УДК 517.938

С. И. Трофимчук

Необходимое условие существования инвариантного многообразия линейного расширения динамической системы на компактном многообразии

Используя идею о связи допустимости определенной пары для линейной системы и дихотомиями этой системы [4], расширим результаты из [1], при этом рассмотрим только рефлексивные банаховы пространства.

Исследуем систему (1) и соответствующую ей однородную систему (1′) линейного расширения динамической системы на компактном многообразии:

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \qquad dx/dt = P(\varphi)\,x + f(\varphi), \tag{1}$$

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \qquad dx/dt = P(\varphi)\,x. \tag{1′}$$

Здесь $\varphi \in K$, K — гладкое компактное многообразие; $d\varphi/dt = a(\varphi)$ — уравнение, задающее поток $\varphi_t(\varphi)$ на K; будем считать, что $\varphi_0(\varphi) = \varphi$; $x \in X$, X — банахово рефлексивное пространство; $P(\varphi) \in L(X, X)$; $P(\varphi)$ непрерывно зависит от φ; $f: K \to X$ — непрерывная функция; класс таких функций мы будем обозначать как $C(K, X)$.

Обозначим через $C'(K, X)$ подпространство $C(K, X)$, образованное теми функциями $\sigma(\varphi) \in C(K, X)$, для которых функция $\sigma(\varphi_t(\varphi))$ непрерывно дифференциируема по t, $t \in R$, $\varphi \in K$. Инвариантным многообразием системы уравнений (1) назовем функцию $x = \sigma(\varphi)$, если $\sigma \in C'(K, X)$ и $d\sigma(\varphi_t(\varphi))/dt = P(\varphi_t(\varphi))\,\sigma(\varphi_t(\varphi)) + f(\varphi_t(\varphi))$, $t \in R$, $\varphi \in K$.

Будем также говорить, что инвариантное многообразие $\sigma(\varphi)$ (экспоненциально) вырождено вдоль траекторий на K, если $\|\sigma(\varphi_t(\varphi_0))\|$ (экспоненциально) стремится к нулю при $|t| \to +\infty$ $\forall \varphi_0 \in K$.

Основная цель работы — доказательство следующего утверждения.

Теорема 1. *Инвариантные многообразия системы* (1) $\forall f(\varphi)$ *из* $C(K, X)$ *существуют только тогда, когда для системы*

$$d\varphi/dt = a(\varphi), \quad dx^*/dt = -P^*(\varphi)\,x^* \tag{2}$$

любая ее «индивидуальная» часть

$$dx^*/dt = -P^*(\varphi_t(\varphi^0))\,x^* \tag{2'}$$

А) *вдоль любой незамкнутой траектории* $\varphi_t(\varphi^0)$ *имеет лишь нулевое ограниченное решение*; Б) *вдоль замкнутой траектории* $\varphi_t(\varphi^0)$ *имеет лишь нулевое периодическое решение.*

В частности, система (2) должна иметь лишь тривиальное многообразие.

Доказательство. А). Пусть точка $\varphi^0 \in K$ такова, что через нее не проходит периодическое решение. Рассмотрим множество M — замыкание траектории $\varphi_t(\varphi^0)$ в компактном метрическом пространстве K. Через $C(M, X)$ обозначим сужение $C(K, X)|_M$.

Рассмотрим «индивидуальную» систему, индуцированную системой (1) для φ^0:

$$dx/dt = P(\varphi_t(\varphi^0))\,x + f(\varphi_t(\varphi^0)). \tag{3}$$

Понятно, что для разрешимости (1) в классе $C'(K, X)$ необходима разрешимость (3) для произвольной $f(\varphi) \in C(M, X)$.

Обозначим $C_M(R, X)$ нормированное пространство всех непрерывных функций $f: R \to X$ с нормой $\|f\|_{C(R,X)} = \sup_R \|f\|_X$, обладающих тем свойством, что индуцированная ими функция на траектории $\varphi_t(\varphi^0)$ (таким образом, что R рассматривается как вложение $i: R \to M$ посредством отображения $i(t) = \varphi_t(\varphi^0)$) допускает непрерывное продолжение на M. Но тогда $C_M(R, X)$ изометрично изоморфно $C(M, X)$, и поэтому $C_M(R, X)$ — банахово пространство.

Итак, для разрешимости (1) в классе $C'(K, X)$ необходимо, чтобы для любой функции $g(t) \in C_M(R, X)$ уравнение

$$dx/dt = P(\varphi_t(\varphi^0))\,x + g(t) \tag{4}$$

было разрешено в классе $C_M(R, X)$. Это означает, что для уравнения (4) пара банаховых пространств $(C_M(R, X);\ C_M(R, X))$ допустима. Так как мы рассматриваем только рефлексивные пространства, то в силу предложения 51.F из [4] пара $(\mathrm{lc}\, C_M(R, X);\ \mathrm{lc}\, C_M(R, X))$ также допустима. Здесь $\mathrm{lc}\, F$ — обозначение пространства, получившегося в результате локального замыкания F [4].

Однако, пользуясь теоремой о продолжении Титце—Дугунджи [7], можно доказать, что $\mathrm{lc}\, C_M(R, X) = L^\infty(R, X)$; $L^\infty(R, X)$ — банахово пространство всех сильно измеримых функций $f: R \to X$ с нормой $|f| = \operatorname{ess\,sup}_R \|f\|_X$.

Итак, пара $(L^\infty(R, X),\ L^\infty(R, X))$ допустима для (4); но тогда в силу утверждения 66.K из [4] для любого решения $y^*(t) \in L^1(R_+, X^*)$ уравнения

$$dx^*/dt = -P^*(\varphi_t(\varphi^0))\,x^* \tag{5}$$

верна оценка

$$\|y^*(t)\| \leqslant N \exp(-\nu(t - t_0))\,\|y^*(t_0)\| \quad \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0. \tag{6}$$

Если же решение $z^*(t)$ уравнения (5) не принадлежит классу $L^1(R_+, X^*)$, то справедливо следующее неравенство

$$\|z^*(t)\| \geqslant N' \exp(\nu'(t - t_0))\,\|z^*(t_0)\| \quad \forall t \geqslant t_0 \geqslant 0, \tag{7}$$

где ν', ν, N', N — некоторые положительные константы.

Аналогичные выводы справедливы и для отрицательной полуоси. Если $y^*(t)$ — ограниченное решение (5), то

$$y^*(t) \in L^1(R_+, X^*) \cap L^1(R_-, X^*) \tag{8}$$

и $\lim \|y^*(t)\| = 0$, $|t| \to +\infty$.

Выражение (8) означает, что $y^*(0) \in X^*_{+0L^1} \cap X^*_{-0L^1}$, где $X^*_{\pm 0L^1}$ — линейное многообразие значений в точке $t = 0$ тех решений (5), которые принадлежат классу $L^1(R_\pm, X^*)$.

Но если

$$y^*(0) \neq 0, \tag{9}$$

то в силу того, что $X_{+0L^\infty} + X_{-0L^\infty} = X$ и функционалы из $X^*_{\pm 0L^1}$ аннулируют элементы из $X_{\pm 0L^\infty}$ (см. [4, стр. 28]), получаем $(y^*(0), x) = 0$, $x \in X$, что противоречит (9). Поэтому $y^*(0) = 0$ и часть А) доказана.

Б). В этом случае рассуждения части А) не применимы (отображение $i(t) = \varphi_t(\varphi^0)$ не является вложением $R \to K$); но доказательство следует, например, из утверждений 112.В и 32.D монографии [4].

Теорема 1 доказана.

Для случая конечномерных пространств из доказанной теоремы и результатов [6] получаем следующее утверждение (здесь S^1 — одномерная сфера).

Т е о р е м а 2. *Если поток $\varphi_t(\varphi)$ строго эргодичен и $K \neq S^1$, то уравнение* (1) *разрешимо в классе $C'(K, X)$ тогда и только тогда, когда система* (1′) *экспоненциально дихотомична.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточность наличия экспоненциальной дихотомии для существования решения класса $C'(K, X)$ — хорошо известный факт, доказываемый, например, с помощью функции Грина для инвариантного многообразия [2].

Докажем необходимость этого условия. Действительно, если поток на K строго эргодичен, то существует лишь одно минимальное множество на K, ибо в противном случае, воспользовавшись теоремой Крылова — Боголюбова, мы наделили бы два различных компактных минимальных подмножества K инвариантной мерой весом в 0,5, продолжив ее на остальной части как нулевую. Но это противоречит эргодичности потока $\varphi_t(\varphi)$. Далее, пусть (1) разрешима в классе $C'(K, X)$ $\forall f(\varphi) \in C(K, X)$, тогда (2) имеет для каждой системы (2′), согласно теореме 1 и предположению $K \neq S^1$, лишь нулевые ограниченные решения, но для случая, когда поток на K содержит лишь одно минимальное множество, это свойство эквивалентно, согласно [6], экспоненциальной дихотомии (2) и системы (1).

З а м е ч а н и е 1. В бесконечномерных пространствах условие вырожденности инвариантного многообразия для системы (1) не является необходимым даже в таком простейшем случае, когда $X = l^2$ — действительное или комплексное сепарабельное гильбертово пространство, $K = \{p\}$ — точка (в этом случае $P(\varphi) = P(p) = P_0$ — постоянный оператор, $f(\varphi) = f$ — элемент l^2).

Так, система $dx/dt = P_0 x + f$, где $P_0 f = P_0(f_1, f_2, f_3, \ldots) = (f_2, f_3, \ldots)$, имеет $\forall f$ инвариантные многообразия $(\alpha, -f_1, -f_2, \ldots)$ из l^2 $\alpha \in R$; в это время соответствующая ей однородная система имеет нетривиальный «тор» $u = e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$.

Однако для конечномерного случая, пользуясь методами, примененными при доказательстве теоремы 1, можно получить дополнительную информацию — для разрешимости (1) в классе $C'(K, X)$ необходимо, чтобы инвариантные многообразия (1′) были экспоненциально вырожденными.

При исследовании многих задач требование «грубой разрешимости» естественно: система (1) должна быть разрешима в классе $C'(K, X)$ при любых достаточно малых изменениях $a(\varphi)$ и $P(\varphi)$ и обладать единственным решением. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а 3. *Пусть $a(\varphi) \in C^1(K)$, тогда следующие условия эквивалентны*: а) *система* (1) *«грубо разрешима»*; б) *система* (1′) *экспоненциально дихотомична*; в) *система* (1) *обладает единственной функцией Грина* (*в смысле Самойленко*).

Справедливость теоремы следует из предыдущих рассмотрений и результатов [3, 6, 8].

З а м е ч а н и е 2. Отметим, что разрешимость системы (1) в классе $C'(K, X)$ для произвольной функции из $C(K, X)$ не эквивалентна существованию функции Грина.

В качестве примера возьмем систему

$$d\varphi/dt = 1, \ (0 \leqslant \varphi \leqslant 1), \ \varphi \in S^1, \ dx/dt = Ax,$$

где

$$A = \operatorname{diag}\left\{-1, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, +1\right\}.$$

З а м е ч а н и е 3. *Можно предполагать, что K — компактное* метрическое пространство и вместо системы (1′) рассматривать линейное косое произведение динамических систем.

1. *Самойленко А. М.* Необходимые условия существования инвариантных торов линейных расширений динамических систем на торе.—Диф. уравнения, 1980, **16**, № 8, с. 1427—1437.
2. *Самойленко А. М.* О сохранении инвариантного тора при возмущении.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1970, **34**, № 6, с. 1219—1240.
3. *Самойленко А. М.* Функция Грина линейного расширения динамической системы на торе, условия ее единственности и свойства, вытекающие из этих условий.—Укр. мат. журн., 1980, 32, № 6, с. 791—797.
4. *Массера X., Шеффер X.* Линейные дифференциальные уравнения и функциональные пространства.— М. : Мир, 1970.— 456 с.
5. *Kryloff N., Bogoliouboff N.* La theorie générale de la mesure et son application á l'étude des systems dynamiques de la mécanique non-linéare.—Ann. of Math., 1937, 38, N 1, p. 65—113.
6. *Sacker R. J., Sell G. R.* Existence of dichotomies and invariant splittings for linear differential systems. II.— J. of Different. Equat., 1976, 22, p. 478—496.
7. *Dugundji J.* An extension of Tietze's theorem.— Pacific J. Math., 1951, **1**, p. 353—367.
8. *Ордынская З. П., Кулик В. Л.* Об экспоненциальной дихотомичности систем дифференциальных уравнений.— Сиб. мат. журн., **24**, № 3, с. 128—135.

Ин-т матем. АН УССР, Киев

Поступила в редакцию 21.12.83