \in I$ при $x \in [0, 1]$ и $\overline{\varphi(I)} \subset I$, где $I \in \mathbb{R}^+$ — открытый ограниченный интервал, содержащий точки a, b, c, $0 < a < b < c$, такие, что $\varphi(a) = a$, $|\dot\varphi(a)| < 1$, $\varphi(b) = b$, $\dot\varphi(b) > 1$, $\varphi(c) = c$, $|\dot\varphi(c)| < 1$, $\varphi(u) < u$ при $u \in (a, b)$, $\varphi(u) > u$ при $u \in (b, c)$. Тогда a и c — притягивающие, b — отталкивающая неподвижные точки отображения $\varphi: I \to I$. Обозначим

$$h_0(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} v_0(-x), & x \in [-1, 0], \\ u_0(x), & x \in (0, 1]; \end{cases} \qquad \omega \overset{\text{def}}{=} \min_{x \in [-1,1]} |h_0(x) - b|; \qquad I \overset{\text{def}}{=} (d, l);$$

$$L \overset{\text{def}}{=} \sup_{u \in I} \dot\varphi(u); \qquad M \overset{\text{def}}{=} \max_{x \in [-1,1]} \dot h_0(x). \tag{7}$$

Очевидно, что $w \geqslant 0$, $1 < L \leqslant \infty$. Не теряя общности, предположим, что $L < \infty$.

Теорема 1. *Пусть* $\omega > 0$. *Существуют* $\mu, \nu > 0$, *зависящие от* ω, L, M *и такие, что если* $\dot\varphi(u) > -\nu$, $u \in I$, $\dot h_0(x) > -\mu$, $x \in [-1, 1]$, *то задача* (1)—(3) *в области* Π *имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение.*

Замечание. Если отображение φ фиксировано, а начальные данные меняются таким образом, что $w \to 0$, то $\mu, \nu \to 0$.

Наметим схему доказательства. Задачу (1)—(3) методом характеристик сведем к начальной задаче для уравнения (4). Используя постоянство функций $u(x, t)$, $v(x, t)$ вдоль характеристик и учитывая граничные условия (2), для любого $t \geqslant 0$ получим

$$v(1, t + 2/v(1, t)) = \varphi(v(1, t)), \tag{8}$$

причем

$$v(1, t) = \alpha(t), \qquad t \in [0, 2/v_0(1)], \tag{9}$$

где $\alpha(t) \overset{\text{def}}{=} \varphi(h_0(\xi))$, $\xi \in [-1, 1]$ — решение уравнения $t = (1 - \xi)/h_0(\xi)$. Так как $v(1, t) \neq 0$ при $t \in \mathbb{R}^+$ ($\varphi: I \to I$ и $I \subset \mathbb{R}^+$), то полагая $z(t) = 2/v(1, t)$, уравнение (8) перепишем в виде (4) с начальным условием

$$z(t) = \beta(t), \qquad t \in [0, 2/v_0(1)], \tag{10}$$

где $\beta(t) \overset{\text{def}}{=} 2/\alpha(t)$. Заметим, что если $\dot h_0(x) > -d/2$, $x \in [-1, 1]$, то функция $\beta(t)$ однозначна при всех $t \in [0, 2/v_0(1)] = [0, \beta(0)]$ (обратное, вообще говоря, неверно).

Свойства функции ψ аналогичны свойствам функции φ. Действительно, дифференцируя равенство $\psi(z) = 2/\varphi(2/z)$, убеждаемся, что $\psi(c_0) = c_0$, $|\dot\psi(c_0)| < 1$, $\psi(b_0) = b_0$, $\dot\psi(b_0) > 1$, $\psi(a_0) = a_0$, $|\dot\psi(a_0)| < 1$, $\psi(z) < z$ при $z \in (c_0, b_0)$; $\psi(z) > z$ при $z \in (b_0, a_0)$, где $c_0 = 2/c$, $b_0 = 2/b$, $a_0 = 2/a$, причем $\dot\psi(z) < 0$ ($\dot\psi(z) = 0$) тогда и только тогда, когда $\dot\varphi(2/z) < 0$ ($\dot\varphi(2/z) = 0$).

Обозначим $I_0 \overset{\text{def}}{=} (l_0, d_0)$, где $l_0 = 2/l$, $d_0 = 2/d$; $L_0 \overset{\text{def}}{=} \sup\limits_{z \in I_0} \psi(z)$; $\omega_0 \overset{\text{def}}{=} \min\limits_{t \in [0, \beta(0)]} |\beta(t) - b_0|$; $M_0 \overset{\text{def}}{=} \max\limits_{t \in [0, \beta(0)]} \dot\beta(t)$. Утверждение теоремы 1 вытекает из следующих двух лемм.

Лемма 1. *Пусть*

$$\dot h_0(x) > -d/2, \qquad x \in [-1, 1], \tag{11}$$

и решение $z(t)$, $t \geqslant 0$, *функционального уравнения* (4) *с начальным условием* (10) *удовлетворяет условию*

$$\dot z(t) > -1, \qquad t \geqslant 0. \tag{12}$$

Тогда задача (1)—(3) *в* Π *имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение* (u, v), *причем*

$$\frac{z_1(t)}{l_0(1 + z_1(t))} < u_x(x, t) < \frac{z_2(t)}{l_0}, \quad -\frac{z_2(t)}{l_0} < v_x(x, t) < -\frac{z_1(t)}{l_0(1 + z_1(t))},$$

$$-\frac{2z_2(t)}{l_0^2} < u_t(x, t) < -\frac{2z_1(t)}{l_0^2(1 + z_1(t))}, \quad -\frac{2z_2(t)}{l_0^2} < v_t(x, t) < -\frac{2z_1(t)}{l_0^2(1 + z_1(t))}, \tag{13}$$

где $z_1(t) = \min\{\min\limits_{\tau \in [t - \alpha_0, t]} \dot z(\tau); 0\}$, $z_2(t) = \max\{\max\limits_{\tau \in [t - \alpha_0, t]} \dot z(\tau); 0\}$.

Лемма 2. *Пусть* $\omega_0 > 0$. *Существуют* $\mu_0, \nu_0 > 0$, *зависящие от* ω_0, L_0 *и* M_0 *и такие, что если производные функций* ψ *и* β *удовлетворяют условиям* $\dot\psi(z) > -\nu_0$, $z \in I_0$, $\dot\beta(t) > -\mu_0$, $t \in [0, \beta(0)]$, *то функциональное* *уравнение* (4) *с начальным условием* (10) *имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение* $z(t)$, $t \geqslant 0$, *удовлетворяющее условию* (12).

Доказательство леммы 1. Для любого $t \geqslant 0$ обозначим

$$h(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} u(-x, t), & x \in [-1, 0], \\ v(x, t), & x \in (0, 1]. \end{cases} \tag{14}$$

Функция $h(x, t)$, $(x, t) \in [-1, 1] \times \mathbb{R}^+$, — решение смешанной задачи $h_t - hh_x = 0$, $h(x, 0) = h_0(-x)$, $x \in [-1, 1]$, $h(1, t) = 2/z(t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Условие (11) гарантирует однозначность и непрерывную дифференцируемость $h(x, t)$ в треугольнике $\Delta_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{0 < t < (1 - x)/h_0(-1), \ -1 \leqslant x \leqslant 1\}$. Действительно, время начала опрокидывания для $h(x, t)$ равно (см. [5, с. 27])

$$t^* = (d(h_0(-\xi))/d\xi)^{-1} = -(\dot{h}_0(-\xi))^{-1} > 2/d > (1 - \xi)/d > (1 - \xi)/h_0(-\xi),$$
$$\xi \in [-1, 1], \tag{15}$$

где $(1 - \xi)/h_0(-\xi)$ — момент пересечения характеристики $x = -\xi - h_0(-\xi)\, t$ (выходящей из точки $-\xi$ оси x) с границей $x = -1$. Поэтому в силу (15) опрокидывание $h(x, t)$ (если оно имеет место) происходит вне треугольника Δ_0.

Покажем, что функция $h(x, t)$ однозначна и при $(x, t) \in \Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{-1 \leqslant x \leqslant 1, \ t \geqslant (1 - x)/h_0(-1)\}$. Опрокидывание $h(x, t)$ происходит на характеристике

$$x = 1 + h(1, \tau)(\tau - t) \tag{16}$$

выходящей из точки $(1, \tau)$) в момент времени $t^{**} = \tau - h(1, \tau)/h_t(1, \tau)$, $\tau \geqslant 0$. Но прямая (16) в момент $t = t^{**}$ проходит через точку (x^{**}, t^{**}), где

$$x^{**} = 1 + h(1, \tau)\left(\tau - \tau + \frac{h(1, \tau)}{h_t(1, \tau)}\right) = 1 + \frac{h^2(1, \tau)}{h_t(1, \tau)} =$$
$$= 1 - \frac{2}{d\,[2/h(1, t)]_{t=\tau}/dt} = 1 - \frac{2}{\dot{z}(\tau)}. \tag{15'}$$

Из (15′), учитывая (12), получаем, что $x^{**} < -1$, и, следовательно, функция однозначна при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Таким образом, при выполнении условий (11) и (12) решение $(u(x, t), v(x, t))$, $(x, t) \in \Pi$, задачи (1)—(3) непрерывно дифференцируемо.

Докажем неравенства (13). Вдоль прямой (15) функция принимает постоянное значение

$$h(x, t) = 2/z(\tau), \tag{17}$$

где $\tau \geqslant 0$ определяется из соотношения $x = 1 + 2(\tau - t)/z(\tau)$. Из (17) имеем:

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{2}{z(\tau(x))}\right)\frac{d\tau}{dx} = -\frac{2\dot{z}(\tau(x))}{z^2(\tau(x))}\,\frac{1}{\dot{x}(\tau)} =$$
$$= -\frac{2z(\tau(x))\,\dot{z}(\tau(x))}{2z^2(\tau(x))(1 + \dot{z}(\tau(x))(1 - x)/2)} =$$
$$= -\frac{\dot{z}(\tau(x))}{z(\tau(x))(1 + \dot{z}(\tau(x))(1 - x)/2)} > -\frac{z_2(t)}{l_0}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Аналогично

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} < -\frac{z_1(t)}{l_0(1 + z_1(t))}, \qquad x \in [-1, 1].$$

Из последних двух неравенств заключаем, что

$$\frac{z_1(t)}{l_0(1+z_1(t))} < u_x(x, t) < \frac{z_2(t)}{l_0},$$

$$-\frac{z_2(t)}{l_0} < v_x(x, t) < -\frac{z_1(t)}{l_0(1+z_1(t))}, \qquad x \in [0, 1].$$

Тогда из системы (1)

$$-\frac{2z_2(t)}{l_0^2} < u_t(x, t) < \frac{2z_1(t)}{l_0^2(1+z_1(t))},$$

$$-\frac{2z_2(t)}{l_0^2} < v_t(x, t) < -\frac{2z_1(t)}{l_0^2(1+z_1(t))}, \qquad x \in [0, 1]$$

(функции $z_1(t)$ и $z_2(t)$ определены в (13)). Лемма 1 доказана.

Доказательство леммы 2 проведем в случае $\dot{\psi}(z) > 0$, $z \in I_0$ и $\beta(t) > b_0$, $t \in [0, \beta(0)]$. Существует $U_\rho(a_0)$ (ρ — окрестность точки a_0) такая, что $\sup\limits_{z \in U_\rho(a_0)} \dot{\psi}(z) \stackrel{\text{def}}{=} k < 1$. Возможны два случая.

А. $\beta(t) \in U_\rho(a_0)$, $t \in [0, \beta(0)]$. Тогда если $\dot{\beta}(t) > -(1-k)$, $t \in [0, \beta(0)]$, то для любого $t \geqslant 0$

$$|\dot{z}(t + z(t))| = \dot{\psi}(z(t))\,|\dot{z}(t)|/(1 + \dot{z}(t)) < |\dot{z}(t)|, \tag{18}$$

т. е. производные в соответствующих точках по модулю не возрастают, поэтому решение $z(t)$ задачи (4), (10) непрерывно дифференцируемо при всех $t \geqslant 0$ и удовлетворяет условию (12).

Б. $\beta(t) \bar{\in} U_\rho(a_0)$, $t \in [0, \beta(0)]$. Если $\dot{\beta}(t) > 0$, $t \in [0, \beta(0)]$, то разрывы возникнуть не могут и решение $z(t)$ непрерывно дифференцируемо и удовлетворяет условию $\dot{z}(t) > 0$ при всех $t \geqslant 0$. Предположим, что $\min\limits_{t \in [0, \beta(0)]} \dot{\beta}(t) < 0$ (заметим, что в силу условий согласования (5) обязательно $\max\limits_{t \in [0, \beta(0)]} \dot{\beta}(t) > 0$). Из того, что $\omega_0 > 0$, следует $\exists N > 0$ такого, что

$$\psi^{(N)}[\beta(t)] \in U_\rho(a_0), \qquad t \in [0, \beta(0)]. \tag{19}$$

При этом

$$\dot{z}(t) > \frac{L^N \min\limits_{t \in [0, t_0]} \dot{\beta}(t)}{1 + (L^N - 1) \min\limits_{t \in [0, t_0]} \dot{\beta}(t)/(L-1)}, \qquad t \in [t_{N-1}, t_N], \tag{20}$$

где $t_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum\limits_{i=1}^{n} \psi^{(i)}(\beta(0))$, $n = 0, 1, \ldots$, $\psi^{(i)}$,— i-я итерация ψ. Включение (19) показывает, что через N шагов значения $z(t)$ попадают в $U_\rho\, a_0)$ и если при этом $\min\limits_{t \in [0, t_0]} \dot{\beta}(t) > -(1-k)(L-1)/(L^{N+1} - kL^N - (1-k)$, то $\dot{z}(t) > -(1-k)$, $t \in [t_{N-1}, t_N]$, и мы приходим к ситуации, описанной в А.

В случае $\dot{\psi}(z) > -\nu$, $z \in I$, схема доказательства леммы остается той же.

Следующая теорема, приводимая без доказательства, показывает, что условия теоремы 1 носят необходимый характер.

Теорема 2. *Если* $\omega_0 = 0$ *и* $h_0(x) \not\equiv b$, $x \in [-1, 1]$, *то задача* (1)—(3) *не имеет решений в классе непрерывно дифференцируемых в* П *функций.*

3. Свойства решений при $t \to \infty$. В п. 1 установлено, что при выполнении условий теоремы 1 задача (1)—(3) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $(u(x, t), v(x, t))$, $(x, t) \in \Pi$. Ниже изучаются асимптотические при $t \to \infty$ свойства этих решений.

Теорема 3. *Справедливы соотношения*

$$1)\ \lim_{t\to\infty} u(x, t) = \lim_{t\to\infty} v(x, t) = \begin{cases} a, & \text{если } \max\limits_{\xi\in[-1,1]} h_0(\xi) < b, \\ c, & \text{если } \min\limits_{\xi\in[-1,1]} h_0(\xi) > b; \end{cases}$$

$$2)\ \lim_{t\to\infty} u_x(x, t) = \lim_{t\to\infty} u_t(x, t) = \lim_{t\to\infty} v_x(x, t) = \lim_{t\to\infty} v_t(x, t) = 0,\ x\in[0, 1].$$

Определение 1. *Будем говорить, что функция* $p(t) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^1)$ *осциллирует при* $t\to\infty$, *если найдется сходящаяся к* $+\infty$ *последовательность* $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, *в каждой точке которой производная* $\dot{p}(t)$ *меняет знак.*

Теорема 4. *Зафиксируем* $x^* \in [0, 1]$. *Тогда* 1) *если* $\varphi(u) > 0$, $u \in I$, *то каждая из функций* $u(x^*, t)$, $v(x^*, t)$ *осциллирует при* $t\to\infty$ *тогда и только тогда, когда производная* $\dot{h}(x)$ *меняет знак на интервале* $[-1,1]$; 2) *если* $\dot{\varphi}(a) < 0$ *и* $b > h_0(x) \not\equiv a$ ($\dot{\varphi}(c) < 0$ *и* $b < h_0(x) \not\equiv c$), *то каждая из функций* $u(x^*, t)$, $v(x^*, t)$ *осциллирует при* $t\to\infty$.

Определение 2. *Решение* $(u(x, t), v(x, t))$, $(x, t)\in\Pi$, *назовем* C^1-*устойчивым, если для любого* $\alpha > 0$ *существует* $\rho > 0$ *такое, что если* $\|\tilde{\varphi} - \varphi\|_{C^1(I,I)} < \rho$, $\|\tilde{u}_0 - u_0\|_{C^1([0,1],I)} < \rho$, $\|\tilde{v}_0 - v_0\|_{C^1([0,1],I)} < \rho$, *то* $\|\tilde{u} - u\|_{C^1(\Pi,I)} < \alpha$, $\|\tilde{v} - v\|_{C^1(\Pi,I)} < \alpha$, *где* $(\tilde{u}(x, t), \tilde{v}(x, t))$, $(x, t)\in\Pi$ — *решение задачи* (1) — (3) *с измененными функциями* $\tilde{\varphi}$, $\tilde{u}_0$, $\tilde{v}_0$, *удовлетворяющими условиям согласования вида* (5) — (6).

Теорема 5. *Решение* $(u(x, t), v(x, t))$, $(x, t)\in\Pi$, *задачи* (1)—(3) C^1-*устойчиво.*

Доказательства теорем 3—5 следуют из леммы 1 и соответствующих утверждений для решений функционального уравнения (4).

4. Сингулярно возмущенные граничные условия. Рассмотрим систему (1) с сингулярно возмущенными граничными условиями

$$u(0, t) = v(0, t),\quad \varepsilon v_t(1, t) = -v(1, t) + \varphi(u(1, t)),\qquad t\in\mathbb{R}^+, \tag{2'}$$

и начальными условиями (3). Предположим, что функции φ, u_0, v_0 имеют ограниченные вторые производные и удовлетворяют условиям согласования

$$u_0(0) = v_0(0),\quad v_0(1) = \varphi(u_0(1)) - \varepsilon u_0(1)\dot{\varphi}(u_0(1))\dot{u}_0(1), \tag{5'}$$

$$\dot{u}_0(0) = -\dot{v}_0(1),\quad \dot{v}_0(1) = -u_0(1)\dot{\varphi}(u_0(1))\dot{u}_0(1)/v_0(1). \tag{6'}$$

Предположим также, что выполняются условия теоремы 1, т. е. при $\varepsilon = 0$ задача имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $(u^0(x, t), v^0(x, t))$, $(x, t)\in\Pi$.

Теорема 6. *Существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что при каждом* $\varepsilon\in[0, \varepsilon_0)$ *задача* (1), (2′), (3) *имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение* $(u^\varepsilon(x, t), v^\varepsilon(x, t))$, $(x, t)\in\Pi$.

Теорема 7. *Для любого* $\alpha > 0$ *существует* $\varepsilon_1 > 0$ *такое, что при каждом* $\varepsilon\in[0, \varepsilon_1)$ $\|u^\varepsilon - u^0\|_{C^1(\Pi,I)} < \alpha$, $\|v^\varepsilon - v^0\|_{C^1(\Pi,I)} < \alpha$.

Теорема 8. *Существует* $\varepsilon_1 > 0$ *такое, что при каждом* $\varepsilon\in[0, \varepsilon_1)$

$$1)\ \lim_{t\to\infty} u^\varepsilon(x, t) = \lim_{t\to\infty} v^\varepsilon(x, t) = \begin{cases} a, & \text{если } \max\limits_{\xi\in[-1,1]} h_0(\xi) < b, \\ c, & \text{если } \min\limits_{\xi\in[-1,1]} h_0(\xi) > b; \end{cases}$$

$$2)\ \lim_{t\to\infty} u_x^\varepsilon(x, t) = \lim_{t\to\infty} u_t^\varepsilon(x, t) = \lim_{t\to\infty} v_x^\varepsilon(x, t) = \lim_{t\to\infty} v_t^\varepsilon(x, t),\quad x\in[0, 1].$$

Так как при $\varepsilon > 0$ в граничном условии (2′) присутствует производная по времени, то метод характеристик позволяет свести задачу (1), (2′), (3) не к функциональному, как раньше, а к дифференциально-функциональному уравнению

$$\varepsilon\dot{y}(t + 2/y(t)) = -y(t + 2/y(t)) + \varphi(y(t)),\quad t\in\mathbb{R}^+, \tag{21}$$

$(y(t) \overset{\text{def}}{=} v^{\varepsilon}(1, t))$ с начальным условием

$$y(t) = y_0^{\varepsilon}(t), \quad t \in [0, 2/v_0(1)], \tag{22}$$

где $y_0^{\varepsilon}(t)$ — решение задачи Коши

$$\varepsilon \dot{y}_0(t) = -y_0(t) + f_0(t), \quad t \in [0, 2/v_0(1)], \quad y_0(0) = v_0(1) \tag{23}$$

$(f_0(t) \overset{\text{def}}{=} \varphi(h_0(\xi)),\ \xi \in [-1, 1]$ — решения уравнения $t = (1-\xi)/h_0(\xi))$.

Связь между решениями задачи (1), (2′), (3) и задачи (21), (22) устанавливает следующая лемма.

Лемма 1′. *Пусть выполняется условие* (11). *Если решение* $y^{\varepsilon}(t)$, $t \geqslant 0$, *задачи* (21), (22) *удовлетворяет условию* $d(2/y^{\varepsilon}(t))/dt > -1$, *то задача* (1), (2′), (3) *в области* П имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $(u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})$, причем

$$-\frac{y_{2,\varepsilon}(t)}{d\left(1 - \min\limits_{\tau \in [t-l, t]} d(2/y^{\varepsilon}(\tau))/d\tau\right)} < u_x^{\varepsilon}(x, t) < \frac{y_{1,\varepsilon}(t)}{d},$$

$$\frac{y_{1,\varepsilon}(t)}{d} < v_x^{\varepsilon}(x, t) < \frac{y_{2,\varepsilon}(t)}{d\left(1 - \min\limits_{\tau \in [t-l, t]} d(2/y^{\varepsilon}(\tau))/d\tau\right)},$$

$$\frac{y_{1,\varepsilon}(t)}{d} < u_t^{\varepsilon}(x, t) < \frac{l y_{2,\varepsilon}}{d\left(1 - \min\limits_{\tau \in [t-l, t]} d(2/y^{\varepsilon}(\tau))/d\tau\right)},$$

$$\frac{l y_{1,\varepsilon}(t)}{d} < v_t^{\varepsilon}(x, t) < \frac{l y_{2,\varepsilon}(t)}{d\left(1 - \min\limits_{\tau \in [t-l, t]} d(2/y^{\varepsilon}(\tau))/d\tau\right)},$$

где $y_{1,\varepsilon}(t) = \min\{\min\limits_{\tau \in [t-l, t]} \dot{y}^{\varepsilon}(\tau);\ 0\}$, $y_2^{\varepsilon}(t) = \max\{\max\limits_{\tau \in [t-l, t]} \dot{y}^{\varepsilon}(\tau);\ 0\}$.

Доказательство теорем 6—8 опирается на лемму 1′ и соответствующие утверждения для решений дифференциально-функционального уравнения (21). Исследование проводится методом пошагового интегрирования:

$$y_0^{\varepsilon}(t) = v_0(1)\, e^{-t/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-t/\varepsilon} \int_0^t f_0(s)\, e^{s/\varepsilon} ds, \qquad t \in [0, t_0],$$

$$y_{k+1}^{\varepsilon}(t) = y_k^{\varepsilon}(t_k)\, e^{-(t-t_k)/\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} e^{-(t-t_k)/\varepsilon} \int_{t_k}^t f_{k+1}(s)\, e^{(s-t_k)/\varepsilon} ds,$$

$$f_{k+1}(t + 2/y_k^{\varepsilon}(t)) = \varphi(y_k^{\varepsilon}(t)), \qquad t \in [t_k, t_{k+1}], \qquad k = 0, 1, \ldots,$$

где $t_0 = 2/v_0(1)$, $t_{k+1} = t_k + 2/y_k^{\varepsilon}(t_k)$, $k = 0, 1, \ldots$. Отсутствие пограничного слоя у решений на каждом шаге гарантируется условиями согласования (5′)—(6′).

В настоящей работе метод сведения краевых задач для уравнений в частных производных к функциональным и дифференциально-функциональным уравнениям применен в достаточно простом случае. Авторы считают, что этот подход окажется полезным и в более общих ситуациях.

1. *Мышкис А. Д., Филимонов А. М.* Непрерывные решения квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными.— Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 3, с. 488—500.
2. *Филимонов А. М.* Достаточные условия глобальной разрешимости смешанной задачи для квазилинейных гиперболических систем с двумя независимыми переменными.— М., 1980.— 14 с.— Рукопись деп. в ВИНИТИ 04.01.81, № 6—81 Деп.
3. *Пелюх Г. П., Шарковский А. Н.* Введение в теорию функциональных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1974.— 119 с.
4. *Kuczma M.* Functional equations in a single variable.—Warszawa, 1968.—383 p.
5. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны.— М. : Мир, 1977.— 622 с.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила 20.07.83